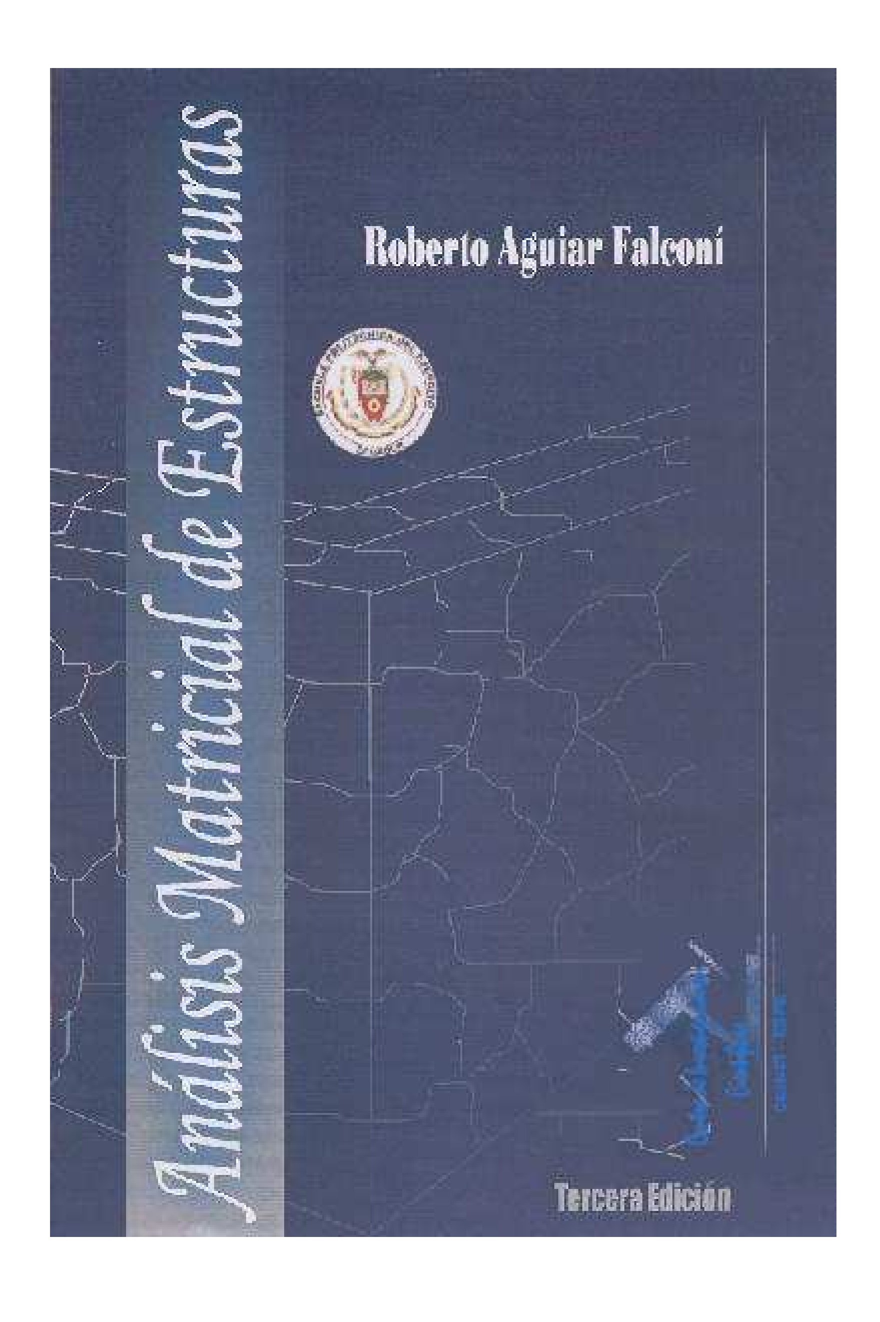

Análisis Matricial de Estructuras
Roberto Aguiar Falconí
Tercera Edición

Presentación

La primera edición del libro: “Análisis Matricial de Estructuras” fue publicado en 1982 y sirvió durante varios años como texto de consulta de la materia que se creó con el mismo nombre en 1982 en la Facultad de Ingeniería Civil de la Escuela Politécnica del Ejército. El Ing. Adrián Herrera Vela en esa época alumno de VI Nivel tuvo la paciencia de escribir el libro en una máquina portátil en la cual si se equivocaba tenía dos opciones, repetir la página o usar tinta blanca correctora, era muy difícil escribir en esa época. Este texto tuvo 274 páginas.

La segunda edición del libro: “Análisis Matricial de Estructuras” se publicó en 1995, fue una edición que tuvo 15 capítulos y 612 páginas. La diferencia de páginas habla por si solo de que prácticamente era un nuevo libro que en ésta ocasión fue escrito por el Ing. Héctor Oña G., que por esos tiempos era estudiante de Ingeniería Civil de la ESPE. La presentación de éste libro fue realizada por el Ing. Ignacio Dávila Rojas y el prólogo fue escrito por el Ing. Alejandro Segovia Gallegos, que ha criterio del autor han sido los principales profesores que ha tenido la ESPE no solo por sus conocimientos y entrega a la cátedra sino por su gran calidad humana. Fue un honor que me hicieron estos dos grandes maestros en escribir la presentación y el prólogo de ese libro con palabras muy bondadosas que han servido de estímulo en mi trayectoria académica y científica.

Decidí escribir la tercera edición ante el reiterado pedido de estudiantes de varias universidades del Ecuador que me pedían que les preste la segunda edición del libro para fotocopiarlo y así seguir las clases de sus profesores. El 16 de diciembre de 2003 fui invitado por el Ing. Diego Barahona, profesor de la Universidad Nacional del Chimborazo y ex alumno del autor del libro a que dicte un curso sobre “Análisis Sísmico por Desempeño” en la ciudad de Riobamba y nuevamente se repitió el pedido de que necesitaban el libro de “Análisis Matricial de Estructuras” ahí fue cuando decidí trabajar a tiempo completo en la edición del presente libro.

En ésta ocasión personalmente me dedique a escribir el texto teniendo como base el libro de la segunda edición, con las herramientas informáticas que se disponen actualmente es más sencillo escribir los libros en relación a la forma como lo hacíamos por 1980 o 1990. A pesar de que se tiene esta ayuda informática, escribir un libro demanda demasiado tiempo pero únicamente el pensar que va a ser de gran utilidad a tantos estudiantes le da animo a sacrificarse a sabiendas de que escribir un libro técnico en el Ecuador no es rentable desde el punto de vista económico pero si desde el punto de vista espiritual que es más valioso que el primero.

La tercera edición del libro tiene 17 capítulos, dos más que el anterior ya que este libro fue escrito para cubrir el programa de estudios de la materia “Análisis Matricial de Estructuras” que se dicta en la ESPE en V Nivel, y el programa termina con el cálculo de la matriz de rigidez en coordenadas de piso orientado al análisis sísmico de edificios considerando piso rígido. De tal manera que la segunda edición estaba incompleta puesto que el programa de estudios no se termina con la programación de una estructura que era el último capítulo de la segunda edición.

Debo manifestar que al escribir la tercera edición no me gustó la redacción empleada en la segunda edición, había temas que los consideraba que no estaban lo suficientemente explicados y por eso decidí realizar más ejemplos para que el texto sea más didáctico para los estudiantes. De

igual manera había que actualizar ciertos aspectos de acuerdo al conocimiento que se tiene actualmente y a las herramientas informáticas que se disponen.

La tercera edición del libro tiene un menor número de páginas en relación a la segunda edición debido a que ahora se escribió con una letra más pequeña pero ésta nueva edición tiene dos capítulos más que la anterior y un mayor número de ejemplos resueltos.

En el capítulo 15 del libro de la segunda edición se presentó un programa de computación en Fortran para resolver pórticos planos. Ahora se presenta un programa de computación en MATLAB el mismo que fue desarrollado por la Ing. Ana Gabriela Haro quien es actualmente la profesora de esta materia en la ESPE desde el 2003. El Fortran es un lenguaje de computación muy actual orientado al cálculo científico es así como programas de fama mundial como el SAP2000, Ruaumoko, IDARC, Drain, etc, están escritos en Fortran pero decidí cambiar la programación a MATLAB por que para los estudiantes es mucho más fácil su programación por las librerías que dispone.

Agradezco a la Ing. Ana Gabriela Haro por haber redactado el capítulo 15 del libro siguiendo el mismo esquema de la segunda edición. La mejor satisfacción que tiene un profesor es formar a sus estudiantes y cuando uno considera que ya tienen bases sólidas para impartir la materia que mejor que ellos lo hagan, la mencionada profesional que fue la mejor estudiante de su promoción fue mi asistente de cátedra y de trabajo en el Centro de Investigaciones Científicas de la ESPE, es una persona muy inteligente y me siento complacido que sea ella quien dicté la materia que dicte por espacio de 20 años en la ESPE.

De igual manera deseo agradecer al Sr. Wilson Estacio, actualmente alumno del VIII Nivel de Ingeniería de Sistema y que trabaja en el Centro de Investigaciones Científicas quien ha sido el encargado de realizar todos los dibujos del libro he de reconocer que como no es estudiante de Ingeniería Civil tuvo que repetir algunas veces varios dibujos para que las deformadas queden muy bien. El Sr. Wilson Estacio es un hombre muy trabajador y capaz que sabía que su trabajo es muy valioso para el aprendizaje de los lectores del libro y se esmeró al máximo para que los dibujos sean de calidad.

Gracias a Dios cuento con el apoyo de los Directivos de la ESPE para dedicarme a enseñar, investigar, escribir y desde el 2003 ha fomentar la Investigación Científica en la ESPE, por éste motivo es de caballeros ser agradecido pero para que no sea tan larga la lista de los Directivos que me han apoyado quiero hacerlo únicamente a los dos últimos Rectores de la Institución que por coincidencia son Ingenieros Civiles y se que van a valorar este libro.

Empecé la tercera edición cuando era Rector de la ESPE el Crnl. Ing. Edwin Ortiz y terminé cuando es Rector el Crnl. Ing. Marco Vera, dos hombres muy capaces, honestos, brillantes, a quienes conozco desde hace más de 20 años cuando ellos eran Tenientes y excelentes estudiantes de la ESPE. A ellos y por su intermedio a los Directivos de la ESPE mi profundo agradecimiento por permitirme publicar esta obra que va en beneficio de los estudiantes de la ESPE y de todos los estudiantes en cuyas universidades se sigue éste texto como fuente de consulta.

Como en todos mis libros no puedo dejar de agradecer a mi querida esposa Alice Noury y a mis hijos: Roberto, Alice, María José, Nicolás, Gabriel y Felipe por la gran felicidad que me dan día a día y finalmente pero en primer lugar a Dios que sin su ayuda nada puedo.

Roberto Aguiar Falconí
Director del Centro de Investigaciones Científicas
Escuela Politécnica del Ejército.
Mayo de 2004

INDICE GENERAL

CAPITULO 1

COORDENADAS GENERALIZADAS Y GRADOS DE LIBERTAD

CAPITULO 2

SISTEMA DE CARGAS Y COORDENADAS GENERALIZADAS

CAPITULO 3

FUNCIONES DE FORMA O DE INTERPOLACIÓN

CAPITULO 4

VECTOR DE CARGAS GENERALIZADAS Q

CAPITULO 5

RELACION ENTRE DOS SISTEMAS DE COORDENADAS

CAPITULO 6

RELACION ENTRE CARGAS Y DESPLAZAMIENTOS GENERALIZADOS. ESTUDIO DE LAS DEFORMACIONES

CAPITULO 7

MATRIZ DE RIGIDEZ Y DE FLEXIBILIDAD DE UN ELEMENTO LINEAL

CAPITULO 8

MATRIZ DE RIGIDEZ Y DE FLEXIBILIDAD DE UNA ESTRUCTURA A PATRIR DEL CONCEPTO

CAPITULO 9

MATRICES A Y B

CAPITULO 10

CALCULO DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ DE UNA ESTRUCTURA POR MEDIO DE LA MATRIZ A

CAPITULO 11

EL METODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS

CAPITULO 12

MATRIZ DE RIGIDEZ DE UN ELEMENTO ORIENTADO AL USO DEL COMPUTADOR

CAPITULO 13

ENSAMBLAJE DIRECTO DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ DE UNA ESTRUCTURA

CAPITULO 14

SOLUCION DE UNA ESTRUCTURA PLANA ORIENTADA AL USO DEL COMPUTADOR

CAPITULO 15

PROGRAMACIÓN DE UN MARCO PLANO

CAPITULO 16

CONDENSACIÓN ESTATICA DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ

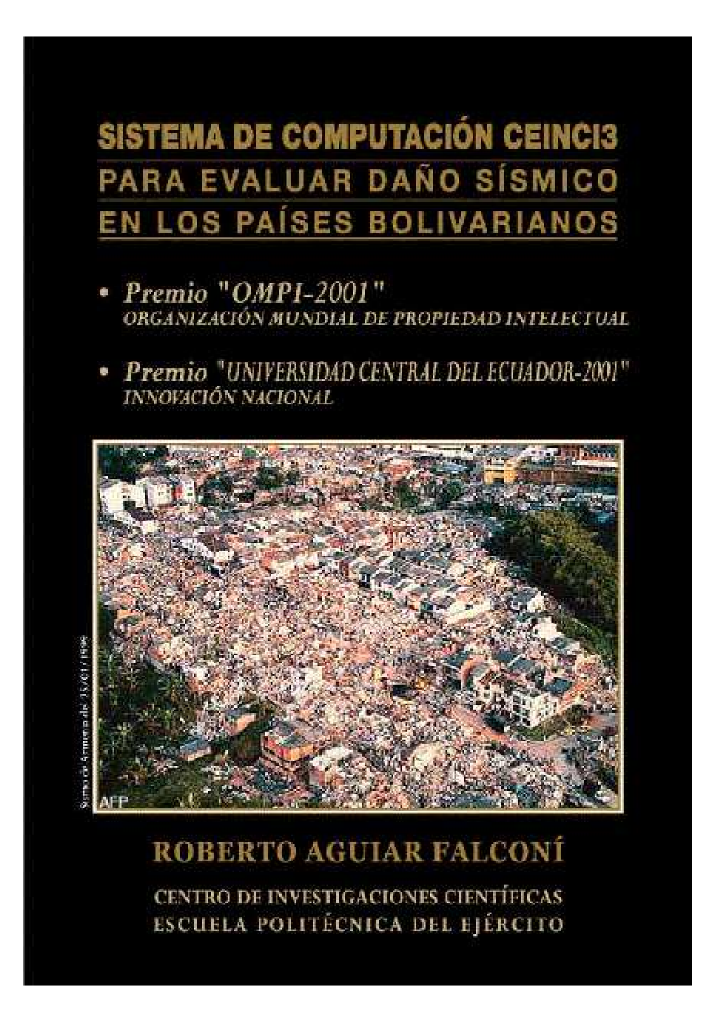
CAPITULO 17

MATRIZ DE RIGIDEZ EN COORDENADAS DE PISO

LIBROS DEL AUTOR EN INTERNET

LIBROS DEL AUTOR EN INTERNET

- **SISTEMA DE COMPUTACIÓN CEINCI3 PARA EVALUAR DAÑO SÍSMICO EN LOS PAÍSES BOLIVARIANOS**



- *R. Aguiar*
- *Derecho de Autor N. 016638.*
- *ISBN 9978-42-353-2*

- **Presentación**.- Sismos de magnitud intermedia. Pérdidas registradas por los Sismos. Contenido del libro. Subprogramas del Sistema de Computación CEINCI3. CEINCI3 y el Método del Espectro de Capacidad. CEINCI3 y HAZUS 99. Análisis Crítico. Agradecimientos.

- **Capítulo 1.- Análisis estático no lineal y el subprograma CAPACIDAD**.- Introducción. Sismos de Análisis. Comportamiento y Desempeño Esperado de acuerdo a VISION 2000. Capacidad Resistente. Modelo constitutivo del acero. Modelo constitutivo del hormigón. Relaciones Momento Curvatura. Esquema de Cálculo. Método de Dovelas. Modelaje de los elementos. Matriz de flexibilidad. Elemento Viga. Elemento Columna. Elemento Muro de Corte. La Técnica del Pushover. Análisis con subprograma CAPACIDAD Versión 3.0. Obtención de la Curva de Capacidad Resistente de un Pórtico Plano: Capacidad resistente de los elementos, Análisis Inicial, Segundo Incremento de Cargas, Propiedades Dinámicas. Archivos que genera el subprograma CAPACIDAD. Entrada de datos para el subprograma CAPACIDAD. Archivo de datos. Comparación de resultados obtenidos con subprograma CAPACIDAD y DRAIN-2DX. Resultados. Espectro de Capacidad. Comentarios

- **Capítulo 2.- Modelo Bilineal para sistema con múltiples grados de libertad y subprograma MBCAP**.- Introducción. Ejemplo de Análisis Estático No Lineal. Nomenclatura. Punto de Fluencia en una estructura: Criterio de la rigidez tangente horizontal, Criterio de las rigideces tangentes, Criterio de las áreas iguales. Ajuste por mínimos cuadrados. Determinación del error. Subprograma MBCAP. Uso de subprograma MBCAP. Disipadores de Energía. Comentarios.

- **Capítulo 3.- Sistema simplificado de referencia y subprograma SDOF**.- Subprograma CAPACIDAD y el efecto $P-\Delta$. Comparación de Curvas de Capacidad. Análisis con Modo Equivalente. Teoría Básica. Modelos SDOF.- Ejemplo Numérico. Subprograma SDOF. Secuencia de trabajo para usar CEINCI3 en metodología 1.

- **Capítulo 4.- Análisis Lineal, No Lineal y Espectros Inelásticos. Subprogramas NOLIN y NLSPEC en sistema SDOF**.- Introducción. Análisis Lineal. Procedimiento de cálculo con Análisis Lineal. Ejemplo de Análisis Lineal. Análisis No Lineal. Procedimiento de cálculo de análisis no lineal. Procedimiento de cálculo. Modelo elasto plasto. Puntos de ajuste. Ejemplo numérico de análisis no lineal. Modelo Bilineal. Excitación Sísmica. Respuesta en el tiempo para excitación sísmica. Uso de subprograma NOLIN. Espectros Inelásticos: Espectros de Resistencia sísmica constante. Espectros de demanda de ductilidad constante. Uso de subprograma NLSPEC. Conclusiones.

- **Capítulo 5.- Análisis sísmico en sistemas SDOF y MDOF y subprograma DRIFT.**- Máximas distorsiones de piso. Espectro Lineal y No lineal: Registros SCT-85. Espectro Lineal. Espectro no Lineal. Análisis sísmico tradicional. Distorsión de piso y global. Cálculo a partir del sistema SDOF. Cálculo en sistema MDOF. Comentarios del cálculo de las distorsiones. Incertidumbres asociadas a la respuesta y al sismo. Ejemplo. Cálculo de la distorsión incluyendo incertidumbres. Uso de subprograma DRIFT. Ejemplo de aplicación de subprograma DRIFT.

- **Capítulo 6.- Funciones de Vulnerabilidad en Construcciones Informales del Estado Vargas**.- Vulnerabilidad Sísmica. Índice de daño. Alternativa de cálculo del índice de daño. Modelo Bilineal. Método Simplificado de Referencia. Índice de Vulnerabilidad. Funciones de Vulnerabilidad. Relación entre el Índice de Vulnerabilidad e Índice de Daño. Relación entre el índice de Daño y el Desplazamiento Lateral. Relaciones entre el Índice de Daño y el Período.

- **Capítulo 7**.- **Aplicación del Sistema CEINCI3 al Diseño Sismo Resistente.-** Descripción de la Estructura y de los Sismos de Análisis. Capacidad Resistente. Modelo Bilineal. Análisis Sísmico. Desempeño Esperado. Secciones con Daño. Conclusiones.

- **Capítulo 8**.- **Espectros de Capacidad para diferentes materiales y subprograma CURVAEC.-** Introducción. Sistemas Estructurales. Parámetros del Espectro de Capacidad de HAZUS 99. Niveles de Diseño y Espectro de Capacidad de HAZUS 99. Subprograma CURVAEC.

- **Capítulo 9**.- **Espectros de Capacidad para Estructuras de Hormigón Armado y subprograma ESPECAP.-** Ecuaciones de Cálculo. Ejemplo de Aplicación. Uso de subprograma ESPECAP. Investigación para viviendas de poca altura. Investigación con viviendas de altura intermedia. Investigación con edificios altos. Conclusiones.

- **Capítulo 10**.- **Espectros de Demanda para Países Bolivarianos y Subprograma ESPEDEM.-** Zonificación Sísmica de: Venezuela, Colombia, Ecuador y Perú. Espectros Elásticos de: Venezuela, Colombia, Ecuador y Perú. Espectros para diferentes amortiguamientos. Espectros de Demanda. Uso de subprograma ESPEDEM. Comentarios de las curvas de capacidad resistente. Comentarios sobre el Método del Espectro de Capacidad. Conclusiones.

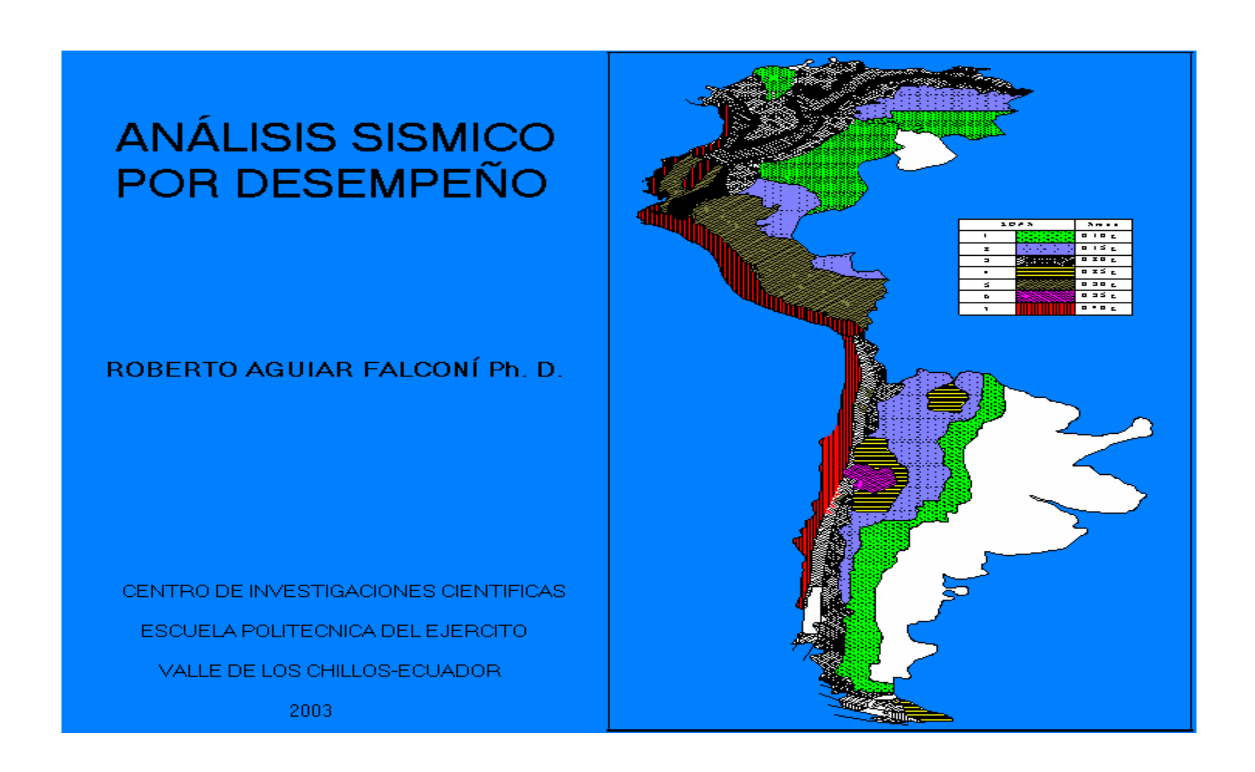
- **Capítulo 11**.- **Método del Espectro de Capacidad y Factores de Reducción de las Fuerzas Sísmicas. Subprogramas: MEC, MECLEE y MECLEEH.-** Introducción. Amortiguamiento Viscoso Efectivo. Sistema Equivalente. Cálculo de la Energía Disipada. Cálculo de la Energía absorbida por el sistema. Cálculo del amortiguamiento viscoso equivalente. Amortiguamiento viscoso efectivo. Método del Espectro de Capacidad. Procedimientos: A, B y C del ATC-40. Ejemplo de aplicación. Análisis Sísmico en Países de la CAF. Distorsiones de Piso. Factores de Reducción de: Wu y Hanson, Nassar y Krawinkler, Miranda, Ordaz y Pérez, Vidic, Fajfar y Fishinger, Chopra y Goel, Arroyo. Comentarios sobre los factores de reducción. Factores de reducción considerando diferentes modelos histeréticos. Críticas a los procedimientos del ATC-40. Determinación del punto de demanda en función de $R_{\mu,\xi}$. Subprograma MECLEE. Comparación de resultados con subprogramas MEC y MECLEE. Subprograma MECLEEH.

- **Capítulo 12**.- **Método del Espectro de Capacidad Aplicado a Diferentes Tipologías Estructurales y Materiales. Subprograma MECHAZLE y MECHAZUS.-** Introducción. Subprograma MECHAZLE. Subprograma MECHAZUS. Aplicaciones a estructuras de: Hormigón Armado, Acero y Mampostería no Reforzada, situadas en Países de la CAF.

- **Capítulo 13**.- **Evaluación del daño sísmico con curvas de fragilidad de HAZUS 99 y subprograma FRAGIL.-** Curvas de Fragilidad. Determinación del Daño Estructural. Daño esperado en edificios de hormigón armado tipo: C1L, C1M y C1H. Daño esperado en edificios de acero tipo: S1L, S1M y S1H. Daño esperado en estructuras de mampostería no reforzada tipo URML. Daño en elementos no estructurales. Daños no estructurales por distorsión de piso. Daños no estructurales: en edificaciones de Hormigón Armado y Acero. Daños no estructurales en elementos sensibles a aceleración. Descripción del daño no estructural. Muros de Separación. Paneles de Muros exteriores. Equipamiento eléctrico, mecánico, tuberías y otros. Estudios de Vulnerabilidad Sísmica, Uso e Subprograma FRAGIL. Recomendaciones.

302 p, Quito, junio de 2002.

❖ ANÁLISIS SÍSMICO POR DESEMPEÑO



- *R. Aguiar*
- *Derecho de Autor N. 018400*
- *ISBN 9978-43-192-6*

✧ **Capítulo 1**.- **Relación Momento Curvatura y VISION 2000.** Resumen, Introducción, Esquema de Cálculo, Método de las Dovelas, Forma general de un diagrama momento curvatura, Rótula plástica, Formulas aproximadas para: viga simplemente armada, vigas doblemente armadas, columnas. Aplicaciones de la relación momento curvatura, Ductilidad local por curvatura, Reserva de ductilidad por curvatura, Redistribución de momentos, Inercias Agrietadas, Índice de daño sísmico local. Sismos de análisis de acuerdo a VISION 2000. Comportamiento Esperado.

✧ **Capítulo 2**.- **Descripción numérica de la Técnica del Pushover y modelos de Plasticidad.** Resumen, Introducción, Matriz de Rigidez del elemento para el modelo de plasticidad de Giberson, Estructura de Análisis, Matriz de Rigidez de la estructura, Solución Matricial, Descripción del Proceso de Cálculo, Resumen del cálculo de Inercias y Rigidez del Elemento, Resumen de cálculo de estructura completa, Resultados de la curva de capacidad resistente. Matriz de rigidez orientada al uso del computador, Análisis sin nudo rígido, Análisis con nudo rígido, Ensamblaje de la matriz de rigidez, Condensación estática de la matriz de rigidez, Condensación mediante solución de ecuaciones, Condensación mediante eliminación de Gauss. Matriz de rigidez lateral, vigas axialmente rígidas, vigas y columnas axialmente rígidas. Determinación de la curva de capacidad resistente. Modelos de plasticidad extendida, Propiedades Dinámicas.

- **Capítulo 3**.- **Un nuevo modelo de plasticidad para el Análisis Estático no lineal.** Resumen, Introducción, Diagrama de Masas Elásticas, Matriz de Flexibilidad, Algoritmo de cálculo. Relaciones Momento Curvatura M-C. Longitud de Daño. Descripción de las estructuras con las cuales se analiza la bondad del modelo propuesto con relación a otros modelos de plasticidad extendida incluyendo el modelo del programa DRAIN. Curvas de capacidad sin considerar efecto $P-\Delta$. Curvas de capacidad considerando efecto $P-\Delta$. Modelo Bilineal. Análisis Estadístico. Otros modelos de plasticidad: Modelo de Rigidez Lineal, Modelo de Rigidez Constante, Conclusiones.

- **Capítulo 4**.- **Incorporación del efecto de corte en los diagramas Momento Curvatura.** Resumen, Introducción, Nuevo modelo para el hormigón confinado, Modelo del Acero, Ejemplo numérico de flexión. Relación corte ductilidad por rotación, Relación corte ductilidad para vigas rectangulares, Relación corte ductilidad para columnas rectangulares, Relación corte ductilidad para columnas circulares. Acoplamiento entre el efecto de corte y de flexión. Ejemplo numérico de flexión y corte, Reducción de la capacidad a flexión por efecto de corte, Incorporación del punto S en el diagrama MC, Ejemplo de una columna, Conclusiones.

- **Capítulo 5**.- **Capacidad sísmica espacial de las estructuras con un modelo de tres grados de libertad.** Resumen, Introducción, Análisis Plano, Modelo de Cálculo, Ejemplo Numérico, Programa Espacial. Centro de Resistencia. Estructuras con excentricidad de resistencia. Criterios para obtener el modelo bilineal: criterio de rigidez tangente horizontal, criterio de rigideces tangentes, critierio con iguales áreas, ajuste por mínimos cuadrados. Conclusiones.

- **Capítulo 6**.- **Capacidad resistente sísmica en estructuras antiguas.** Resumen, Introducción, Capacidad a Corte: relación corte ductilidad para vigas rectangulares, relación corte ductilidad para columnas rectangulares. Modelos de Plasticidad de Thom et al. Rigidez de corte: valores de corte máximo para rango elástico en vigas y columnas, rigidez equivalente. Estructura de Análisis. Curvas de capacidad sísmica. Conclusiones.

- **Capítulo 7**.- **Espectro de Capacidad para modelo espacial.** Resumen, Introducción, Ecuaciones de cálculo. Modelo de Análisis Espacial, Ejemplos desarrollados. Programa ESPACAP. Incertidumbre del modelo. Distorsión global y de piso. Espectro de Capacidad con límites de daño. Vibraciones Libres sin amortiguamiento, Valores Propios, Propiedades dinámicas, Modos de vibración. Algoritmo de $M^{1/2}$, Conclusiones.

- **Capítulo 8**.- **Espectros sísmicos de riesgo uniforme para verificar desempeño estructural en Países Latinoamericanos.** Resumen, Introducción, Zonificación sísmica y espectro elástico, Normativa de Venezuela, Normativa de Colombia, Código de Ecuador, Norma de Perú, Norma de Chile, Norma de Argentina. Análisis de estudios realizados en Venezuela, Análisis de estudios realizados en Colombia, Análisis de estudios realizados en Ecuador, Análisis de estudios realizados en Perú, Análisis de estudios realizados en Chile. Resumen de estudios realizados. Propuestas de formas espectrales. Espectros de Demanda. Peligrosidad Sísmica, Etapas de cálculo, Relación de recurrencia, Magnitud Máxima, Metodologías de evaluación. Conclusiones. Recomendaciones.

- **Capítulo 9**.- **Aplicación del método del espectro de capacidad. El factor de reducción de las fuerzas sísmicas y teoría de espectros.** Resumen, Introducción, Método del Espectro de Capacidad, Explicación del Método del Espectro de Capacidad, Factores de Reducción de: Wu y Hanson; Nassar y Krawinkler; Miranda; Ordaz y Pérez; Vidic, Fajfar y Fishinger; Arroyo. Comentarios sobre los factores de reducción. Factores de reducción considerando diferentes modelos histeréticos. Procedimiento de cálculo, Capacidad resistente para el caso plano, Modelo bilineal de la curva de capacidad resistente, capacidad resistente de estructura espacial, espectros de capacidad, cálculo del punto de demanda. Análisis en diferentes lugares de Sur América. Espectros Elásticos, Reseña Histórica, Espectros de Respuesta, Sistemas de un grado de libertad, Fracción del

amortiguamiento crítico, Importancia de las formas espectrales, Pseudo Espectros, Espectros de respuesta suavizados, Estimación de los movimientos del terreno, Influencia del suelo. Conclusiones.

- **Capítulo 10**.- **Método del Sistema Equivalente y Respuesta Lineal o no Lineal.** Resumen, Fuerzas laterales para Pushover: criterio del modo fundamental, criterio de los modos superiores, ejemplos de aplicación. Sistema equivalente de 1 gdl. Modelo de Rodríguez (1994), Modelo de Fajfar y Gaspersic (1996), Modelo de Esteva (1999), Modelo de Aguiar (2001), Modelo de Ayala (2001), Ejemplo de aplicación. Amortiguamiento viscoso equivalente, cálculo de la energía disipada, cálculo de la energía absorbida por el sistema, cálculo de amortiguamiento viscoso equivalente, amortiguamiento viscoso efectivo. Aplicación del Método. Método del Espectro de Capacidad. Respuesta en sistema de múltiples grados de libertad. Respuesta Lineal y no Lineal. Análisis lineal con β de Newmark, Procedimiento de cálculo para análisis lineal, Procedimiento de cálculo para análisis no lineal. Conclusiones.

- **Capítulo 11**.- **Método del sistema lineal de corte. Caso Plano y el Método de Jacobi.** Resumen, Antecedentes, Eje de corte, Rigidez de Piso, Método del Sistema equivalente de corte, Ejemplo de aplicación. Método de Jacobi: desarrollo del método, procedimiento de cálculo, cálculo de los valores propios, ejemplo de aplicación, ortogonalidad de los vectores propios. Conclusiones.

- **Capítulo 12**.- **Método de Superposición Modal.** Resumen, Descripción general del método, Vectores propios normalizados, Caso de análisis sísmico. Organización del Método de Superposición Modal. Método de superposición Modal con Espectro. Respuestas Modales Máximas: Desplazamientos modales máximos, Fuerzas equivalentes y Cortantes, Peso efectivo Modal. Criterios de combinación modal: criterio del máximo valor probable, criterio de la doble suma, criterio de la combinación cuadrática completa, criterio AGH. Aplicación utilizando el CEC-2000. Diseño de vigas y columnas, Capacidad sísmica resistente. Cálculo de R_w y desempeño sísmico. Análisis Espacial. Matriz de rigidez en coordenadas de piso. Matriz de Masas, Factores de Participación Modal, Procedimiento de cálculo, Torsión accidental, Simultaneidad de Acciones Sísmicas, Conclusiones.

- **Capítulo 13**.- **Pérdidas Económicas.** Resumen, Introducción, Modelo de Hazus, Ejemplo de aplicación en un edificio de 6 pisos. Índice de Desempeño, Nuevo modelo de pérdidas, Ejemplo de aplicación al caso de una residencia de dos pisos la misma que es analizada con tres estructuraciones una de ellas en base a vigas banda, otra con vigas descolgadas y otra con vigas descolgadas en el perímetro y banda en los ejes centrales, análisis ante varios sismos en términos estructurales y económicos.

343 p, Quito, agosto de 2003.

Dirección:
Centro de Investigaciones Científicas (CEINCI)
Escuela Politécnica del Ejército
Av. El Progreso s/n
Valle de los Chillos, Ecuador
Telfax: 593-2-2338421

E. mail: raguiar@espe.edu.ec
Web : http://www.espe.edu.ec

CAPITULO 1

COORDENADAS GENERALIZADAS Y GRADOS DE LIBERTAD

RESUMEN

Se presentan algunas definiciones, las más elementales, para estructuras que trabajan en el rango elástico, que es lo que abarca este libro. El objetivo principal es que el lector, que ya ha tomado por lo menos un curso básico de estructuras, se familiarice con la nomenclatura que se va a seguir.

Se definen: los grados de libertad de una estructura desde el punto de vista estático y dinámico. Posteriormente se empieza a trabajar con miembros: totalmente flexibles, axialmente rígidos, transversalmente rígidos y totalmente rígidos.

1.1 DEFINICIONES ESTRUCTURALES

1.1.1 Vínculos

Se define por vínculo a toda condición geométrica que limita o restringe la movilidad de un cuerpo. De acuerdo a su ubicación en la estructura, los vínculos pueden ser externos e internos. Son externos aquellos que vinculan el cuerpo con la tierra, e internos aquellos que vinculan a los cuerpos entre sí.

De acuerdo al tipo de limitación a la movilidad del cuerpo a que están unidos, los vínculos pueden ser de primera clase (rodillo o articulación móvil), de segunda clase (articulación fija y empotramiento móvil), o de tercera clase (empotramiento fijo).

El rodillo o articulación móvil permite la rotación del cuerpo al que está unido y el desplazamiento de ese mismo punto, en la dirección del movimiento del rodillo, la representación de este tipo de vínculo, es la indicada en la figura 1.1

La articulación fija, llamada simplemente articulación, posibilita únicamente la rotación del cuerpo al que esta unido, alrededor del punto de unión. La representación gráfica de este tipo de vínculo es la que se muestra en la figura 1.2

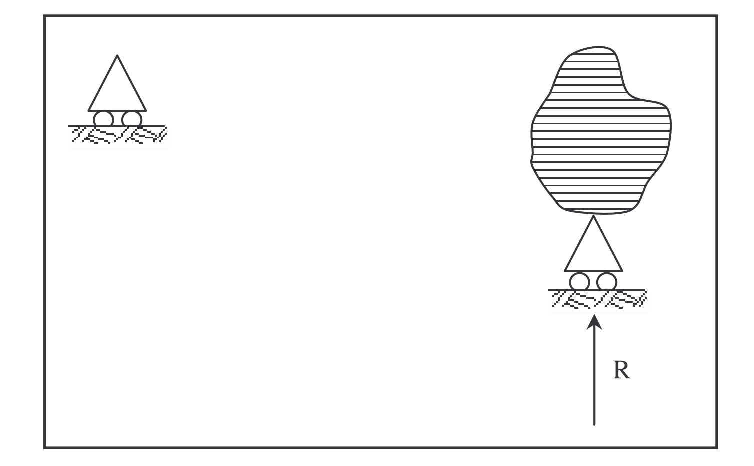


Figura 1.1 Rodillo o articulación móvil.

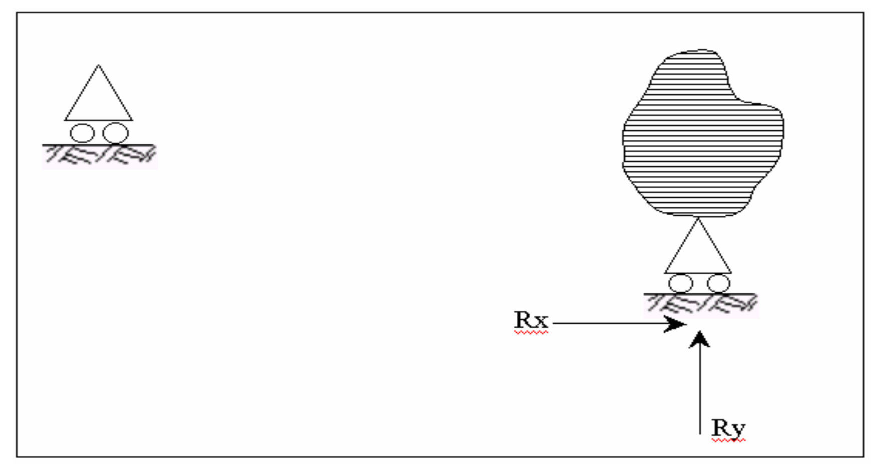


Figura 1.2 Articulación fija.

El empotramiento móvil permite solamente el deslizamiento lineal de su punto de unión con el cuerpo en la dirección de su movimiento. La representación de este tipo de vínculo es la que se presenta en la figura 1.3

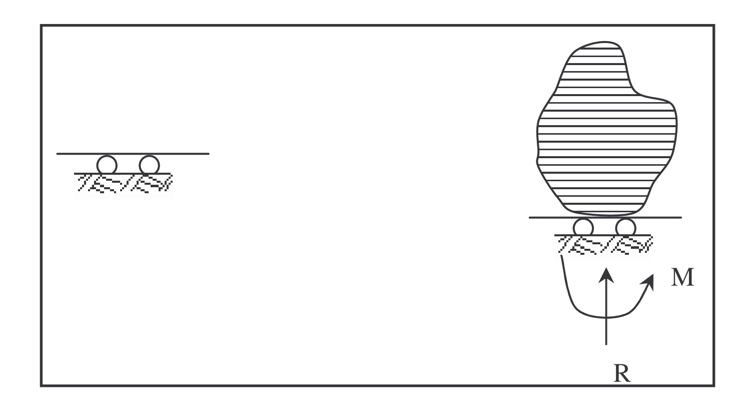


Figura 1.3 Empotramiento móvil.

El empotramiento fijo o simplemente empotramiento, no permite ningún tipo de desplazamiento ni con el cuerpo ni con la tierra. La representación de este tipo de vínculo, que es lo más común en las estructuras planas, se representa en la figura 1.4.

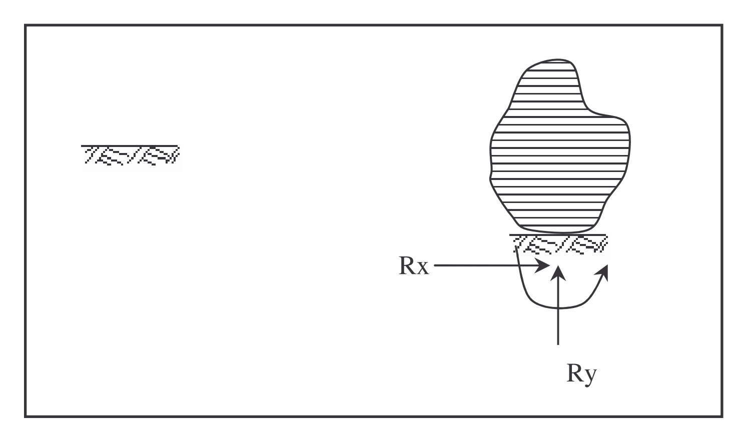


Figura 1.4 Empotramiento fijo

El calculista estructural en su modelo matemático, de acuerdo a la forma como va a construir es el que decide que tipo de vínculo tiene.

A los vínculos interiores se denominan articulaciones y se los representa con un círculo de la siguiente manera.

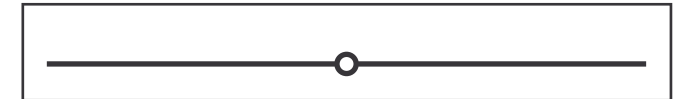


Figura 1.5 Articulación interior.

El momento es nulo en la articulación, la barra a la izquierda de la articulación tendrá un giro el mismo que es diferente de la barra que esta a la derecha de la articulación. Este tipo de vínculo se usa con cierta frecuencia en el diseño de puentes, en los elementos horizontales (superestructura). También se lo utiliza en el análisis sísmico de estructuras para representar las rótulas plásticas que no es más que un modelo matemático que indica que una sección ya no puede resistir más momento y empieza a rotar, empieza a disipar energía.

1.1.2 Elementos

En los cursos de estructura se estudia solamente elementos lineales, aquí se recordará que son elementos o miembros lineales y posteriormente se hablará de otros elementos que dependerán para determinado análisis estructural.

Un elemento lineal es generado por un área plana, cuyo centro de gravedad describe una curva, en general alabeada, llamada directriz o eje, manteniendo su plano perpendicular a la curva. El área móvil puede cambiar de magnitud y forma, siempre que ello se realice de modo continuo.

Las dimensiones del área transversal deben ser pequeñas en comparación con la longitud de la directriz. En general, los elementos se representan por su eje o directriz. En las figuras 1.6.1, 1.6.2, 1.6.3 y 1.6.4 se indican varios de los elementos mencionados.

1.1.3 Juntas

Se denominan juntas o nudos a los puntos de concurso de varios elementos. Es decir al medio de conexión de dos o más elementos. Normalmente se representa un nudo con un punto el mismo que corresponde a la intersección de los elementos que concurren a él.

En este libro se dibujará una pequeña longitud de los elementos que llegan al nudo como lo muestra la estructura de la figura 1.7.1.

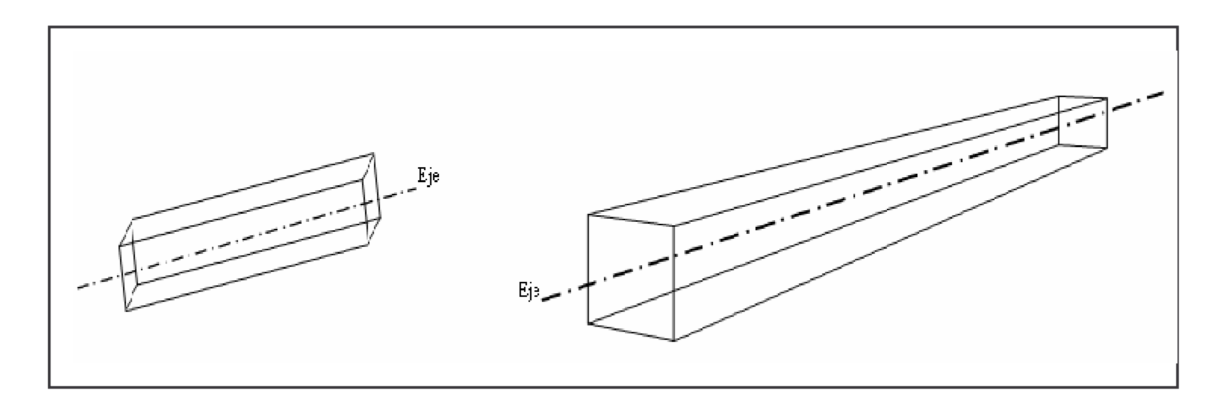


Figura 1.6.1 Elemento recto de sección constante.

Figura 1.6.2 Elemento recto de sección variable

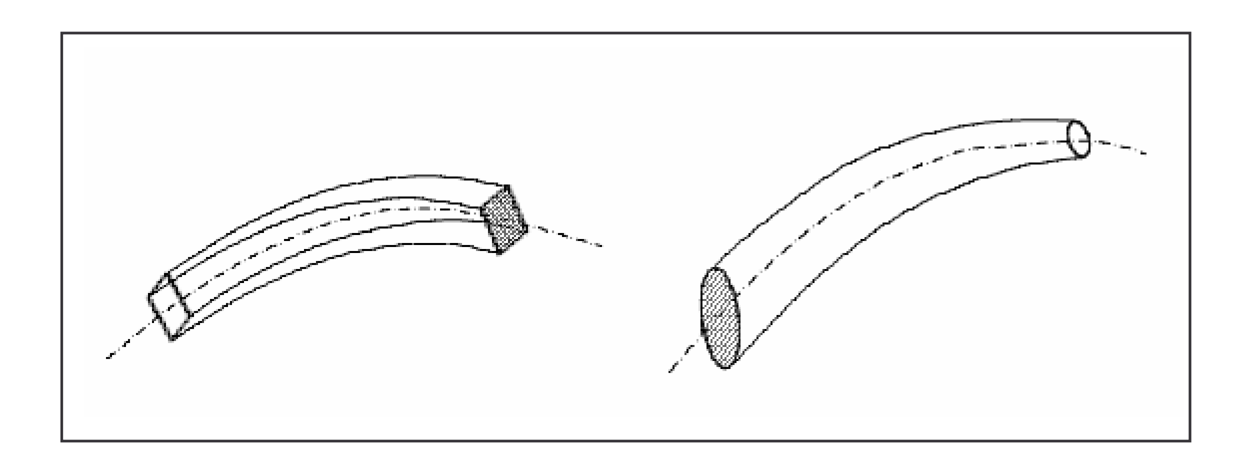


Figura 1.6.3 Elemento curvo de sección constante.

Figura 1.6.4 Elemento curvo de sección variable

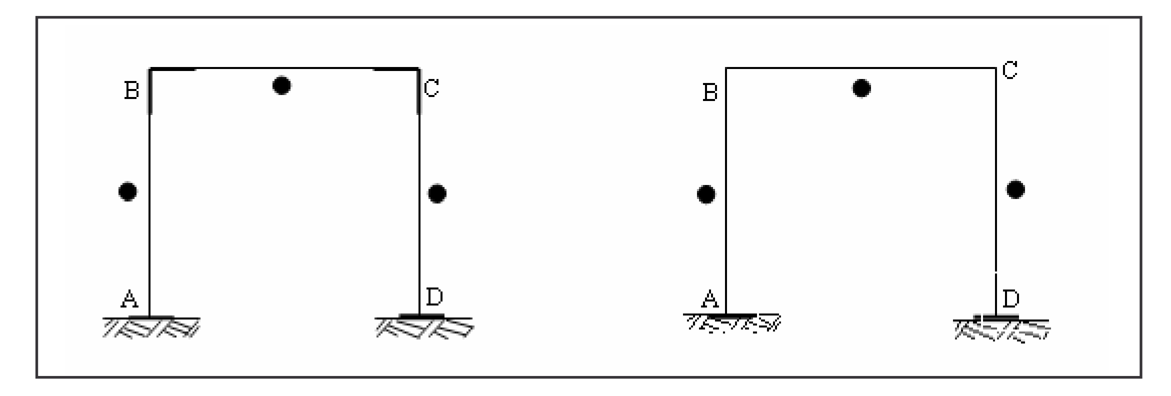


Figura 1.7.1 Pórtico plano compuesto por 4 juntas y 3 miembros ●

Figura 1.7.2 Representación más común de las juntas o nudos

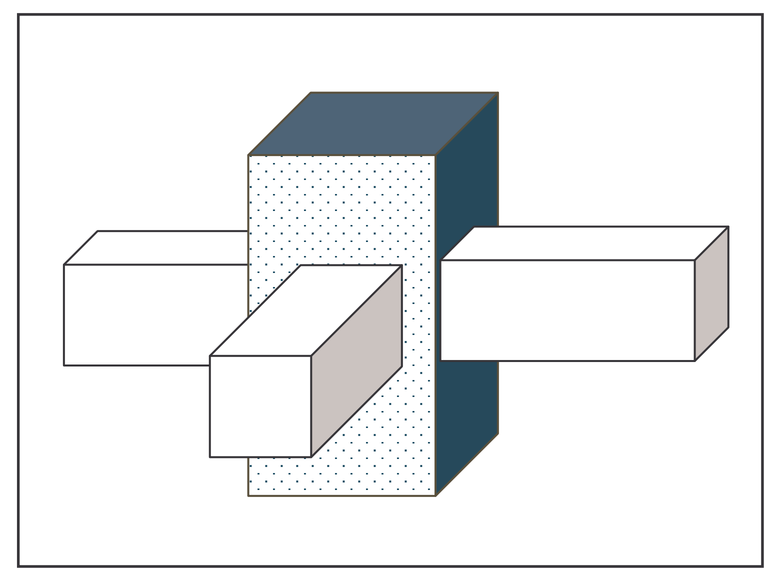


Figura 1.8 Junta típica

Es importante notar, que si bien a una junta se la representa como un punto, en la realidad esto no es así, ya que es un elemento físico que tiene dimensiones como lo señala la figura 1.8, que se desplaza y gira. Por lo tanto habrá que tener presente este hecho para el diseño en hormigón. Los últimos códigos del A.C.I., cada vez dan mayor importancia al diseño del nudo, es más en estructuras aporticadas construidas en zonas sísmicas se diseña de tal forma que el nudo sea fuerte y la viga débil.

Una de las fallas más frecuentes durante los sismos es la falla de nudo, especialmente en los exteriores por falta de anclaje del hierro longitudinal. También han fallado debido a que han tenido una baja capacidad al cortante horizontal. Todo esto se indica con el objeto de que deben ser diseñados.

Retomando el tema se puede manifestar que hasta ahora se ha considerado únicamente elementos rectos pero podemos tener otra clase de miembros; todo dependerá de cómo se ha definido la junta.

En consecuencia el número de elementos de una estructura es un número arbitrario, dependiente de la elección considerada.

Por lo tanto un elemento no tiene porqué tener únicamente dos juntas. La ventaja de elegir estos elementos de geometría diferente a la que estamos acostumbrados se tiene cuando se estudia el tema de las subestructuras. En las figuras 1.9.1, 1.9.2 y 1.9.3, se muestran varios elementos especiales.

Cuando se realiza el análisis sísmico espacial de edificios considerando tres grados de libertad por planta se considera que cada uno de los pórticos planos es un elemento que están unidos entre sí por una losa rígida.

1.1.4 Estructuras

Una estructura es una cadena elástica estable, compuesta por un número finito de elementos unidos entre si mediante un número finito de juntas, uno de cuyos números es arbitrario.

Nótese que se han utilizado en la definición las palabras: “**cadena**” por la unión que tienen los diferentes elementos; “**elástica**” porque se consideran pequeñas deformaciones del orden de infinitésimos y “**estable**” en tal virtud no tiene sentido hablar de estructuras inestables. Es

fundamental destacar que al decir "elástica" el comportamiento es de tipo lineal, todo el texto está marcado en este análisis.

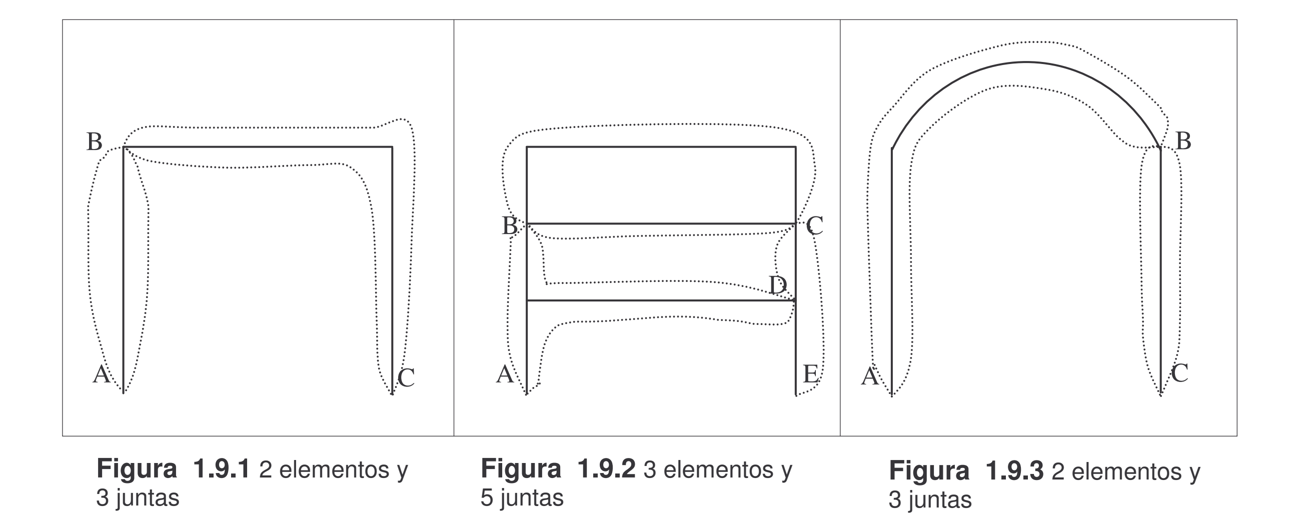


Figura 1.9.1 2 elementos y 3 juntas

Figura 1.9.2 3 elementos y 5 juntas

Figura 1.9.3 2 elementos y 3 juntas

1.2 DEFINICIONES DE MECÁNICA

1.2.1 Coordenadas generalizadas

Para determinar la configuración de un sistema se emplean coordenadas, las cuales pueden ser dependientes o independientes. Cuando las coordenadas son independientes, reciben el nombre de coordenadas generalizadas.

Por ejemplo, si el sistema masa-resorte mostrado en la figura 1.10.1, a partir de la posición de equilibrio estático se le suministra un desplazamiento δ_o, como se indica en la figura 1.10.2 y se permite que el sistema oscile, figura 1.10.3, se observa que para definir la posición de la masa, en cualquier instante se requiere una coordenada vertical Y(t); la cual se mide a partir de la Posición de Equilibrio Estático, P.E.E. En la P.E.E. la sumatoria de fuerzas en sentido vertical es igual a cero en cambio en la posición genérica del movimiento indicada en 1.10.3 la sumatoria de fuerzas es igual a masa por la aceleración.

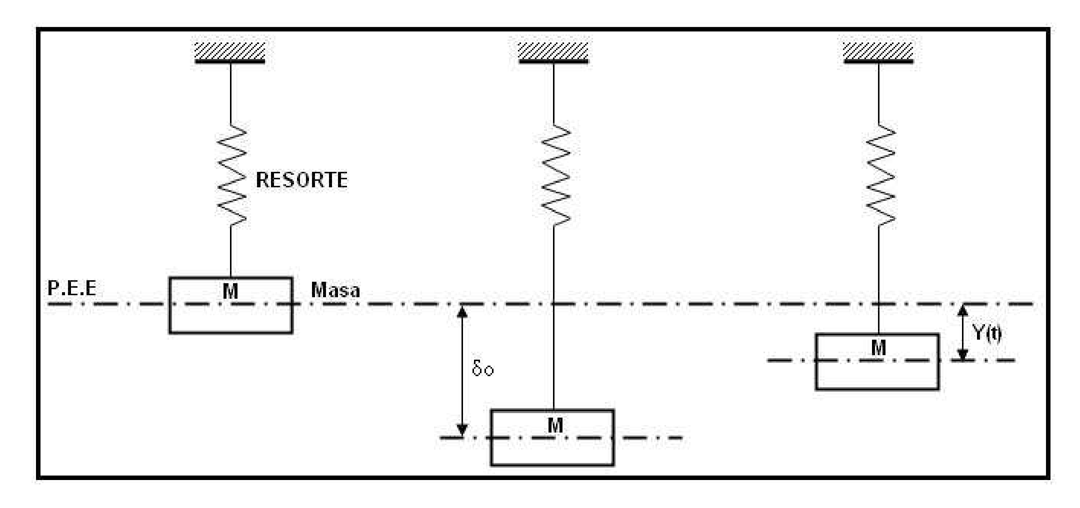


Figura 1.10.1 **Figura 1.10.2** **Figura 1.10.3**

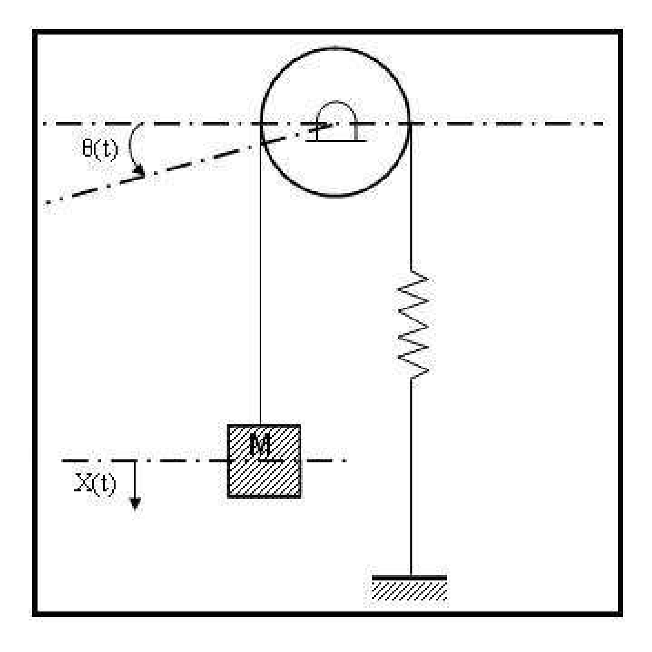


Figura 1.11 Sistema masa-resorte-polea

Por otra parte, el sistema masa-resorte-polea de la figura 1.11 tiene una sola coordenada generalizada, puesto que tanto $X(t)$ como $\theta(t)$ son dependientes, pueden usarse cualquiera de ellas para determinar las posiciones relativas de la masa, pero no las dos, en los ejemplos que se están indicando la variable t corresponde al tiempo. Por lo tanto, se está definiendo la posición de la masa en un tiempo genérico t del movimiento.

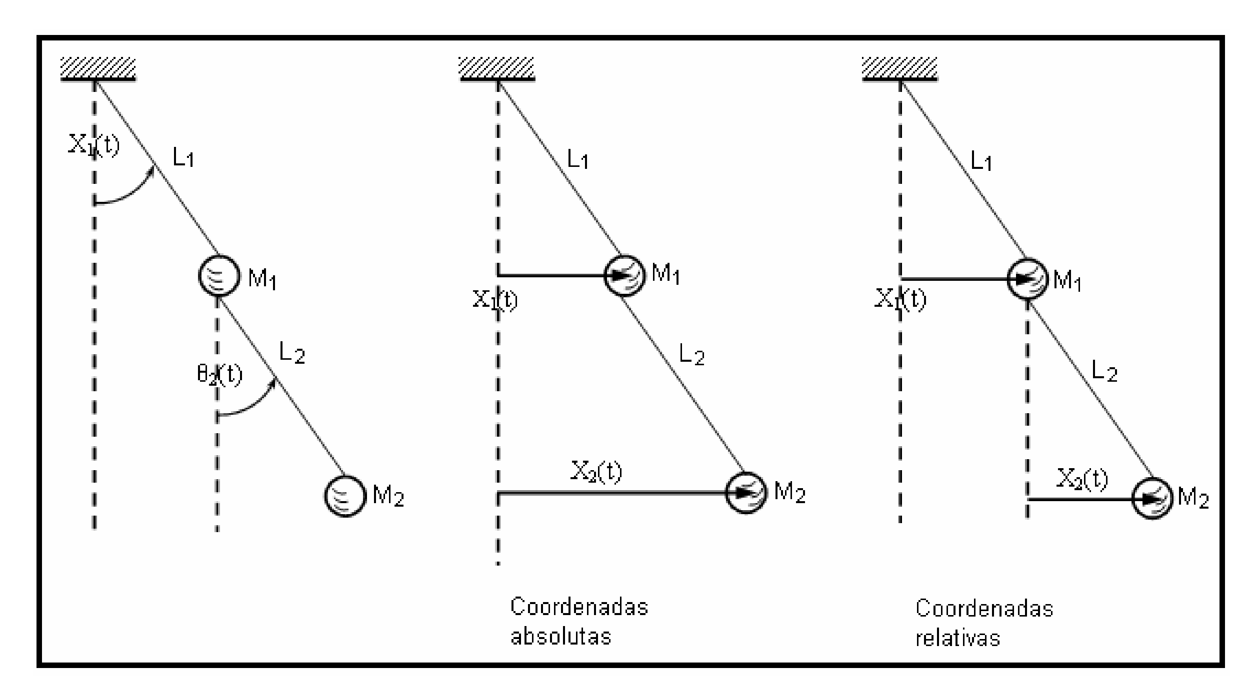


Figura 1.12.1 Sistema de 2 grados de libertad. **Figura 1.12.2** Coordenadas absolutas o relativas.

En la figura 1.12.1 se muestra un péndulo doble de longitudes L_1 y L_2 y masas M_1 y M_2. En este caso para definir la configuración del sistema se requieren dos coordenadas que pueden ser: los ángulos de rotación, figura 1.12.1, o los desplazamientos horizontales ya sean estos absolutos o relativos como se indica en la figura 1.12.2.

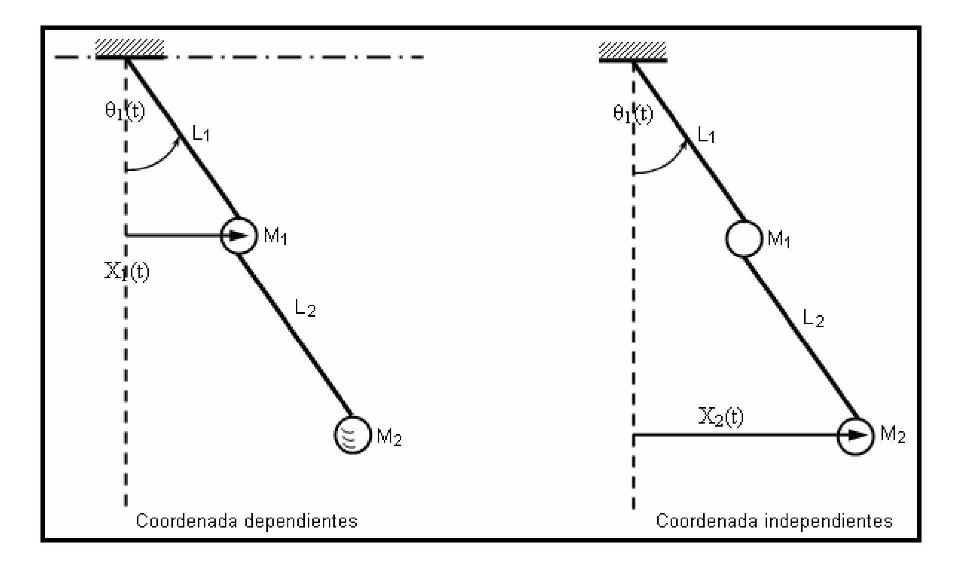


Figura 1.12.3 Coordenadas dependientes **Figura 1.12.4** Coordenadas independientes

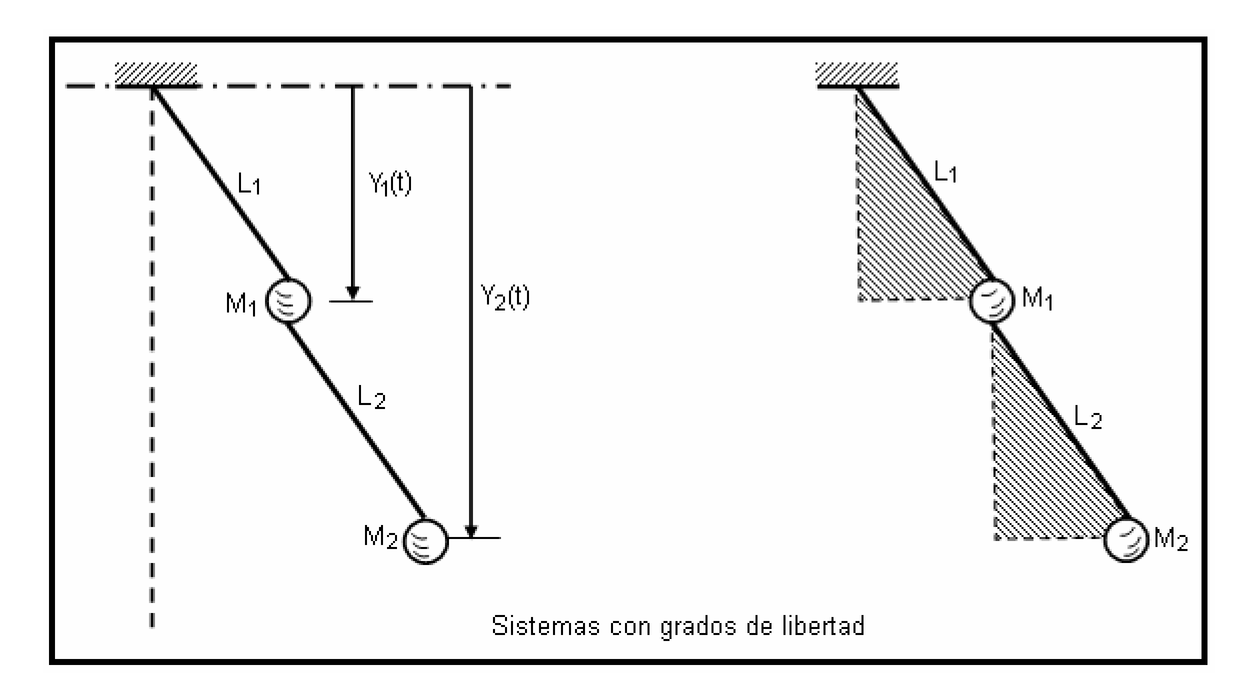


Figura 1.12.5 Coordenadas Verticales **Figura 1.12.6** Otra posibilidad de definir los Grados de libertad.

No se puede seleccionar las coordenadas de la figura 1.12.3 puesto que las dos son dependientes ya que $X_1(t) = L_1 * \theta_1(t)$. Se puede trabajar con los sistemas de coordenadas de las figuras 1.12.4, 1.12.5 o 1.12.6. Evidentemente que al trabajar con éste último sistema de coordenadas la solución del problema es más difícil. Lo importante es notar que el sistema tiene solo dos grados de libertad, ni más ni menos y que además las coordenadas que se seleccionen deben ser independientes.

1.2.2 Números de grados de libertad

Se denomina número de grados de libertad al …*número de coordenadas generalizadas que hay que emplear para definir la configuración del sistema*… En este libro se entiende como sistema a una estructura.

Cuando el número de grados de libertad de un sistema es igual al número de coordenadas generalizadas se dice que este sistema es HOLONOMO.

1.2.3 Sistemas deformables

En los sistemas analizados anteriormente se ha considerado que la masa es puntual, que la polea es rígida, las cuerdas inextensibles y el resorte indeformable. Hipótesis que se acostumbra realizar para simplificar la solución de los problemas.

Ahora, se va a considerar un sistema continuo deformable. La figura 1.13 presenta una viga en voladizo cuya masa se encuentra uniformemente distribuida; en ella observamos que para cada punto P, dentro del intervalo $0 \leq X \leq L$ es necesario definir tres parámetros que son: u que es la componente de desplazamiento horizontal del punto P, v que es la componente de desplazamiento vertical del punto P y θ que es la rotación del punto P.

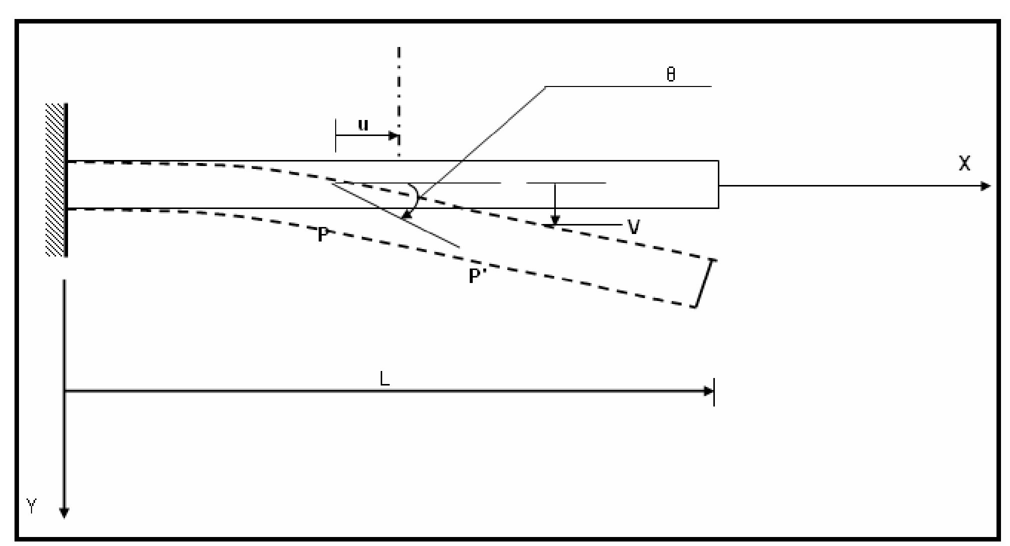


Figura 1.13 Sistema continuo con infinito número de grados de libertad.

Los valores de u , v, θ irán cambiando punto a punto a lo largo de toda la longitud de la viga, es decir que al considerar únicamente la directriz o eje de la viga, para cada punto P hay que dar dos desplazamientos y una rotación para determinar la configuración del sistema deformado. Por lo tanto de acuerdo a la definición del número de grados de libertad, podemos indicar que este sistema posee infinito número de grados de libertad.

Los únicos que tienen un número finito de grados de libertad son los compuestos por partículas rígidas. Los sistemas deformables poseen infinito número de grados de libertad y para resolverlos se tiene que plantear la ecuación diferencial que gobierna el problema y resolver ésta ecuación en todo el dominio.

1.3 GRADOS DE LIBERTAD EN UNA ESTRUCTURA

1.3.1 Clases de estructuras

Con fines didácticos se clasifican a las estructuras en este libro en: pórticos planos, armaduras planas, estructuras espaciales, armaduras espaciales y parrillas o mallas espaciales. Se puede extender la clasificación considerando por ejemplo vigas de cimentación u otro tipo de estructuras. Lo importante es indicar que éste libro está dedicado al estudio de Pórticos Planos y

Armaduras Planas pero los conceptos que se van a dar son generales y se aplican a cualquier tipo de estructura. Por ejemplo la forma como se realiza el ensamblaje directo para encontrar la matriz de rigidez en Pórticos Planos es la misma que para Estructuras Espaciales. Claro está que para cada caso se deben definir la respectiva matriz de rigidez del elemento y los correspondientes grados de libertad.

1.3.2 Pórticos planos con elementos flexibles

Se inicia el estudio calculando el número de grados de libertad de un pórtico plano compuesto por elementos lineales que son totalmente flexibles, que no tienen restricción para deformarse a los cuales se les ha identificado con las letra A_o, I_o. La configuración del sistema vendrá dada por la posición de las juntas. Por consiguiente, la definición del número de grados de libertad no es la general enunciada en mecánica, sino una particular limitada a describir la posición de las juntas. **En consecuencia, el número de grados de libertad es el mínimo número de coordenadas que es preciso determinar para definir la posición de las juntas o nudos.**

Para obtener el número de grados de libertad de una estructura primero se debe dibujar una deformada lo más general posible. Por ejemplo, para el pórtico plano de la figura 1.14.1, primero se identifica la posición inicial de los nudos con letras. Ahora por efecto de **cualquier sistema de cargas** presentará una deformada como la que se indica en la figura 1.14.2, en la cual a la posición final del nudo se los ha identificado con la misma letra pero con un índice. Nótese en esta deformada que el ángulo del nudo B se mantiene de la misma dimensión, es decir la rotación q_3 en el nudo B de la columna AB es igual a la rotación q_3 de la viga BC; lo propio sucede en el nudo C. Se considera que la junta o nudo se desplaza y gira en el plano.

En resumen para definir la posición de las juntas A, B, C y D del pórtico plano de la figura 1.14.1 se requieren seis coordenadas generalizadas que están indicadas en la figura 1.14.2 a las cuales se las ha identificado con la letra q. El significado de cada variable se indica a continuación.

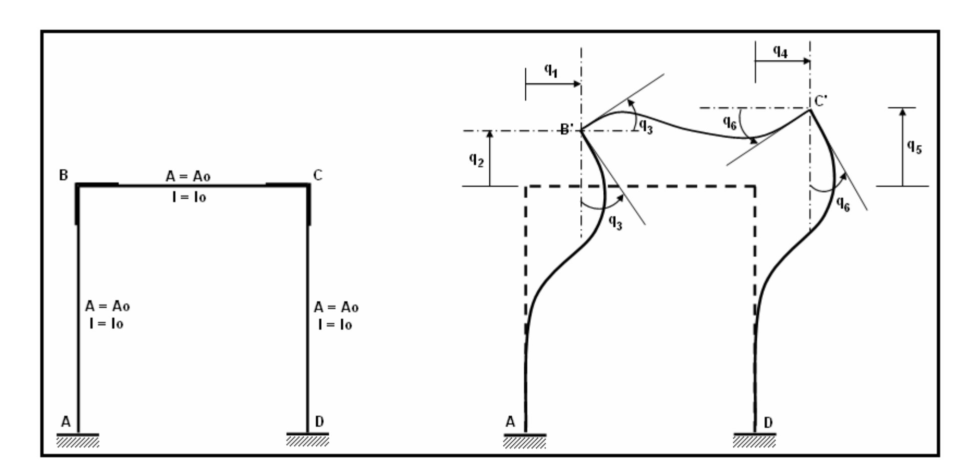


Figura 1.14.1 Pórtico plano con elementos totalmente flexibles. **Figura 1.14.2** Deformada general

- q_1 Componente de desplazamiento horizontal de la junta B.
- q_2 Componente de desplazamiento vertical de la junta B.
- q_3 Rotación de la junta B.
- q_4 Componente de desplazamiento horizontal de la junta C.
- q_5 Componente de desplazamiento vertical de la junta C.
- q_6 Rotación de la junta C.

Por lo tanto la descripción estructural está limitada en el presente capítulo, a definir la posición de las juntas.

Para calcular el número de grados de libertad de un pórtico plano **cuyos miembros son totalmente flexibles,** se puede utilizar la siguiente fórmula.

$$NGL = 3\,(NDJ) - (NDJ)_E * V \qquad (1.1)$$

donde NGL es el número de grados de libertad de la estructura, NDJ es el número de juntas totales, $(NDJ)_E$ es el número de juntas externas, V es igual a 1 si el vínculo es un rodillo, V es igual a 2 si es una articulación y V es igual a 3 si se trata de un empotramiento.

Para el pórtico plano de la figura 1.14.1, se tiene:

$$NGL = 3\,(4) - (2)\,3 = 12 - 6 = 6$$

De acuerdo con esta definición el pórtico plano de la figura 1.15, constituido por dos miembros y tres juntas, tendría tres grados de libertad, pero esto no quiere decir que su solución sea más sencilla que en el caso de la otra elección con más miembros como en la figura 1.14.1.

En consecuencia el número de grados de libertad no es un parámetro del grado de complicación para la solución de una estructura, si bien un marco plano puede calcularse con un número alto de grados de libertad esto implicará mayor cantidad de memoria de computador pero la solución es sencilla. Al definir este marco plano con miembros especiales (subestructuras) se tendrá un menor número de grados de libertad y por ende menor cantidad de memoria pero la solución es más complicada.

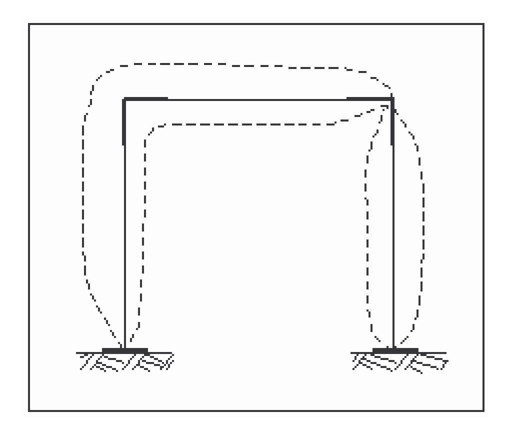


Figura 1.15 Estructura especial constituida por dos miembros

1.3.3 Pórtico plano con elementos axialmente rígidos

Se define como un miembro axialmente rígido o longitudinalmente rígido a aquel que no cambia de longitud luego de que se ha aplicado un sistema de cargas. Se representa a los miembros axialmente rígidos de la siguiente manera: $A = \infty$.

Como ejemplo, se analiza el pórtico de la figura 1.16.1, cuyas columnas son totalmente flexibles y cuya viga es axialmente rígida. Por efecto de un sistema cualquiera de cargas, este pórtico se va a deformar como se indica en la figura 1.16.2.

Nótese que si el nudo B se desplaza horizontalmente q_1, el nudo C también tiene que desplazarse horizontalmente q_1, puesto que la viga BC no va a cambiar su longitud por ser axialmente rígida. En consecuencia el pórtico de la figura 1.16.1, tiene 5 grados de libertad.

En miembros longitudinalmente rígidos es conveniente que al dibujar su deformada, se trace perpendiculares al miembro y se indique la Posición Inicial del nudo **P.I.** y la Posición Final del nudo **P.F.** como se indica en la figura 1.16.2. En este caso, la ecuación que define el número de grados de libertad es:

$$NGL = 3\,(NDJ) - \left(NDJ\right)_E * V - 1 * A \qquad (1.2)$$

siendo A el número de elementos que son axialmente rígidos. Para el pórtico de la figura 1.16.1, al aplicar la ecuación 2 se tiene:

$$NGL = 3\,(4) - 2\,(3) - 1\,(1) = 12 - 6 - 1 = 5$$

$$NGL = 5$$

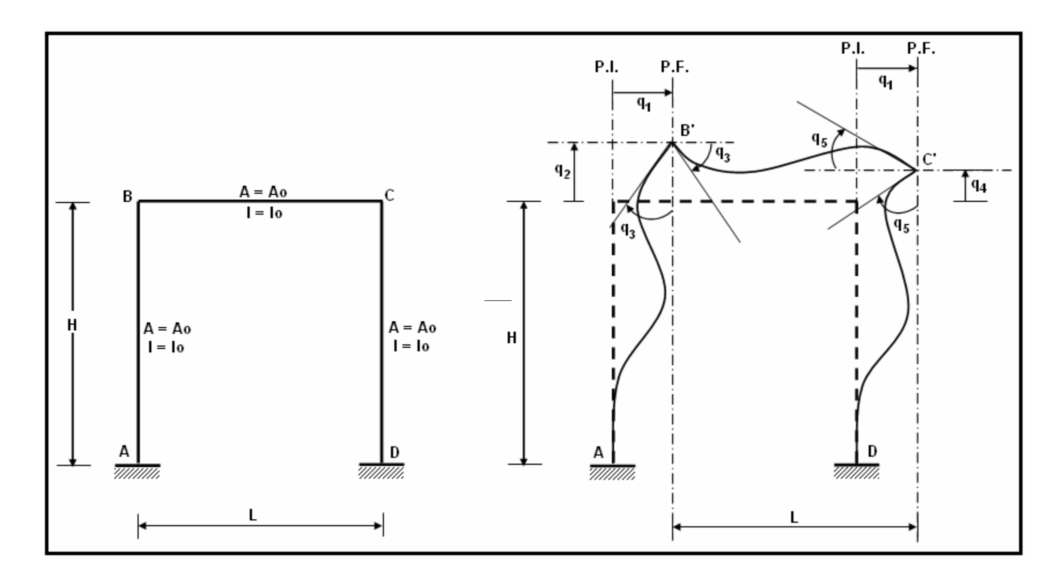


Figura 1.16.1 Pórtico con viga axialmente rígida **Figura 1.16.2** Deformada general

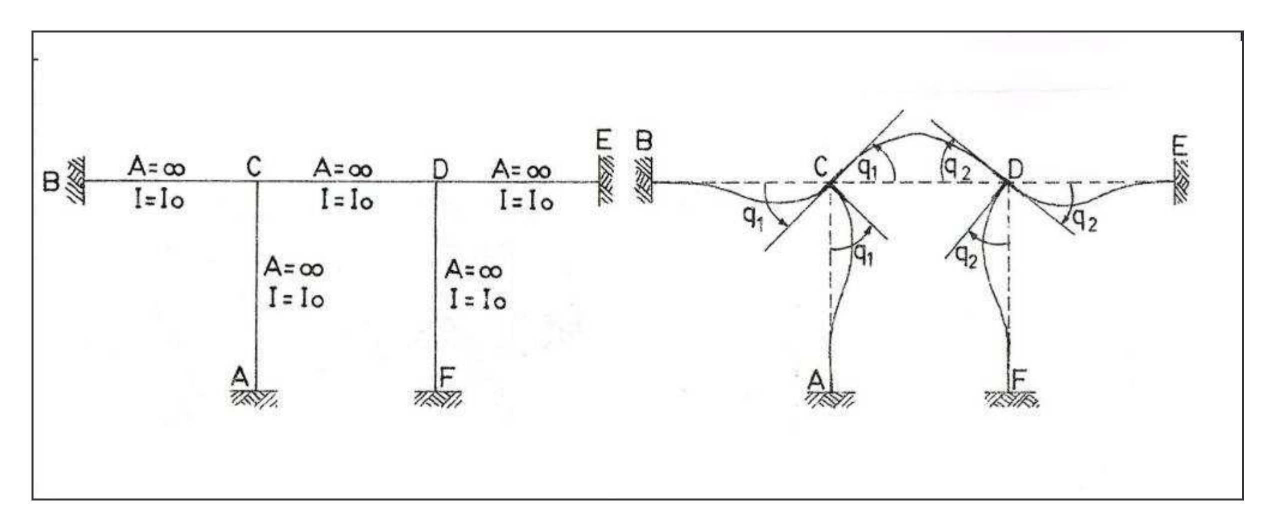


Figura 1.17.1 Marco plano con elementos axialmente rígidos **Figura 1.17.2** Marcos de libertad y deformada general

La ecuación (1.2), al igual que todas las ecuaciones que se indican en este capítulo para definir los grados de libertad de marcos planos compuesta por elementos axial o transversalmente rígidos son referenciales. Lo mejor es dibujar una deformada general y en ella observar los grados de libertad teniendo presente lo enunciado anteriormente. Para ilustrar lo expuesto fijemos la atención en la estructura de la figura 1.17.1, al aplicar la ecuación (1.2) se tiene que el marco plano tiene un grado

de libertad y esto es falso ya que el sistema tiene dos grados de libertad como lo ilustra la figura 1.17.2. De tal manera que las ecuaciones deben considerarse como referenciales.

El objetivo de la deformada general es ayudar a identificar los grados de libertad no interesa por ahora que las rotaciones se dibujen en forma horaria o antihorario.

1.3.4 Pórtico plano con elementos transversalmente rígidos

Se define como un elemento transversalmente rígido a aquel que no trabaja a flexión pero puede alargarse o acortarse, es decir que un miembro transversalmente rígido se deforma axialmente pero no transversalmente. Se representa a este tipo de miembro de la siguiente manera: $I = \infty$.

El pórtico de la figura 1.18.1, tiene las columnas totalmente flexibles pero la viga es transversalmente rígida y axialmente flexible. En la figura 1.18.2, se representa una deformada lo más general posible.

Por ser transversalmente rígido el elemento BC, se tiene que la rotación q_3 en el nudo B es igual a la rotación en el nudo C. Nótese que no se ha colocado como coordenada generalizada el desplazamiento vertical del nudo C, debido a que este desplazamiento es dependiente de q_1, q_2, q_3, y q_4. Es decir no es una coordenada generalizada. Se puede demostrar que este desplazamiento vertical del nudo C es igual a:

$$q_2 + q_3(L + q_4 - q_1)$$

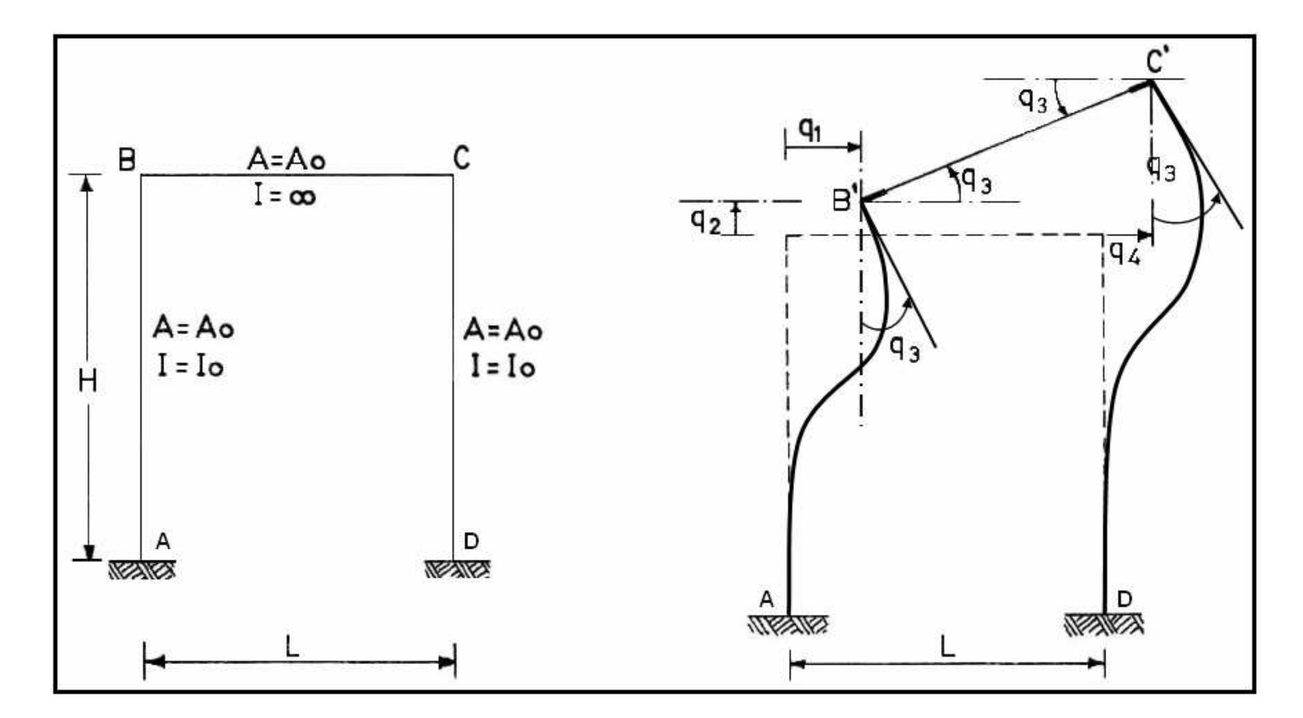


Figura 1.18.1 Pórtico con viga transversalmente rígida **Figura 1.18.2** Deformada general

Por lo tanto el pórtico de la figura 1.18.1, tiene 4 grados de libertad. En este caso, la ecuación que define el número de grados de libertad es:

$$NGL = 3\,(NDJ) - (NDJ)_E * V - 2 * T \qquad (1.3)$$

donde T es el número de elementos que son transversalmente rígidos. Para el pórtico de la figura 1.18.1, al aplicar la ecuación 3 se tiene:

$$NGL = 3\,(4) - 2\,(3) - 2\,(1) = 12 - 6 - 2 = 4$$

Para un pórtico plano con elementos axialmente rígidos y transversalmente rígidos, el número de grados de libertad, viene definido por la ecuación (1.4) la misma que se constituye en una fórmula general para marcos planos.

$$NGL = 3\,(NDJ) - (NDJ)_E * V - 1 * A - 2 * T \qquad (1.4)$$

1.3. 5 Pórtico plano con elementos totalmente rígidos

Se define como un elemento totalmente rígido a aquel que es longitudinal y transversalmente rígido. Es decir su representación es: $A = \infty$ e $I = \infty$.

El pórtico de la figura 1.19.1, tiene las columnas totalmente flexibles, pero su viga es completamente rígida. En la figura 1.19.2, se dibuja la deformada lo más general posible.

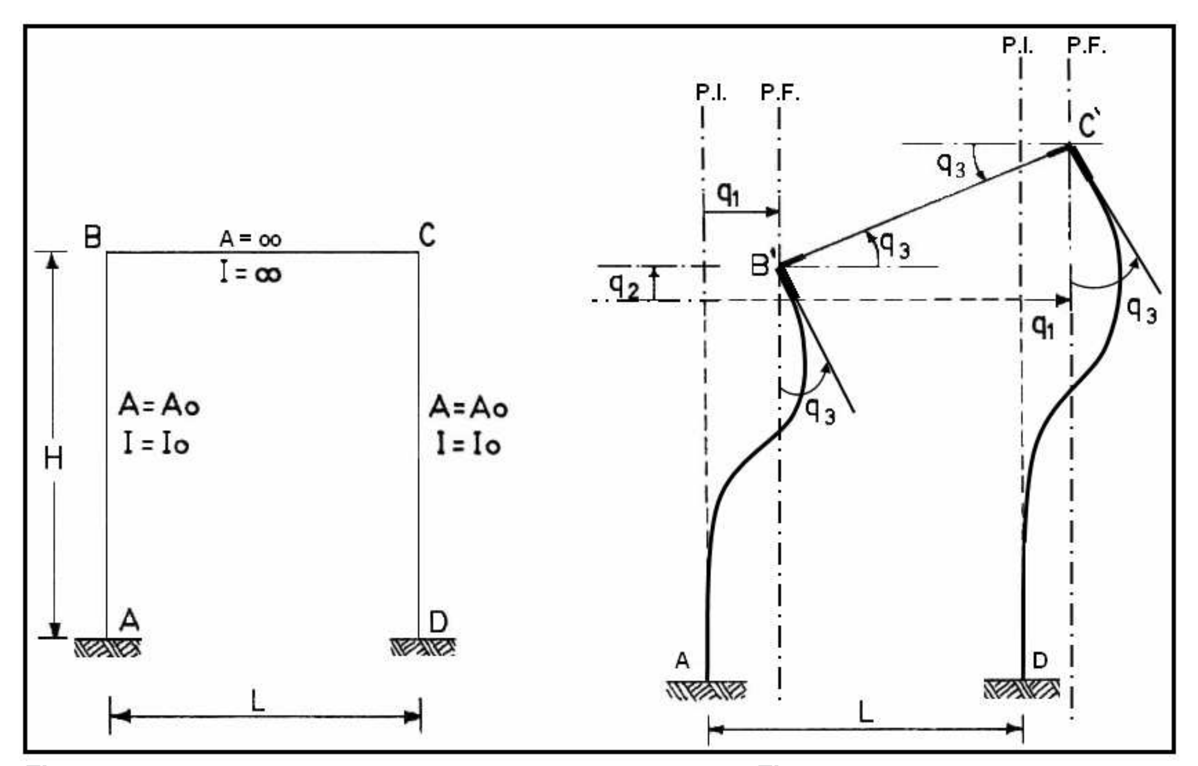


Figura 1.19.1 Pórtico con viga totalmente rígida **Figura 1.19.2** Deformada general

En el análisis sísmico de pórticos planos se acostumbra considerar que todas las vigas de un piso son axialmente rígidas de tal manera que todos los nudos se desplazan horizontalmente la misma cantidad. También se considera que la losa de entrepiso es totalmente rígida, en el Análisis Sísmico en tres dimensiones.

En el análisis de armaduras planas en cambio se considera que sus elementos son transversalmente rígidos. Estos tres ejemplos que se han indicado tienen como objetivo mostrar la necesidad de aprender a trabajar con elementos $A = \infty$ y/o $I = \infty$.

1.4 EJEMPLOS DE APLICACIÓN

- **EJEMPLO 1**

En el sistema mostrado en la figura 1.20.1, se pide:

a) Calcular el número de grados de libertad.
b) Dibujar una deformada lo mas general posible.

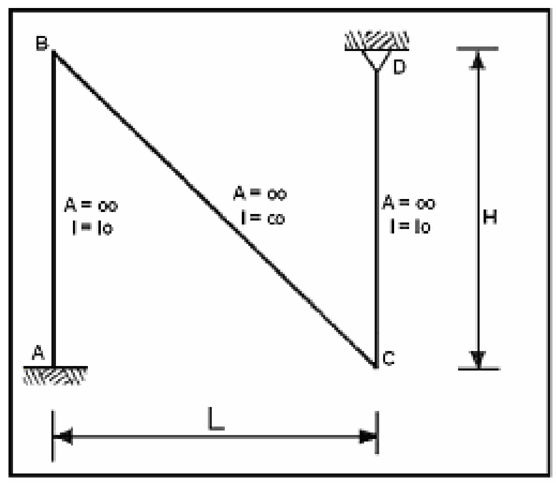


Figura 1.20.1 Estructura de análisis del Ejemplo 1

- **SOLUCION**

$$NGL = 3\,(NDJ) - (NDJ)_E \ast V - 1 \ast A - 2 \ast T$$

$$NGL = 3\,(4) - (1)\,3 - (1)\,2 - 1 \ast 3 - 2 \ast 1 = 2$$

Al utilizar la ecuación general se ha encontrado que la estructura tiene 2 grados de libertad ya se tiene una idea antes de dibujar la deformada general que debe hacerse con mucho detenimiento, con regla. Primero colocando las condiciones de los elementos que son $A = \infty$ e $I = \infty$.

Se traza perpendiculares a los elementos que son axialmente rígidos $A = \infty$ y se indica su posición inicial en la figura 1.20.2. Por ser las columnas AB y CD axialmente rígidas, la posición final de sus juntas B y C estarán en cualquier punto de la recta X-X_1 y X_2 –X_3, respectivamente.

En la figura 1.20.3 se indica una deformada lo mas general posible de la estructura. Nótese que la junta B no gira ya que si rotara la posición final de C' no caería dentro de la recta Y_2 '–Y_3' que es la posición final del miembro BC por ser axialmente rígido.

En consecuencia, los grados de libertad son la componente de desplazamiento horizontal del nudo B que se ha denominado q_1 y la rotación del nudo D que se ha llamado q_2.

En la medida que se van resolviendo más ejercicios la explicación teórica va disminuyendo. Es importante que el estudiante aprenda a encontrar los grados de libertad ya que si se seleccionan mal las coordenadas todo lo que se haga a posterior estará mal realizado.

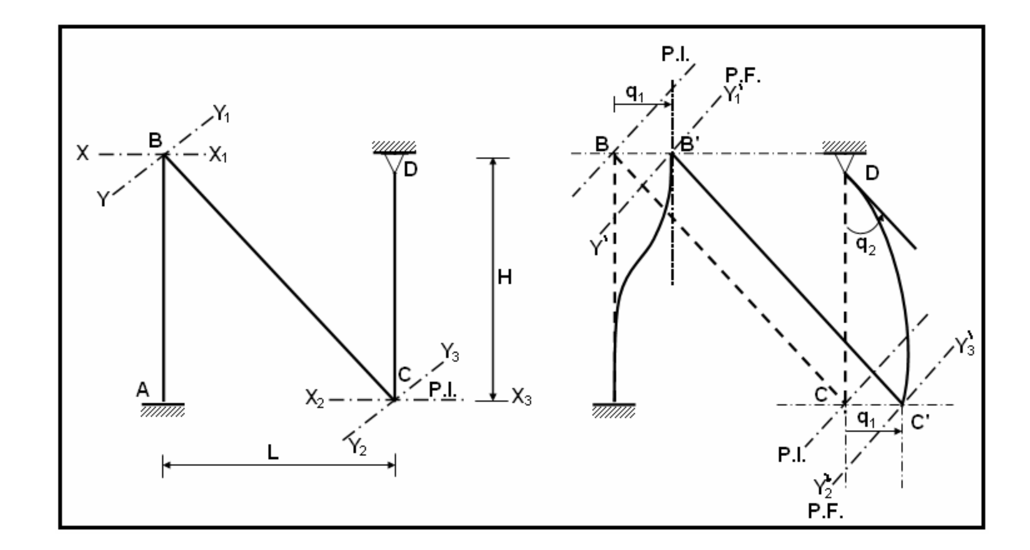


Figura 1.20.2 Condiciones de los elementos $A = \infty$ **Figura 1.20.3** Deformada general y grados de libertad

- **EJEMPLO 2**

Para el sistema mostrado en la figura 1.21.1, en que las columnas son $A = \infty$ y la viga central totalmente rígida, se pide:

a) Calcular el numero de grados de libertad
b) Dibujar una deformada lo mas general posible.

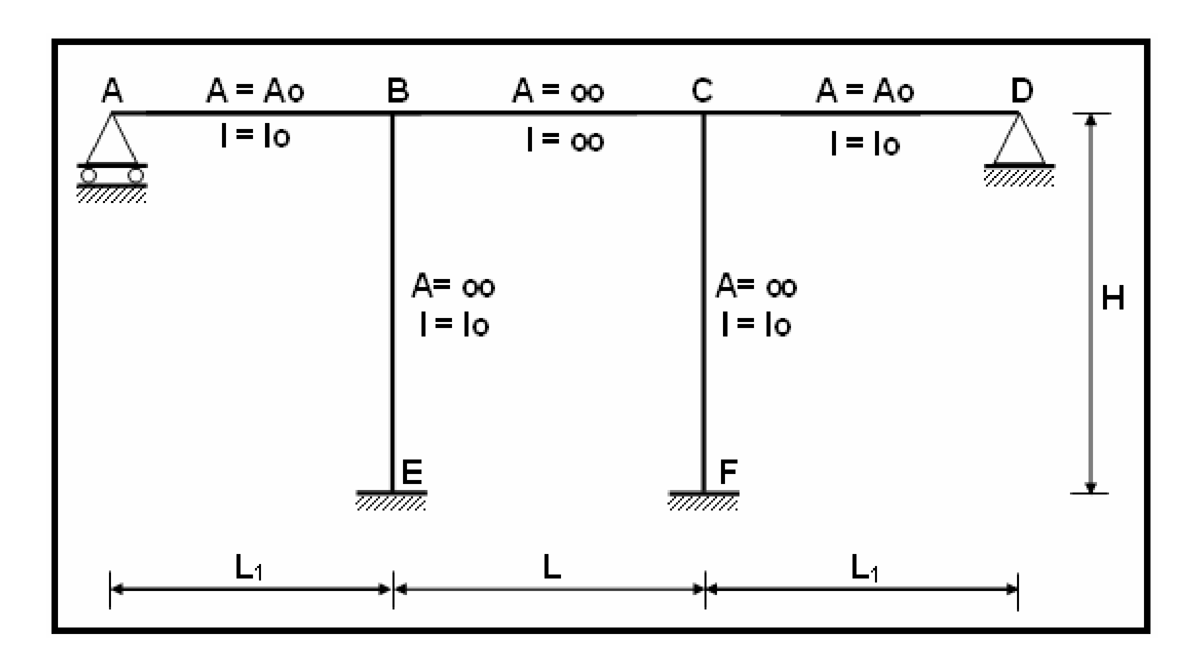


Figura 1.21.1 Estructura del Ejemplo 2.

- **SOLUCION**

$$NGL = 3\,(NDJ) - (NDJ)_E * V - 1 * A - 2 * T$$

$$NGL = 3\,(6) - 1\,(1) - 1\,(2) - 2\,(3) - 1\,(3) - 2(1) = 4$$

Por la condición de ser axialmente rígida las columnas y la viga BC, se tiene que la posición final de las juntas B y C son B' y C', como se indica en la figura 1.21.2. Se encuentran sobre la recta inicial de la viga, para que cumplan con la condición de $A = \infty$ los tres elementos.

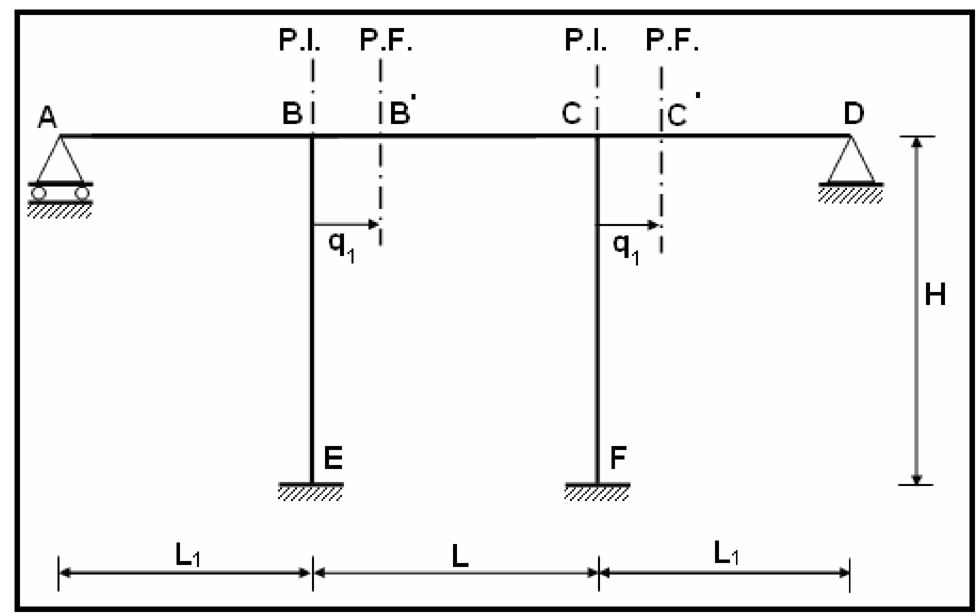


Figura 1.21.2 Posición final de las Juntas B y C.

En la figura 1.21.3 se representa una deformada lo mas general posible de la estructura. Se pregunta al lector ¿por que la junta B no tiene rotación?.

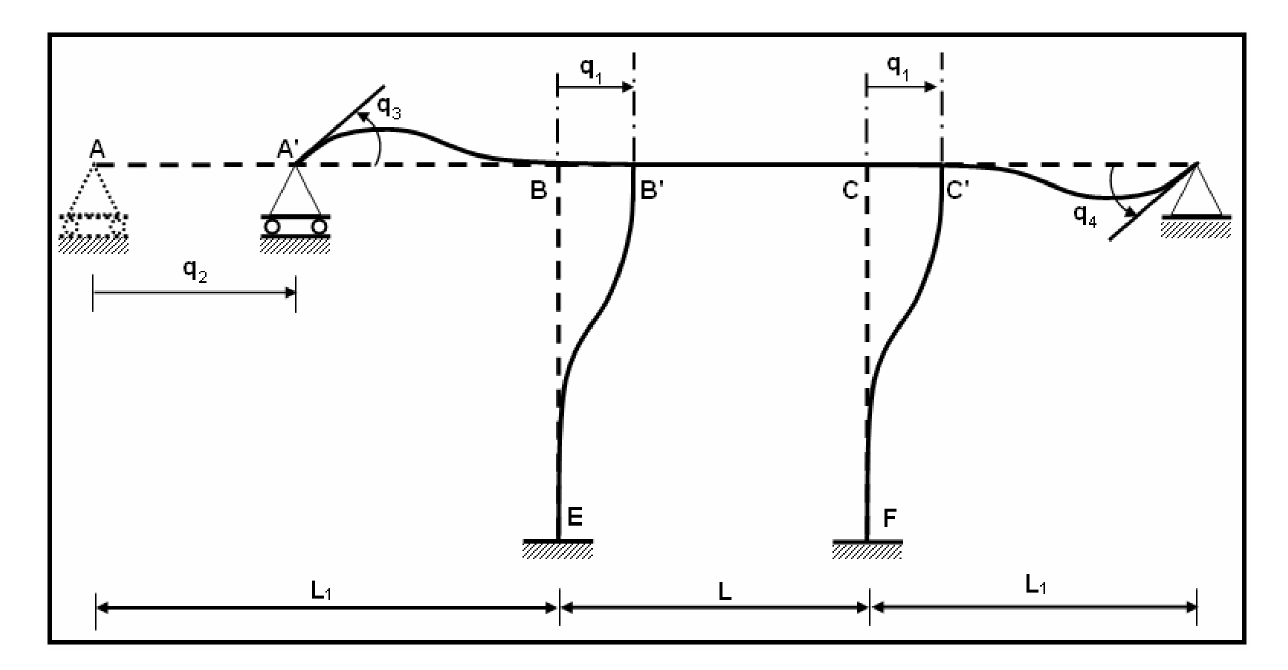


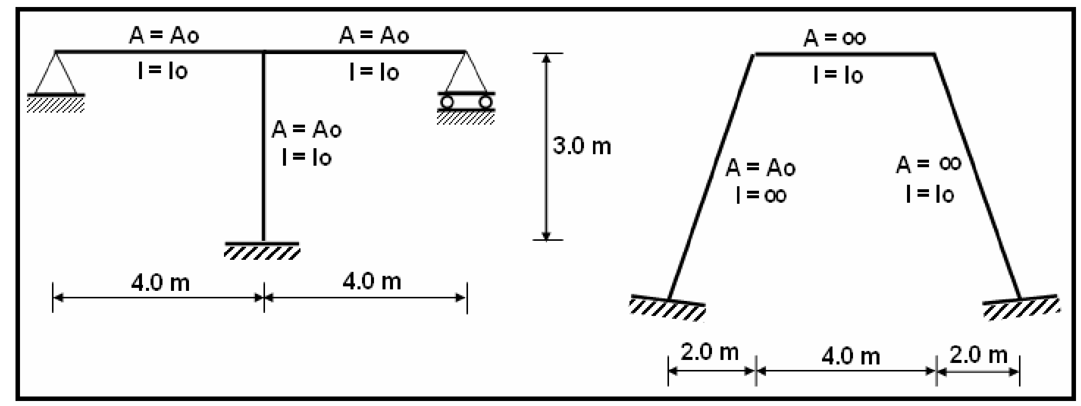
Figura 1.21.3 Deformada general

Si la junta B rota, la viga BC debe rotar por que es $I = \infty$ y al hacerlo la columna CF va a cambiar de longitud, se alarga o se acorta y deja de cumplir la condición de $A = \infty$. Por lo tanto no hay rotación en dicha junta.

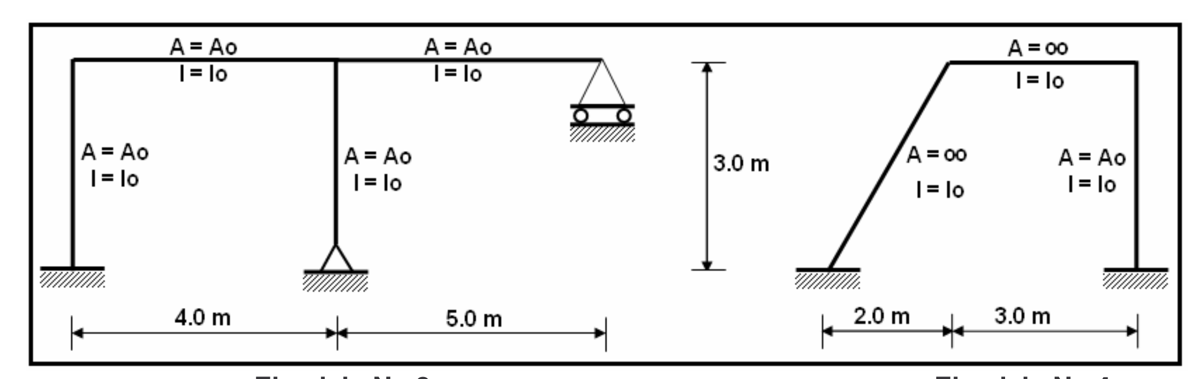
1.5 EJERCICIOS PROPUESTOS

Para cada uno de los sistemas mostrados se pide:

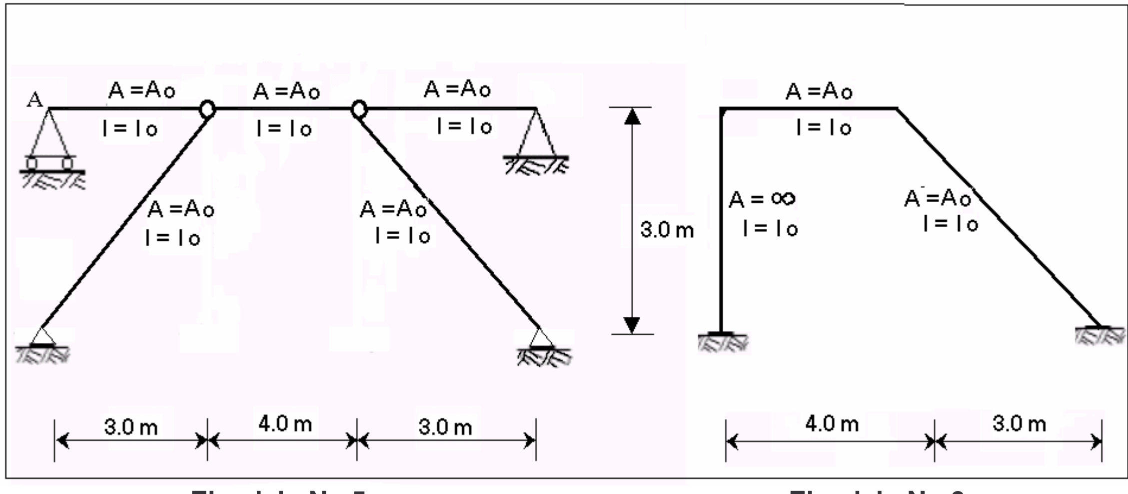
a) Calcular el número de grados de libertad.
b) Dibujar una deformada lo mas general posible.



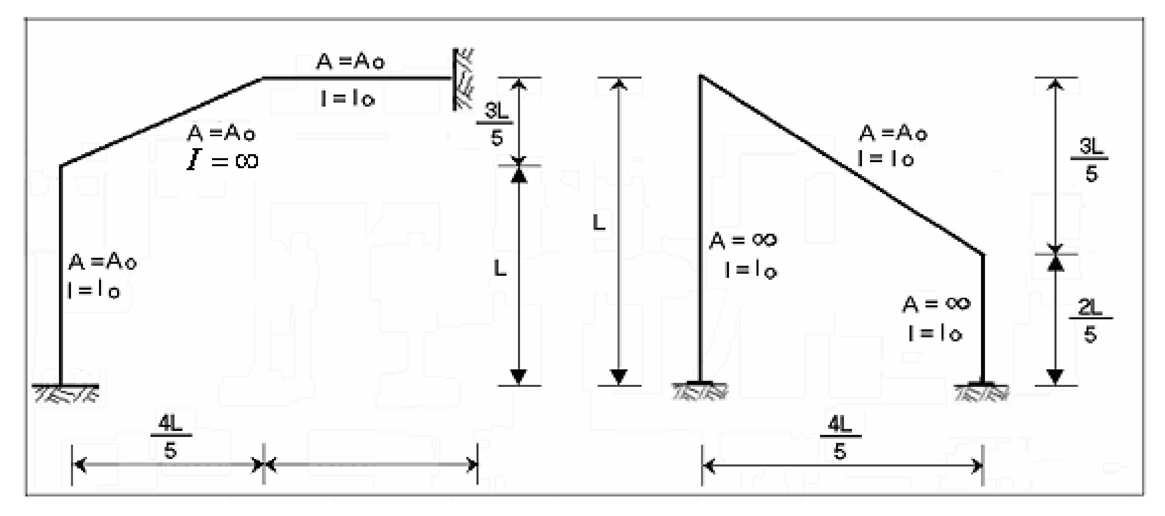
Ejercicio N.- 1 Ejercicio N.- 2



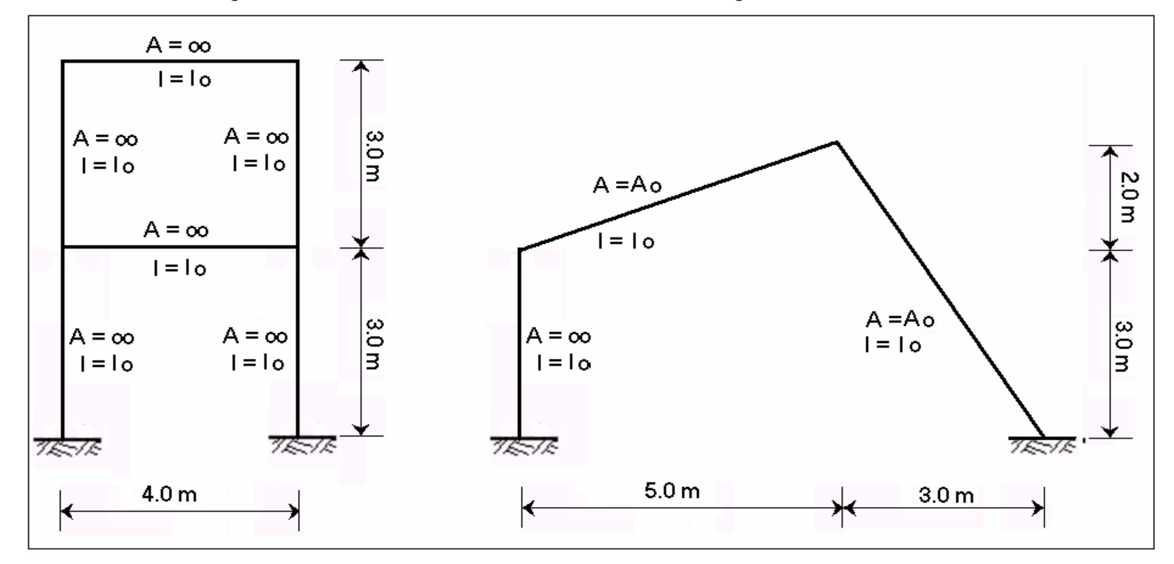
Ejercicio N.- 3 Ejercicio N.- 4



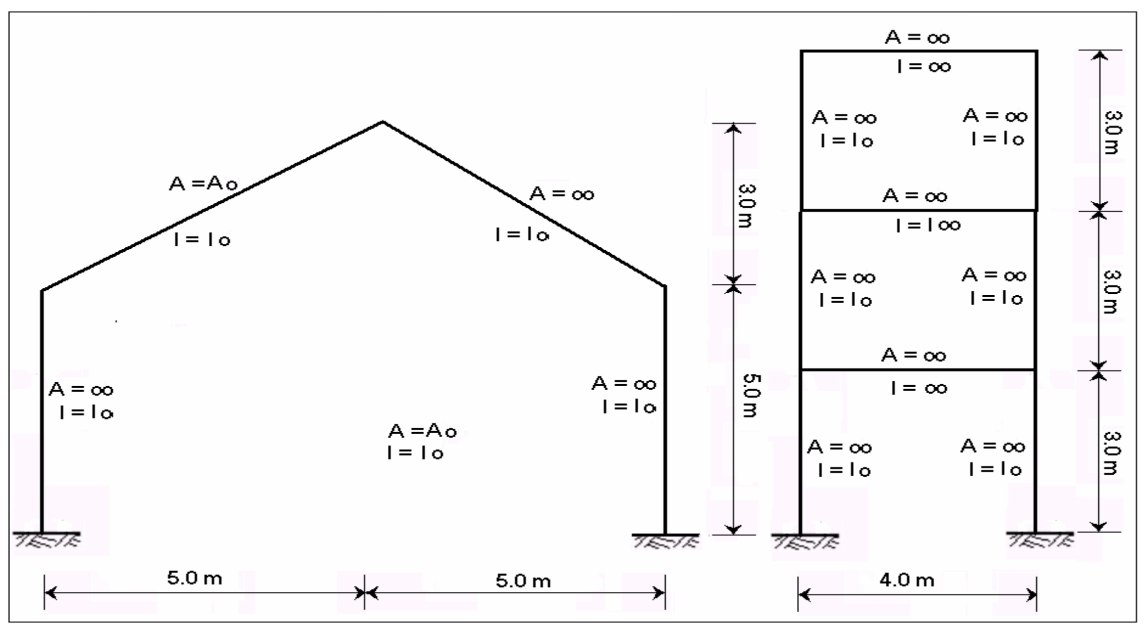
Ejercicio N.- 5 Ejercicio N.- 6



Ejercicio N.- 7 Ejercicio N.- 8



Ejercicio N.- 9 Ejercicio N.- 10



Ejercicio N.- 11 Ejercicio N.- 12

CAPITULO 2

SISTEMA DE CARGAS Y COORDENADAS GENERALIZADAS

RESUMEN

Se presentan los primeros vectores con que se trabajara en el Análisis Matricial de Estructuras; estos son el vector de coordenadas generalizadas **q** y el vector de cargas generalizadas **Q**, lo que interesa es que el lector se empiece a familiarizar con esta nomenclatura, en capítulos posteriores se indicara en detalle como se obtienen.

Por otra parte se introducen las definiciones de coordenadas de la estructura, coordenadas de elemento y coordenadas de nudo.

Aspecto fundamental en el Análisis Matricial constituye la construcción de diagramas elementales por lo tanto se da importancia a este tema y se desarrollan algunos ejemplos que ayudaran a comprender las definiciones que se indican al respecto. Es importante que el estudiante al finalizar este capítulo sepa construir diagramas elementales puesto que en el análisis estructural es muy frecuente su uso.

2.1 COORDENADAS GENERALIZADAS DE UNA ESTRUCTURA

2.1.1 Vector $\bar{q}$

Antes de empezar el estudio se destaca que a una matriz o un vector se les identifica con una letra negreada o con una letra con una raya encima. Cualquiera de las dos formas es valida en éste libro.

El pórtico plano de la figura 2.1.1 está compuesto por miembros totalmente flexibles en consecuencia tendrá cinco grados de libertad, siendo una de sus deformadas la indicada en la figura 2.1.2.

Estos desplazamientos q_i se los considera elementos de un vector columna **q** compuesto por las n coordenadas generalizadas de toda la estructura. Para el pórtico de la figura 2.1.1, se tiene que n = 5. Por lo tanto:

$$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{bmatrix} \qquad (2.1)$$

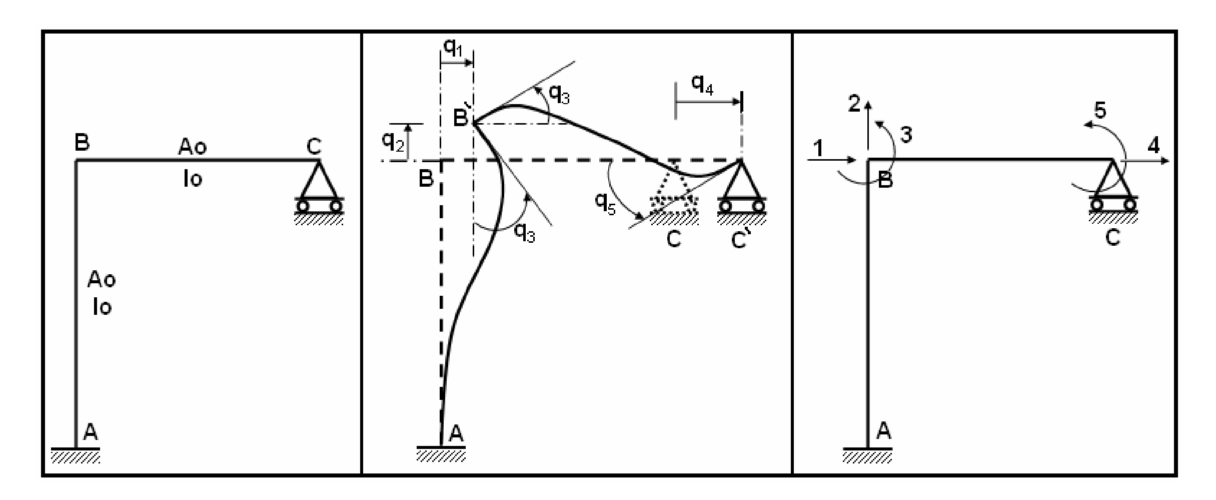


Figura 2.1.1 Estructura de análisis **Figura 2.1.2** Deformada general **Figura 2.1.3** Coordenadas generalizadas

En general, para cualquier estructura la forma del vector **q** es la indicada en la ecuación (2.2) . Con la letra **q** se identifica al vector de coordenadas generalizadas.

$$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ \dots \\ q_n \end{bmatrix} \qquad (2.2)$$

donde n es el número de grados de libertad de la estructura. **Es importante notar que los desplazamientos q_i son infinitésimos, más para visualizar los conceptos, siempre las coordenadas generales se dibujaran grandes.**

Para simplificar, en lugar de dibujar la deformada, basta colocar sobre las juntas las componentes de desplazamiento y rotación como lo ilustra la figura 2.1.3.

Antes de 1980 en que el desarrollo informático no lo era como se tiene a inicios del siglo XXI, existían una serie de algoritmos para encontrar el vector $\boldsymbol{q}$, que ahora tienen poco sentido

estudiarlos. Lo mejor es aprender el Método de los Desplazamientos orientado al uso del computador mediante Análisis Matricial de Estructuras.

2.1.2 Coordenadas generalizadas ortogonales

Para el pórtico plano de la figura 2.1.1. Se ha utilizado un sistema de coordenadas ortogonales para definir las componentes de desplazamiento de las juntas. Pero este sistema no es único ya que se puede utilizar otro sistema de coordenadas en el cual cada q_i esté asociado a una dirección determinada.

En el pórtico de la figura 2.1.3 se han utilizado coordenadas ortogonales, que es la forma más común de resolver, con relación a esta figura se tiene:

q_1 Componente de desplazamiento del nudo B en la dirección horizontal, siendo positivo si es hacia la derecha.

q_2 Componente de desplazamiento del nudo B en la dirección vertical, siendo positivo si es hacia arriba.

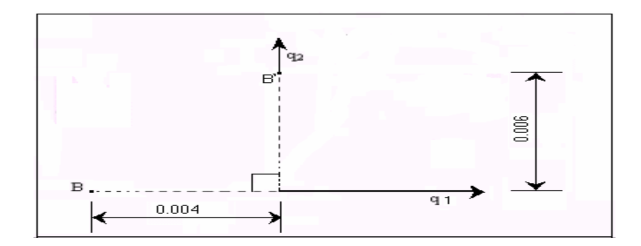
q_3 Rotación del nudo B, siendo positivo si es antihorario.

Algo similar se tiene para las coordenadas q_4 y q_5 pero referidas al nudo C. Lo importante es destacar que entre las direcciones de medición de q_1 y q_2 hay noventa grados por eso el nombre de ortogonales.

- **EJEMPLO N.- 1**

Se supone que las coordenadas generalizadas q_1 y q_2 de la junta B del pórtico 2.1.1, para un estado de cargas arbitrario, son: q_1 = 0.004 m y q_2 = 0.006 m. Encontrar gráficamente la posición de B'.

- **SOLUCIÓN**



Para la posición final del nudo B se dibuja primero la componente de desplazamiento q_1 ahí se coloca $q_1 = 0.004$, luego por ser coordenada ortogonal en la posición final anterior se coloca la orientación de la coordenada q_2 y en ella $q_2 = 0.006$ con lo que se obtiene B'.

2.1.3 Coordenadas generalizadas no ortogonales

Para definir la posición final de las juntas del pórtico de la figura 2.1.1 se puede utilizar las coordenadas indicadas en la figura 2.2.1.

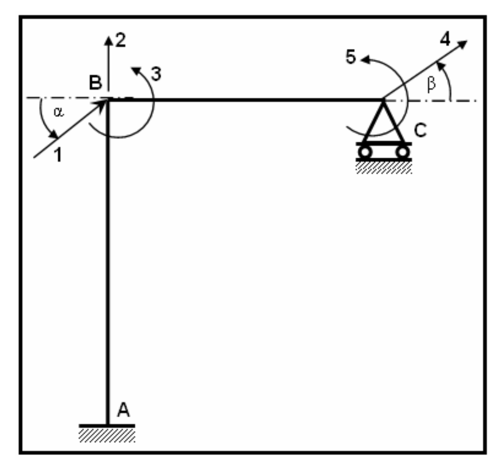


Figura 2.2.1 Coordenadas no ortogonales

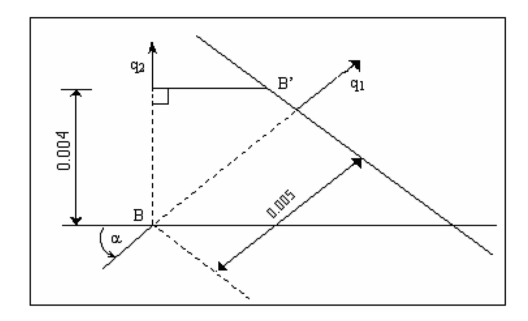
En este caso se han empleado coordenadas generalizadas que no son ortogonales. Aquí q_1 será la componente del nudo B que forma un ángulo α con la horizontal. Nótese que ahora el ángulo comprendido entre las direcciones de q_1 y q_2 no es noventa grados.

- **EJEMPLO N.- 2**

Con los datos de carga del ejemplo N.- 1, pero al trabajar con el sistema de coordenadas de la figura 2.2.1, se supone que se obtuvo $q_1 = 0.005$ y $q_2 = 0.004$. ¿Encontrar el punto B'?.

- **SOLUCIÓN**

Para obtener el punto $B^{'}$ se trazarán primero los sentidos de las direcciones q_1 y q_2 en ellas se colocan los datos del problema. Finalmente para encontrar la posición de $B^{'}$ se trazan perpendiculares en la posición final de los desplazamientos colocados.



Nótese que al ser proyecciones, el desplazamiento de B, B' no se obtiene sumando vectorialmente.

Este tipo de coordenadas no ortogonales, generalmente no se utilizan para la resolución de problemas estructurales debido a que es más complicado. Se lo presenta únicamente para entender mejor las estructuras.

2.1.4 Diagramas de deformación elementales

Son los diagramas que se obtienen al hacer una de las componentes igual a 1 y todas las demás cero. La unidad que se deforma es adimensional. Su notación será: $q_i = 1$ y $q_j = 0$ para i ≠ j , o simplemente deformada elemental q_i.

- **EJEMPLO N.- 3**

Encontrar los diagramas de deformación elemental q_1 y q_2 de la estructura de la figura 2.2.1, cuyos elementos son totalmente flexibles.

- **SOLUCION**

♣ $q_1 = 1$ y $q_2 = 0$ para $i \neq 1$

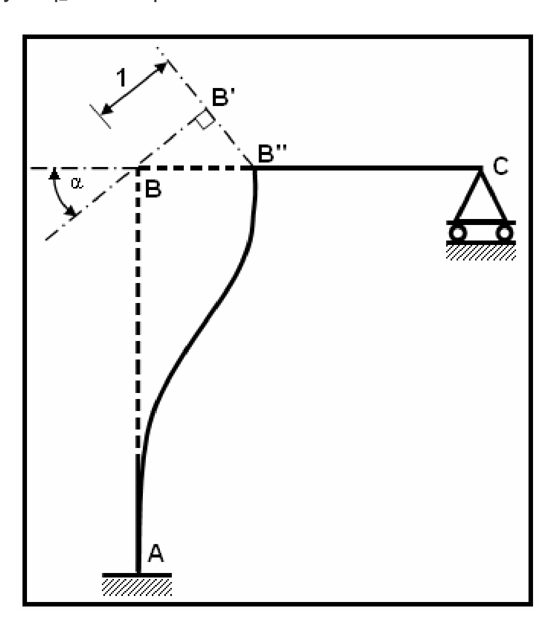
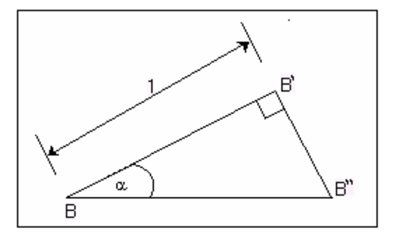


Figura 2.2.2 Deformada elemental q_1 para el sistema de coordenadas de la figura 2.2.1

Primero se dibuja la estructura con líneas entrecortadas se colocan las letras que definen a cada nudo, luego se coloca el sentido en el cual se mide la componente de desplazamiento q_1.

Al hacer $q_1 = 1$ el nudo B inicialmente se traslada a B', pero esta no puede ser la posición final del nudo ya que existiría un desplazamiento vertical es decir $q_2 \neq 0$ y como se quiere que sea cero necesariamente la posición final del nudo B será B'', la misma que se obtiene trazando una perpendicular a la dirección de q_1.

Para conocer cuanto se desplaza horizontalmente $BB^{''}$ se recurre a la trigonometría, para ello en el triángulo rectángulo B B' B'', se tiene:



B' B'' = 1.tg α
BB'' = 1.sec α

♣ $q_2 = 1$ y $q_i = 0$ para $i \neq 2$

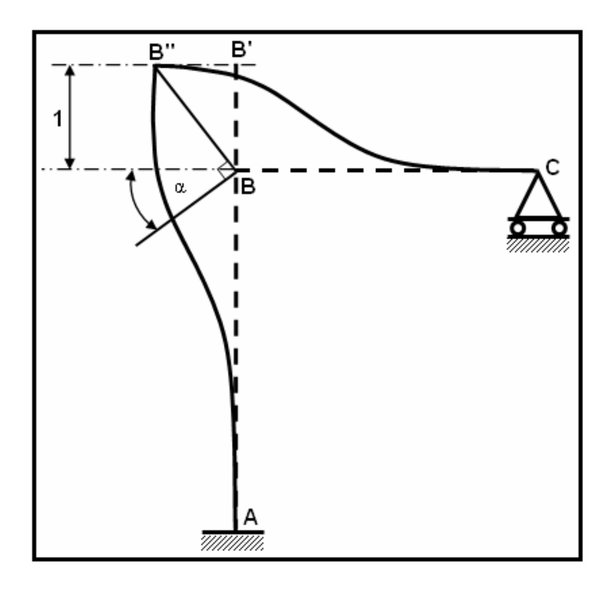
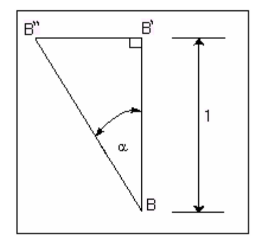


Figura 2.2.3 Deformada elemental q_2 para el sistema de coordenadas de la figura 2.2.1

En este caso, al hacer $q_2 = 1$, inicialmente el nudo B se traslada verticalmente a B', pero esa no es la posición final ya que en B' se tiene $q_1 \neq 0$. Por lo tanto, para obtener la posición final del nudo B a partir de B' se traza una perpendicular a B B', y, por B se traza una perpendicular a la dirección de la coordenada q_1. El punto de intersección determina la posición final del nudo B, que es B''.

Para encontrar cuanto se desplaza horizontalmente, en el triángulo rectángulo B B' B'' se tiene:



B' B'' = 1.tg α
BB'' = 1.sec α

Mediante un proceso similar obtendríamos los demás diagramas de desplazamientos elementales para el pórtico plano cuyas coordenadas se indican en la figura 2.2.1.

2.2 CARGAS GENERALIZADAS DE UNA ESTRUCTURA

2.2.1 Hipótesis considerada

Para empezar el estudio, **se considera que las cargas actúan únicamente sobre las juntas y en la dirección que se han definido las coordenadas generalizadas.**

Se entiende por cargas a las fuerzas o momentos externos que actúan sobre la estructura y se les conoce también con el nombre de acción o fuerza generalizada. **El sentido positivo de las cargas será el que coincida con los sentidos definidos de las coordenadas generalizadas.**

En el pórtico de la figura 2.3.1, se puede trabajar con el sistema de coordenadas generalizadas de la figura 2.3.2 o 2.3.3. En estos casos el sistema de cargas generalizadas será el de la figura 2.3.4 o el de la figura 2.3.5, respectivamente. A las cargas generalizadas se las denomina con la letra Q.

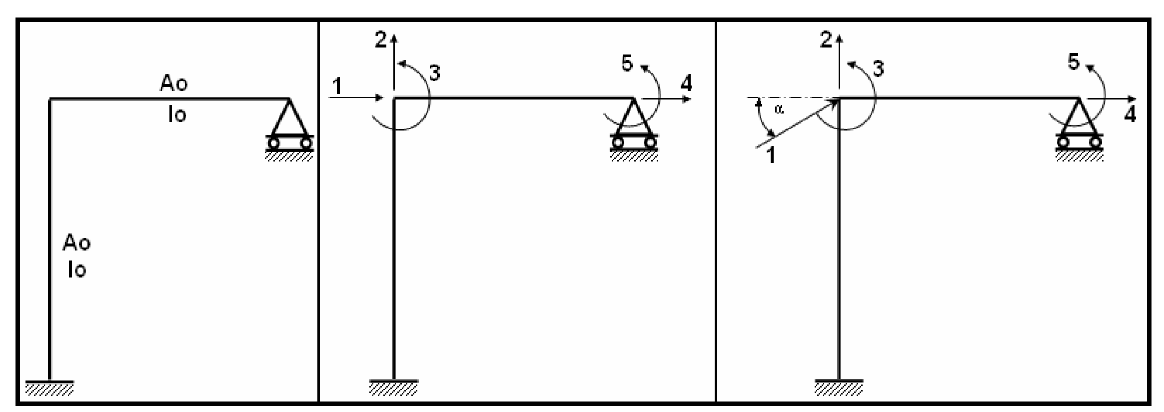


Figura 2.3.1 Estructura de Análisis **Figura 2.3.2** Coordenadas ortogonales **Figura 2.3.3** Coordenadas no ortogonales

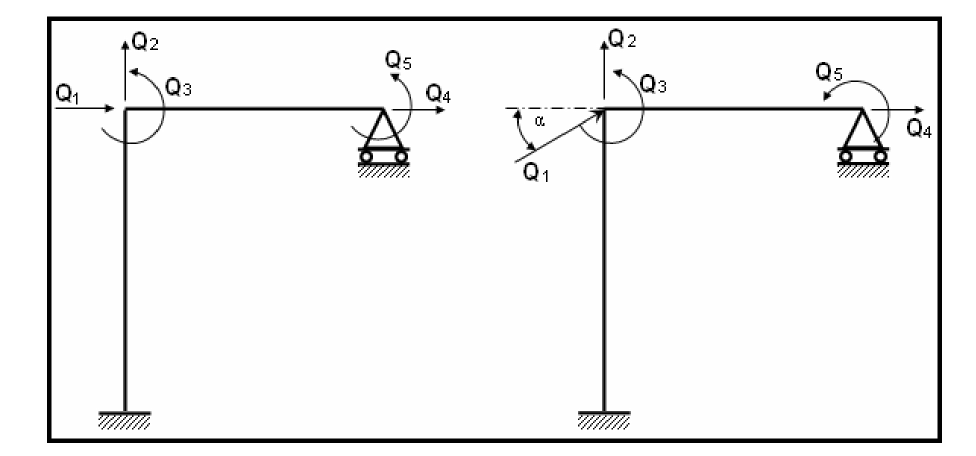


Figura 2.3.4 Cargas generalizadas ortogonales **Figura 2.3.5** Cargas generalizadas no ortogonales.

De igual manera a las cargas generalizadas se les agrupará en un vector **Q**; para este ejemplo sería:

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \end{bmatrix} \qquad (2.3)$$

Y la forma general es:

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ Q_n \end{bmatrix} \qquad (2.4)$$

donde n = número de grados de libertad de la estructura. Al vector **Q** se denomina vector de cargas generalizadas.

Teóricamente por la hipótesis considerada se podría resolver únicamente estructuras que tengan cargas o momentos concentrados en las juntas, y en la dirección del sistema de coordenadas generalizadas.

Si las acciones se encuentran en los elementos, para resolver el problema se tiene que utilizar el siguiente artificio: se tomara como nudo el sitio en el cual actúa la carga o momento concentrado. Por ejemplo, para el pórtico con el sistema de cargas presentado en la figura 2.4, en lugar de considerar que tiene tres nudos y dos miembros, se considera formado por cinco nudos: A, B, C, D y E y 4 miembros, porque en el nudo B y D actúan la carga P y el momento M, respectivamente.

Lógicamente el problema se complica si se tiene algunas cargas concentradas o momentos concentrados actuando en los elementos por la hipótesis considerada, ya que este artificio conduce a que se tenga que trabajar con demasiadas coordenadas generalizadas. En consecuencia este artificio no es el más adecuado.

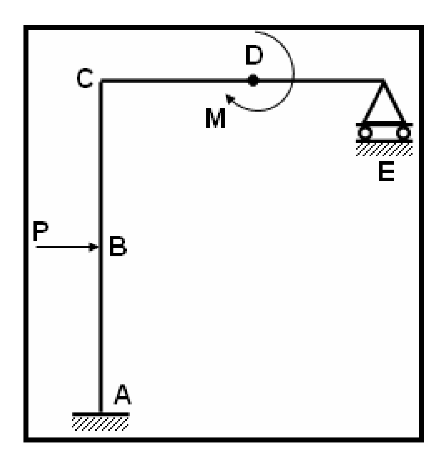


Figura 2.4 Estructura con carga lateral y momento concentrado.

Por ultimo, bajo la hipótesis de que las cargas actúan, solamente sobre las juntas y en la dirección que se ha definido las coordenadas generalizadas **no podemos resolver, por ahora,** problemas relacionados con incrementos de temperatura, asentamientos de apoyos ni otras solicitaciones que sean diferentes a cargas o momentos concentrados actuando sobre los miembros.

2.2.2 El sistema Q-q

Debido a que tanto Q como q se miden en el mismo sistema de coordenadas se puede dibujar simbólicamente cargas generalizadas y coordenadas generalizadas en un solo sistema al que se denomina "sistema $Q-q$" o simplemente $Q-q$. Para el sistema de coordenadas de los pórticos de las figuras 2.3.4 y 2.3.5 se tiene que los sistemas $Q-q$ respectivos son los indicados en las figuras 2.5.1 y 2.5.2.

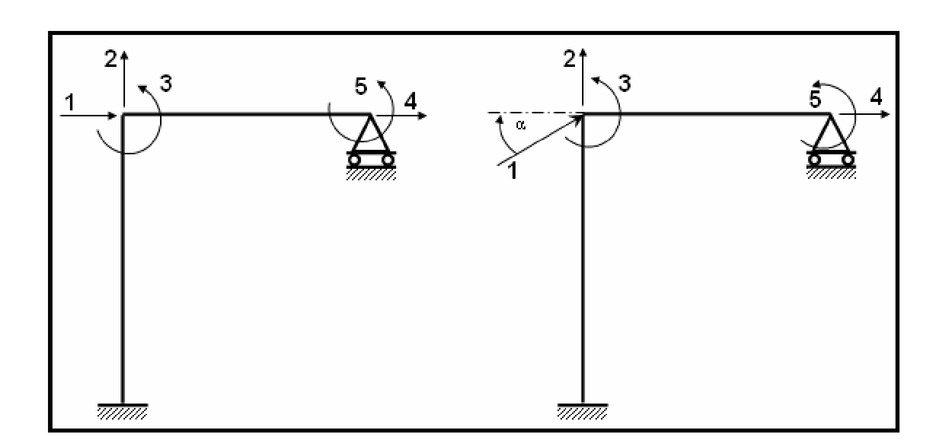


Figura 2.5.1 Sistema $Q-q$ **Figura 2.5.2** Sistema $Q-q$

En los capítulos posteriores se trabajará generalmente con sistemas de coordenadas ortogonales y la convención de signos, adoptada es la siguiente:

La fuerza es positiva si va de izquierda a derecha (→) o de abajo hacia arriba (↑), y el momento es positivo si es antihorario (↶).

Finalmente, es necesario hacer hincapié que entre carga y desplazamiento existe una importante diferencia: la carga sobre un nudo es la suma vectorial de las cargas actuantes sobre ella, pero no sucede lo propio con los desplazamientos **q** como se vio en el numeral 2.1.3.

2.2.3 Solución general del problema

Para ilustrar el procedimiento de cálculo de estructuras en las cuales actúan: cargas distribuidas sobre los elementos, incrementos de temperatura, asentamientos de los apoyos, etc. Se fijará la atención en el pórtico plano de la figura 2.6.2, sobre el mismo gravitan las cargas indicadas en la figura 2.6.1, en este gráfico Δt corresponde a un incremento de temperatura sobre los miembros y Δ_1, Δ_2 y Δ_3, son asentamientos de los apoyos A y C.

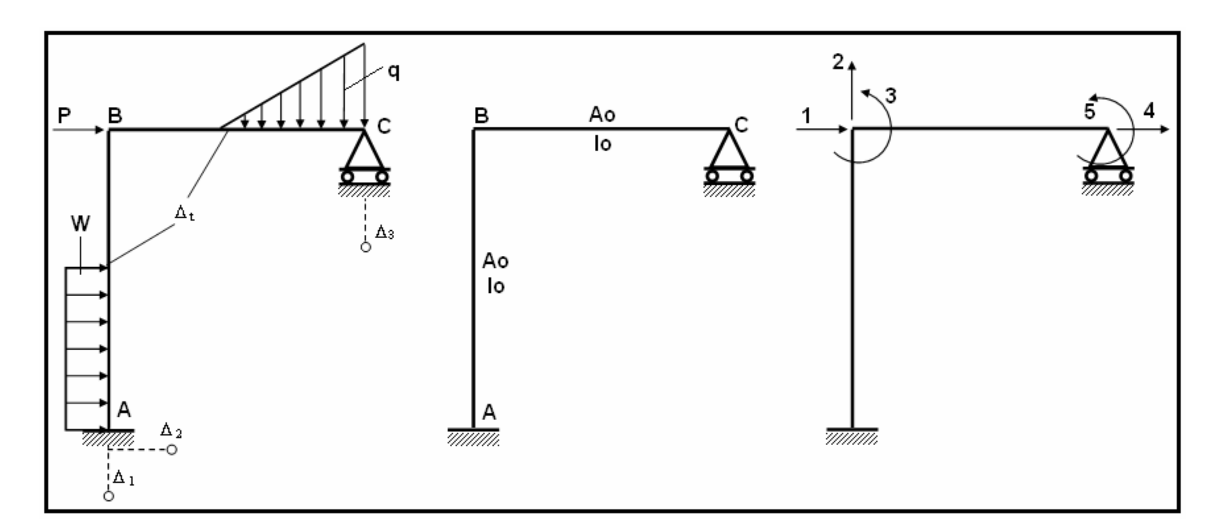


Figura 2.6.1 Cargas actuantes **Figura 2.6.2** Estructura de análisis **Figura 2.6.3** Sistema $Q-q$

2.2.4 Problema primario

Es aquel en el que actúan todas las cargas, asentamientos de apoyo, incrementos de temperatura, etc, todo lo que produce deformaciones. Pero el vector de coordenadas generalizadas q es nulo. Para que esto suceda es necesario colocar vínculos externos que estén de acuerdo con el sistema $Q-q$ de tal forma que los nudos no se desplacen ni giren.

Para el nudo B, por ejemplo, figura 2.6.4, se ha colocado un vínculo (┌) el cual impide el desplazamiento horizontal (q_1), desplazamiento vertical (q_2) y la rotación (q_3) del nudo B. Lo propio se ha realizado con el nudo C.

Estos vínculos adicionales originan reacciones que son de sentido contrario a los desplazamientos y rotaciones, a los cuales se les ha definido con la letra R_i **y se denominan cargas de fijación o cargas primarias.** En consecuencia, las cargas de fijación R, son las cargas que hay que aplicar para que las juntas de la estructura queden fijas y cumplan con la definición del problema primario.

Por lo tanto, en el problema primario se tiene que cada elemento se encuentra empotrado-empotrado. Y sobre cada uno de ellos actúan las solicitaciones respectivas.

2.2.5 El problema complementario

En este capítulo no interesa todavía que el lector sepa resolver el problema primario, esto se verá con detenimiento en el Capítulo IV, lo que importa es que comprenda como se resuelve una estructura. Conozca el por qué se tiene elementos empotrados en la solución, esto se debe a la condición de que $q=0$

En la estructura original, se aplican únicamente las fuerzas de fijación R que actuaron en el problema primario, pero aquí actúan con sentido contrario, es decir se tiene ya la hipótesis considerada, de tener cargas y momentos concentrados en las juntas o nudos.

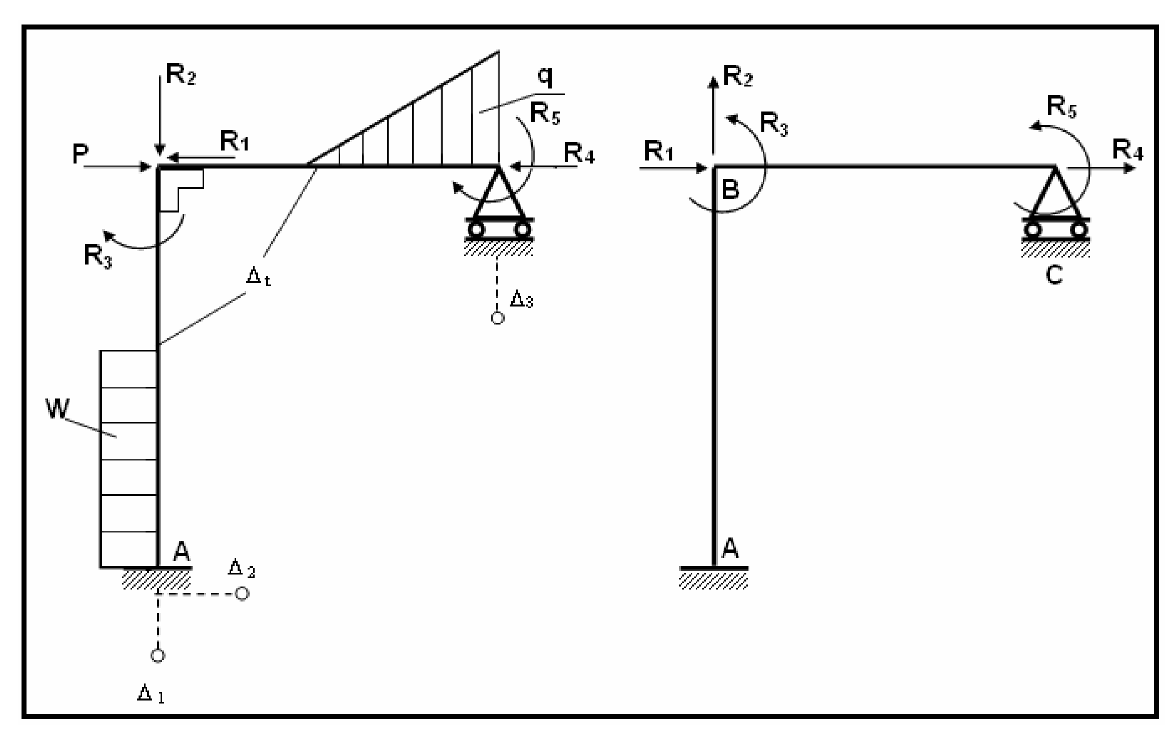


Figura 2.6.4 Problema Primario $q = 0$ **Figura 2.6.5** Problema Complementario

Con relación al pórtico plano de la figura 2.6.1, cuyos elementos son totalmente flexibles, no tienen la misma sección transversal, es únicamente por notación que todos tienen la misma letra. Con respecto a ésta figura en la figura 2.6.5 se presenta el problema complementario. Nótese que ahora las acciones R_i generan los corrimientos o giros q_i que realmente tiene la estructura y que en el problema primario se anuló.

Al observar las figuras 2.6.3 y 2.6.5 se encuentra que: Q_1 es la fuerza horizontal que actúa en la junta B, que en este caso vale R_1; Q_2 es la fuerza vertical que actua en la junta B, que vale R_2, etc. En resumen se tiene:

$$Q_1 = R_1 \qquad Q_2 = R_2 \qquad Q_3 = R_3 \qquad Q_4 = R_4 \qquad Q_5 = R_5$$

Luego el vector de cargas generalizadas **Q** para la estructura analizada, es:

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \end{bmatrix}$$

Evidentemente, este vector de cargas $\boldsymbol{Q}$ es el que genera el vector de coordenadas generalizadas $\boldsymbol{q}$ y estos a su vez las fuerzas y momentos internos en cada uno de los miembros de la estructura.

Este es el problema general de cálculo en el cual se centra la teoría de “Análisis Matricial de estructuras”. Prácticamente se puede decir que con matrices se resuelve el problema complementario ya que el problema primario se resuelve por estática como se verá en el Capitulo 4.

La solución total de una estructura es la suma del problema primario más el problema complementario. Por ejemplo, el momento en el nudo inicial del elemento BC es igual al momento de empotramiento perfecto del problema primario más el momento que reporte la solución del problema complementario. Para este mismo nudo B, las ordenadas de la elástica son nulas en la junta B, por la definición del problema primario **q = 0** existiendo únicamente desplazamientos y giro del problema complementario. **Para un punto intermedio de la barra BC los corrimientos y giros de un punto cualquiera, será igual a lo que reporte el problema primario más lo que reporte el problema complementario.**

Se hace hincapié en anotar que la solución total del problema es la superposición del problema primario y complementario.

2.3 DESPLAZAMIENTO DE LOS ELEMENTOS

Para describir los desplazamientos y rotaciones de un elemento de un pórtico plano se observa por ejemplo el marco de la figura 2.7.1, cuyos miembros se consideran totalmente flexibles, A_o, I_o. Por cierto la letra A hace relación al área de la sección transversal y la letra I a la inercia a flexión de la sección transversal.

La estructura tiene seis grados de libertad, tres en cada nudo, dos desplazamientos y un giro, los mismos que se indican en la figura 2.7.2 en donde se presenta una deformada lo más general posible.

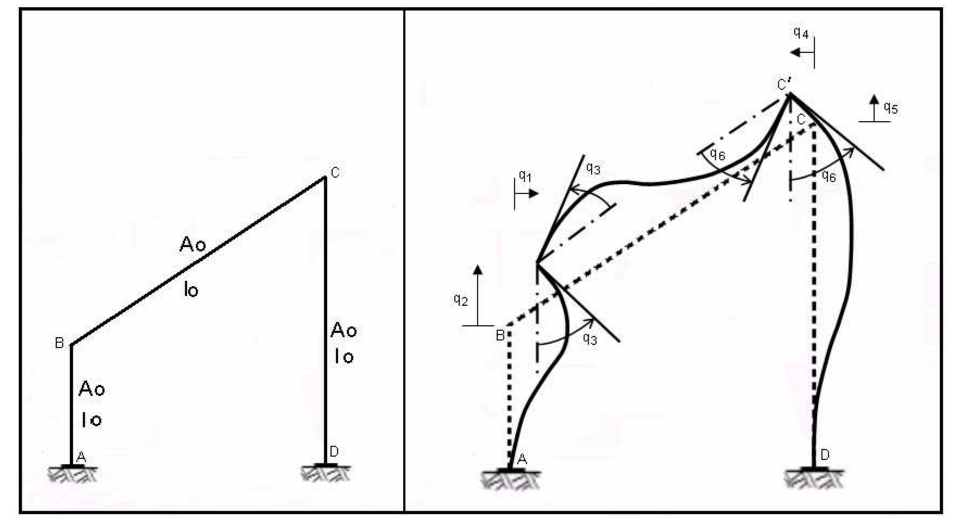


Figura 2.7.1 Pórtico con elementos flexibles **Figura 2.7.2** Deformada general del pórtico plano.

En la figura 2.7.3 se ha aislado el elemento BC, de la figura 2.7.2 y en ella se define un sistema de coordenadas X-Y en forma arbitraria. El eje X coincide con el eje del miembro y el eje Y es perpendicular a este. Posteriormente en la figura 2.7.4 se presenta el miembro BC con su deformada, en esta se va ha estudiar sus componentes de desplazamiento y rotación de los nudos. Se ha colocado con líneas entrecortadas para indicar que es su posición inicial, antes de deformarse.

Al definir el origen de coordenadas X-Y se está definiendo cual es el nudo inicial y final del miembro. Se utilizará el subíndice 1 para definir las componentes de desplazamiento y giro del nudo inicial y el subíndice 2 para el nudo final.

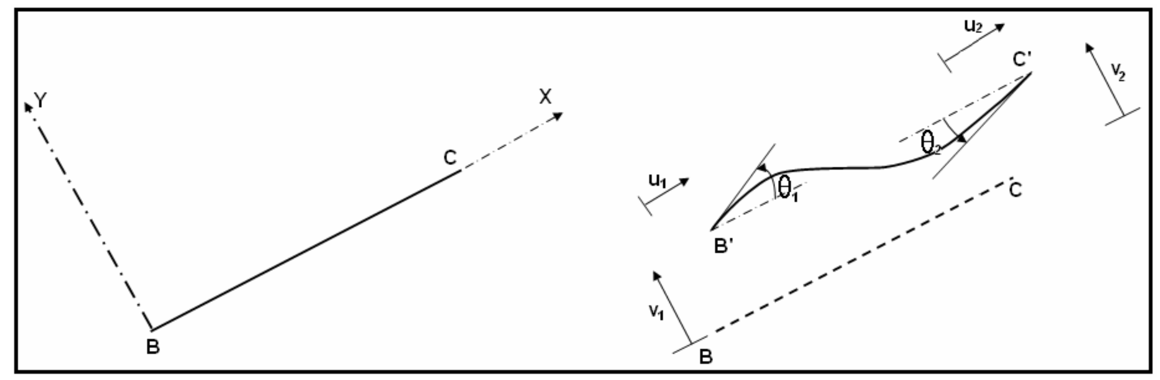


Figura 2.7.3 Ejes para elemento lineal BC **Figura 2.7.4** Coordenadas de los nudos de BC

En la figura 2.7.4 se indican los componentes de desplazamiento y giros del miembro BC. En este ejemplo, se tiene.

- u_1 Componente de desplazamiento en el sentido longitudinal, del elemento BC del nudo inicial.
- v_1 Componente de desplazamiento en el sentido transversal, del elemento BC del nudo inicial.
- Θ_1 Rotación del nudo inicial, B.
- u_2 Componente de desplazamiento en el sentido longitudinal del elemento BC del nudo final.
- v_2 Componente de desplazamiento en el sentido transversal del elemento BC del nudo final.
- Θ_2 Rotación del nudo final, C.

Nótese, que en el sentido positivo de las componentes de, desplazamiento coinciden con la dirección positiva de los ejes de coordenadas.Si los ejes de referencia, hubiesen sido los indicados en la figura 2.7.5. Las componentes de desplazamiento y su nomenclatura serían las de la figura 2.7.6.

Por lo tanto, la elección del nudo inicial y nudo final de un elemento es arbitraria. En el futuro se usarán los ejes de coordenadas de la figura 2.7.3, para definir el nudo inicial y el nudo final, en un elemento inclinado. **Si el pórtico es ortogonal el nudo inicial se considera en la junta inferior del elemento y en los elementos horizontales el nudo inicial se considerará a la izquierda del miembro.** Así se trabajará en este texto pero se destaca una vez más que esto es arbitrario.

Finalmente, es necesario que se diferencie entre las coordenadas q y las coordenadas u_1, v_1, Θ_1, u_2, etc. Las primeras definen las componentes de desplazamiento de las juntas o nudos de la estructura. Generalmente las componentes de desplazamiento de los nudos son **horizontal** y **vertical,** en cambio que las segundas indican las componentes de desplazamiento de los nudos de cada elemento, estas componentes de desplazamiento son **longitudinal** y **transversal** al eje del elemento y se conoce con el nombre de “ coordenadas locales “. En cambio las coordenadas generalizadas q son **“ coordenadas globales “** de la estructura.

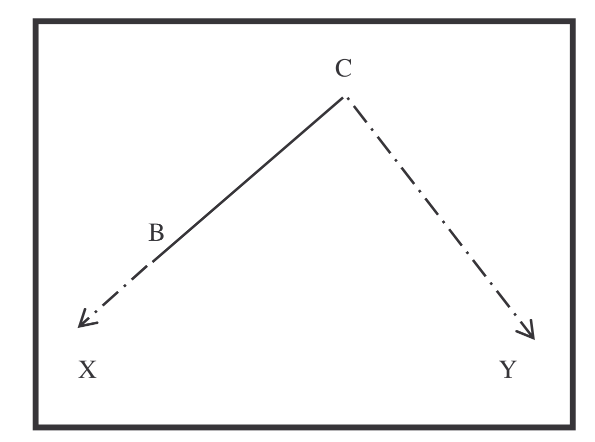


Figura 2.7.5 Origen de coordenadas en el nudo C.

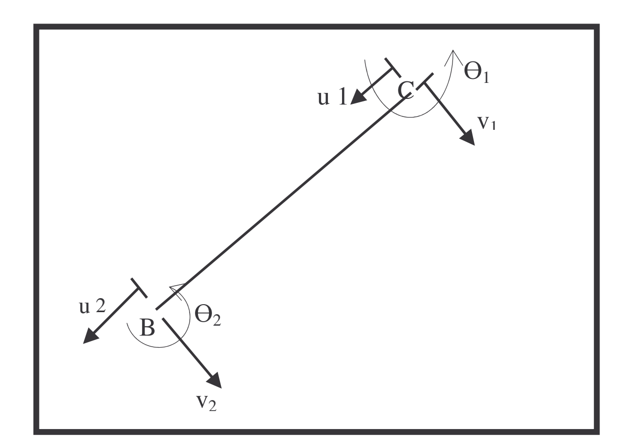


Figura 2.7.6 Coordenadas de un elemento.

Para cierto tipo de problemas, como por ejemplo calcular marcos planos con apoyos inclinados, es conveniente definir **coordenadas especiales de nudos** que sigan la dirección paralela al apoyo de esta forma se facilita el cálculo de la matriz de rigidez de la estructura.

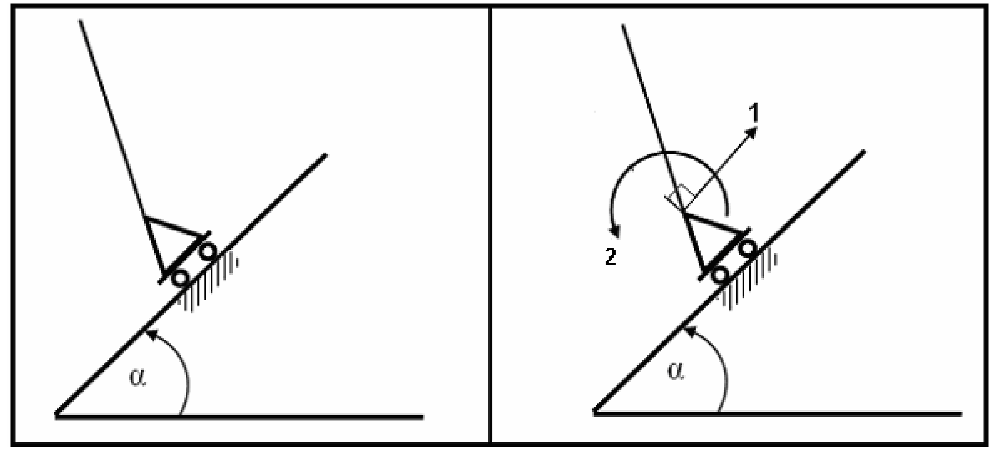


Figura 2.7.7 Corte de una estructura con apoyo inclinado **Figura 2.7.8** Coordenadas de un nudo especial.

En la figura 2.7.7 se presenta un elemento de una estructura que tiene un apoyo inclinado; por el tipo de vnculo en el apoyo se tiene dos grados de libertad, un corrimiento en la dirección paralela al apoyo y una rotación. En este caso las coordenadas del nudo inicial se puede considerar las mostradas en la figura 2.7.8.

2.4 EJERCICIOS RESUELTOS

- **EJEMPLO N.- 4**

En el pórtico de la figura 2.8.1 dibujar los diagramas elementales de desplazamiento.

- **SOLUCIÓN**

Los miembros horizontales son totalmente rigidos y los verticales son axialmente rigidos tienen dos grados de libertad los cuales se presentan en la figura 2.8.2.Se deja al estudiante que explique el porqué de los diagramas presentados en las figuras siguientes.

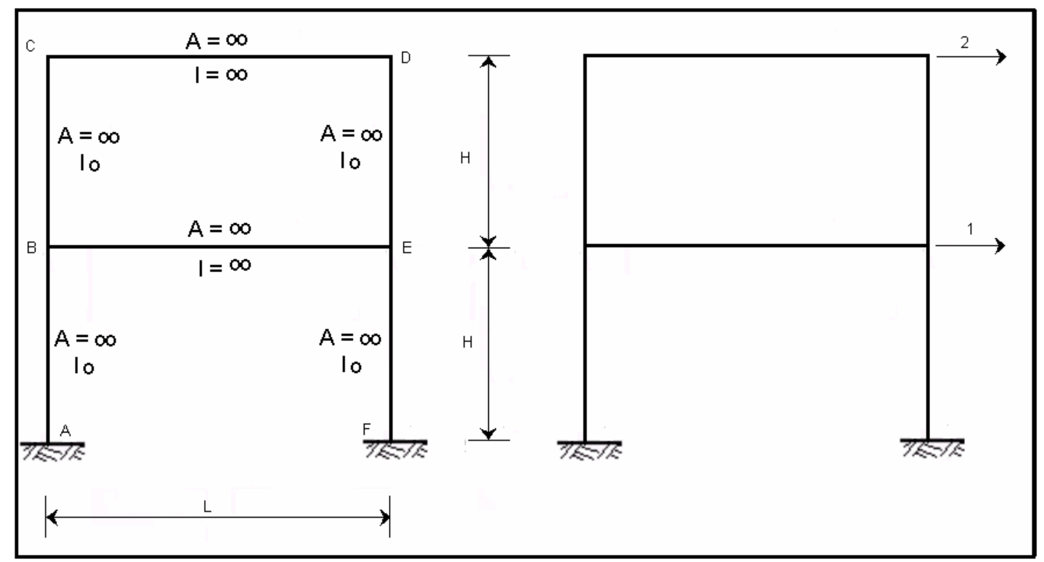
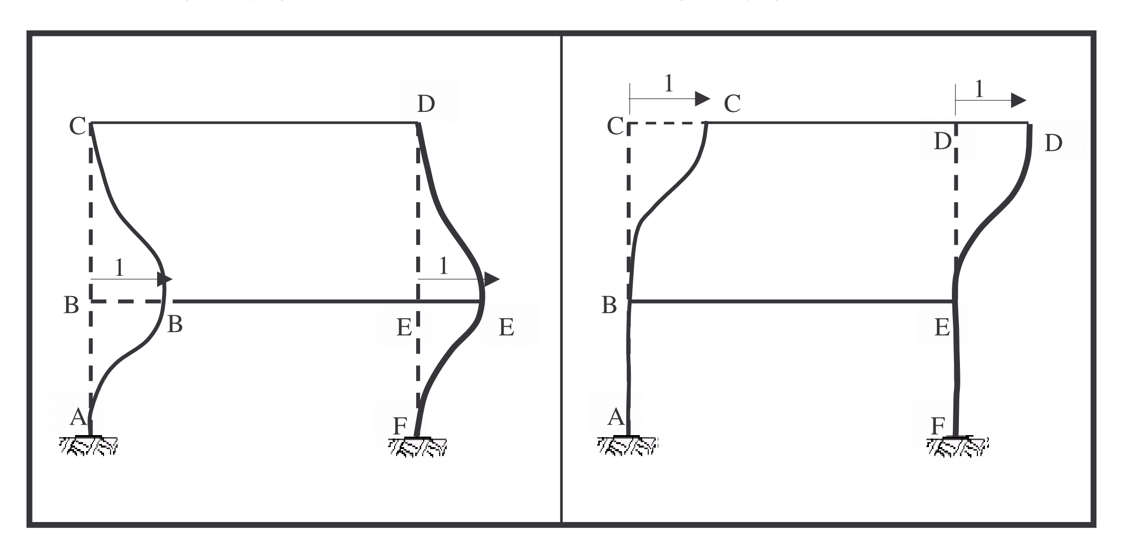


Figura 2.8.1 Estructura de ejemplo 4. **Figura 2.8.2** Sistema $Q-q$

♣ $q_1 = 1$ y $q_i = 0 \quad i \neq 1$ $q_2 = 1$ y $q_i = 0 \quad i \neq 2$



- **EJEMPLO N.- 5**

Para la estructura de la figura 2.9.1, seleccione un sistema de coordenadas $Q-q$ apropiado, dibuje las deformadas elementales y en cada una de ellas defina las coordenadas del miembro BC.

- **SOLUCION**

Sea α el ángulo que forma el eje del miembro BC con la horizontal, de la geometría de la estructura se desprende que: sen α = 3/5 cos α = 4/5.En la figura 2.9.2 se presentan los tres grados de libertad que tiene la estructura y las deformadas elementales son:

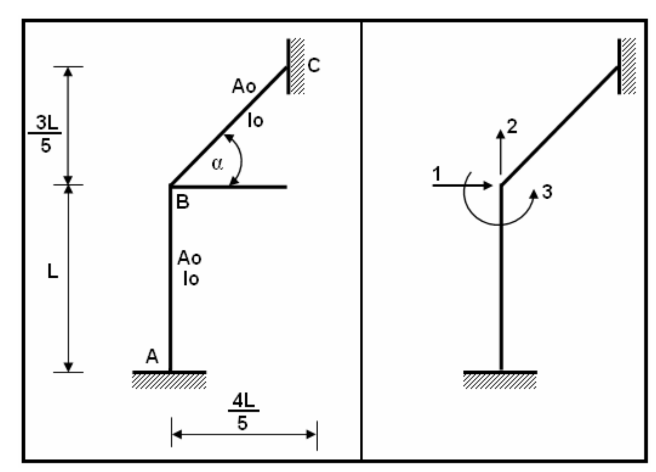


Figura 2.9.1 Pórtico plano de ejemplo 5. **Figura 2.9.2** Sistema $Q - q$

♣ Deformada elemental q_1

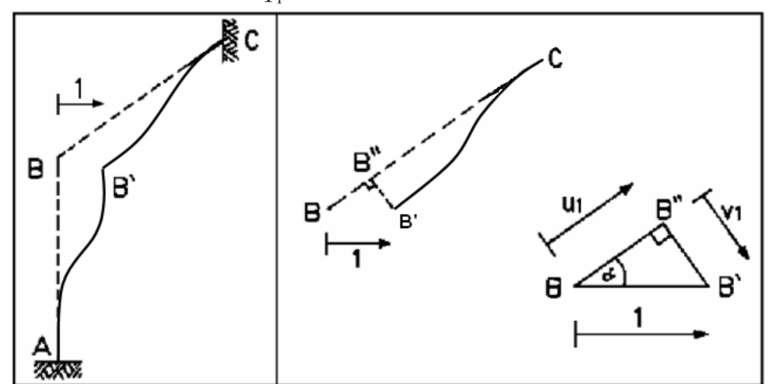


Figura 2.9.3 Deformada q_1 **Figura 2.9.4** Coordenadas del elemento BC.

De la figura 2.9.4, se tiene que:

$u_1 = \cos \alpha = 4/5$ $u_2 = 0$
$v_1 = -\text{sen } \alpha = -3/5$ $v_2 = 0$
$\Theta_1 = 0$ $\Theta_2 = 0$

♣ Deformada elemental q_2

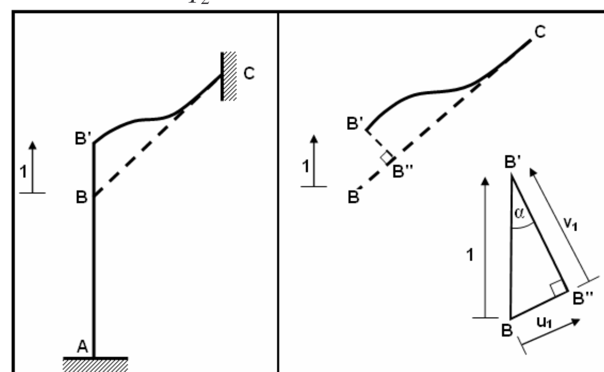


Figura 2.9.4 Deformada elemental q_2 **Figura 2.9.5** Coordenadas del elemento BC

Tanto en la coordenada elemental q_1 como en esta deformada para definir las coordenadas del miembro BC se procede como sigue:

i) Se determina B” para esto el nudo B primero se deforma axialmente u_1 y luego transversalmente v_1 hasta llegar a B’.
ii) Aparte se dibuja el triángulo rectángulo BB’ B” y en él se ubica el ángulo α .

Para la deformada elemental q_2 se tiene:

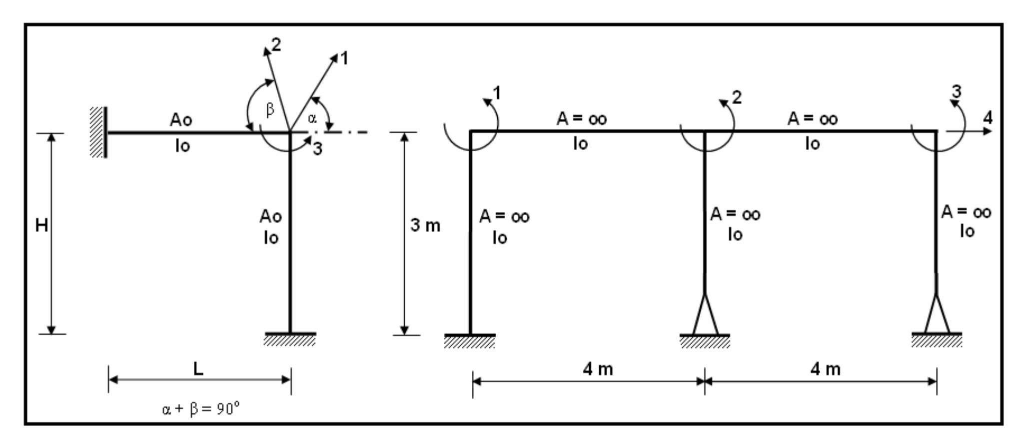
u_1 = sen α = 3/5	$u_2 = 0$
v_1 = cos α = 4/5	$v_2 = 0$
$\Theta_1 = 0$	$\Theta_2 = 0$

♣ En la deformada elemental q_3 se tiene:

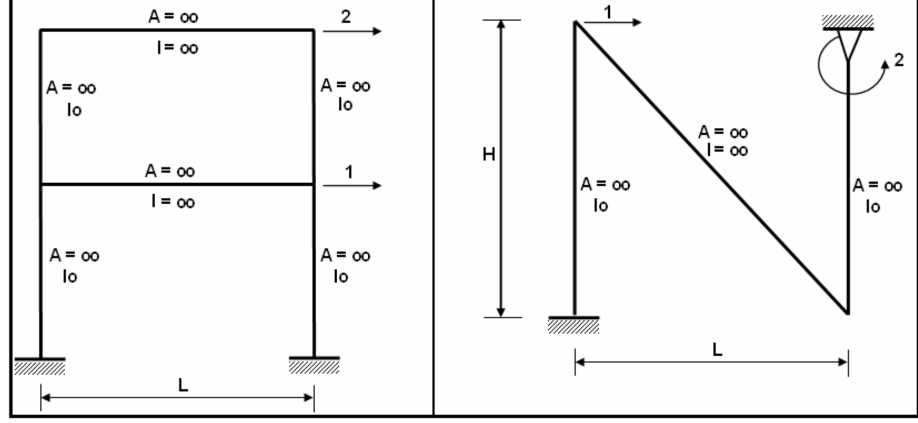
$u_1 = 0$	$u_2 = 0$
$v_1 = 0$	$v_2 = 0$
$\Theta_1 = 1$	$\Theta_2 = 0$

2.5 EJERCICIOS PROPUESTOS

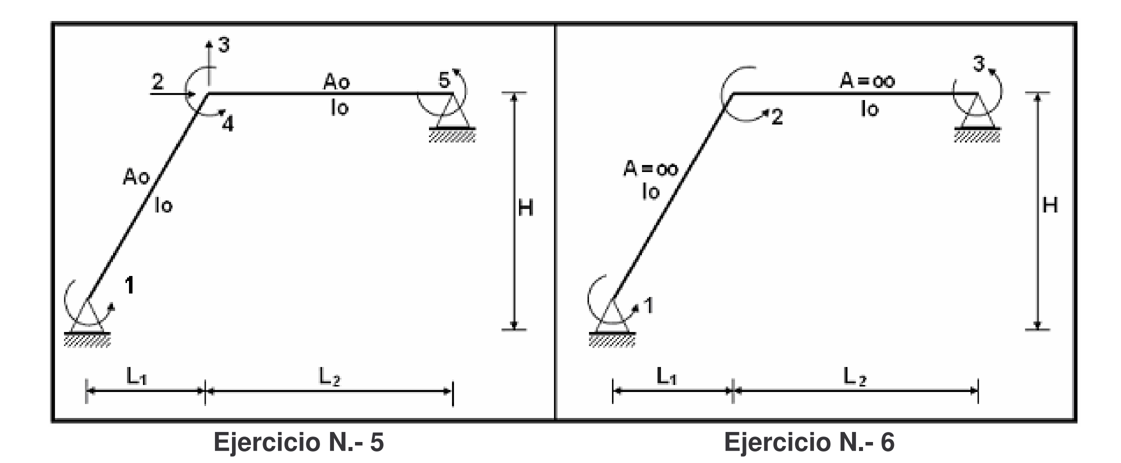
En las siguientes estructuras se ha seleccionado un sistema $Q-q$ para cada ejercicio. Se pide dibujar todos los diagramas de desplazamientos elementales.



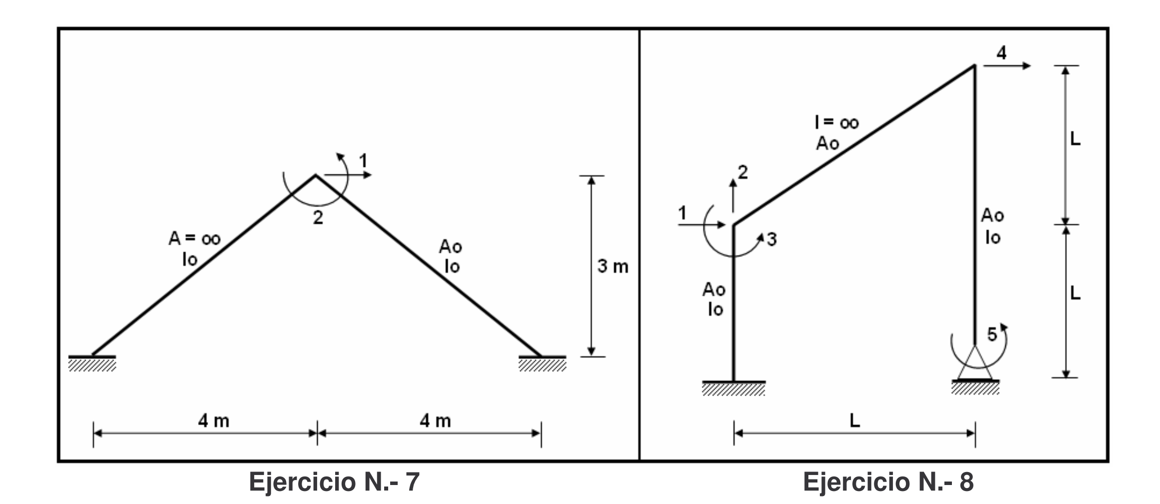
Ejercicio N.- 1 **Ejercicio N.- 2**



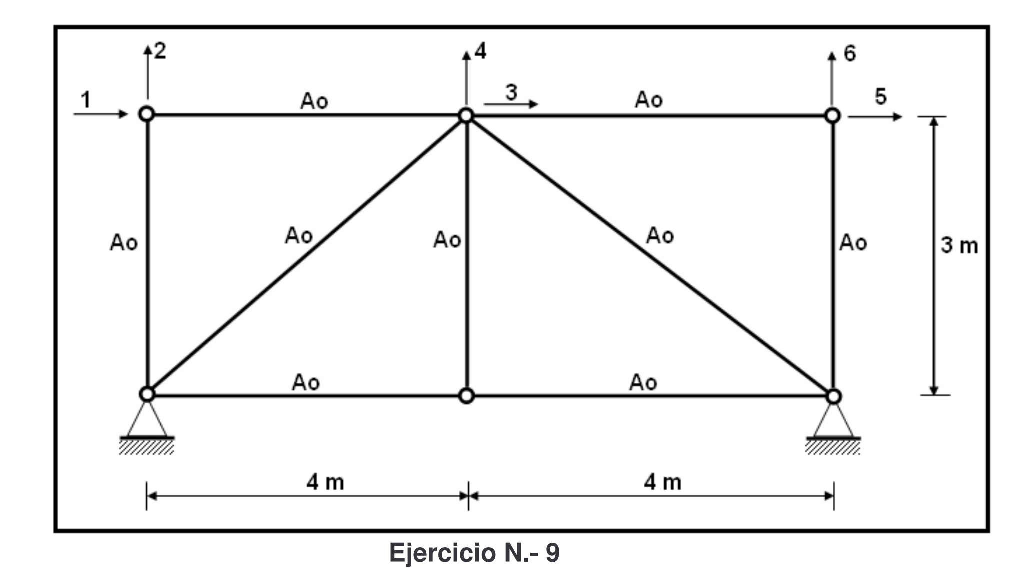
Ejercicio N.- 3 **Ejercicio N.- 4**



Ejercicio N.- 5 Ejercicio N.- 6



Ejercicio N.- 7 Ejercicio N.- 8



Ejercicio N.- 9

CAPITULO 3

FUNCIONES DE FORMA O DE INTERPOLACIÓN

RESUMEN

Las funciones de forma tienen una aplicación muy amplia en el análisis estático y dinámico de estructuras razón por la cual en este capítulo se le da la importancia respectiva y se presentan algunas aplicaciones de las mismas. Se inicia el estudio deduciendo las funciones de forma desde el punto de vista estructural y luego con el objeto de que el lector vea que son funciones de interpolación se calculan las mismas con los interpoladores de Lagrange y Hermite.

Las aplicaciones que aquí se dan están orientadas al cálculo de ordenadas de la elástica y obtención de momentos de empotramiento perfecto para cualquier tipo de carga, todo esto en miembros lineales de sección constante.

Se presenta además la manera como se obtiene los estados de carga **D** y **L** correspondientes a carga permanente y transitoria respectivamente, para el diseño sismorresistente de un edificio de hormigón armado y luego se obtiene las acciones de empotramiento perfecto con funciones de forma.

3.1 ORDENADAS DE LA ELASTICA

Dado un pórtico plano cualquiera, como el mostrado en la figura 3.1.1. En el elemento inclinado BC se tiene un punto interior P. Ahora al actuar cualquier tipo de cargas sobre la estructura esta se deforma como lo ilustra la figura 3.1.2; el punto P pasa a P´. Se desea encontrar las ordenadas de la elástica u(x), v(x) y $\theta(x)$ para el punto P. Siendo:

- u(x) Componente de desplazamiento axial del punto P.
- v(x) Componente de desplazamiento transversal del punto P.
- $\theta(x)$ Rotación del punto P.

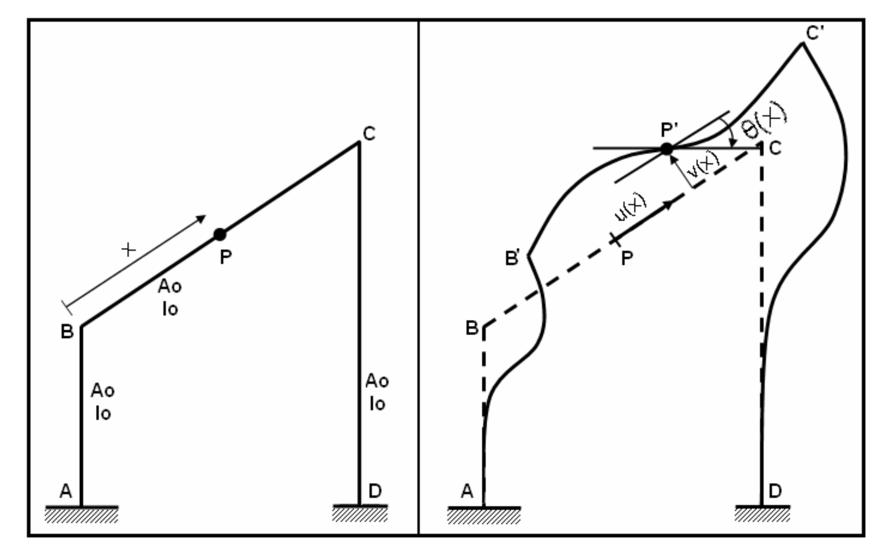


Figura 3.1.1 Pórtico cualquiera. **Figura 3.1.2** Ordenadas de la elástica del punto P.

Para comprender el cálculo de las ordenadas de la elástica se aísla al elemento BC y se dibujan las coordenadas del elemento miembro como lo indica la figura 3.1.3.

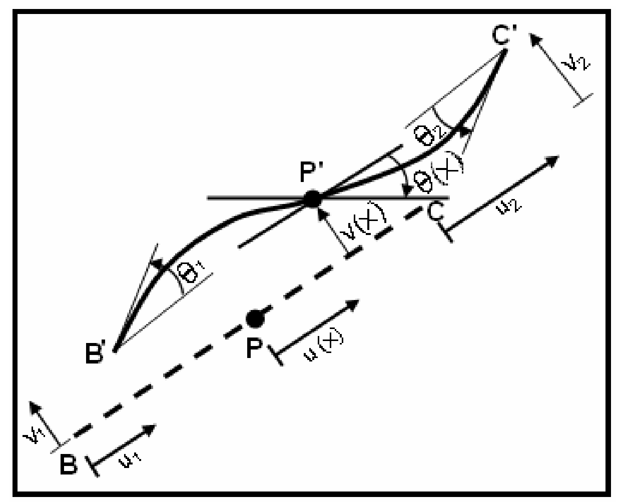


Figura 3.1.3 Coordenadas de miembro y ordenadas de la elástica

Para encontrar las ordenadas de la elástica **se verá la contribución de cada una de las coordenadas de miembro y luego se aplicará el principio de superposición lineal.**

3.2 PRIMERA FORMA DE CÁLCULO

3.2.1 Efecto de u_1 en la ordenada de la elástica

En el miembro lineal de la figura 3.2.1 **solo existe un desplazamiento axial del nudo inicial u_1 y las demás coordenadas locales son nulas.**

Por facilidad a este elemento se lo considera horizontal, pero su aplicación es general. Para que el miembro de la figura 3.2.1 experimente un desplazamiento u_1 es necesario aplicar una fuerza axial N, figura 3.2.3.

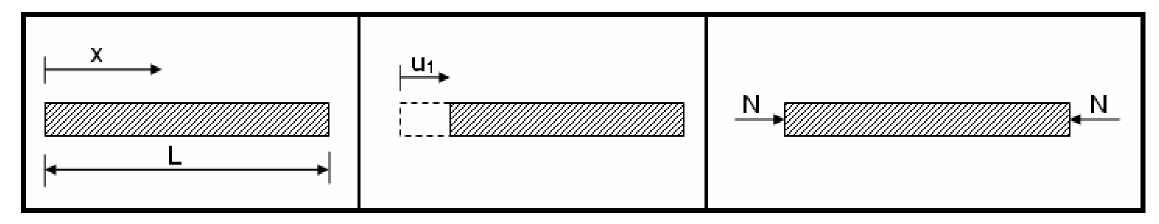


Figura 3.2.1 Elemento Axial **Figura 3.2.2** Solo existe u_1 **Figura 3.2.3** Fuerza axial que produce u_1

De la resistencia de materiales se conoce:

$$u_1 = \int_O^L \frac{N dx}{A(x) E} \quad (3.1)$$

donde $A(x)$ es el área de la sección transversal, para el caso de sección variable es función de X, E es el módulo de elasticidad del material y N es la fuerza axial, la misma que es constante, razón por la cual sale de la integral. Luego:

$$u_1 = N \int_0^L \frac{dx}{A(x) E}$$

:
En consecuencia la fuerza axial que produce un corrimiento axial de magnitud u_1 es:

$$N = \frac{u_1}{\int_0^L \frac{dx}{A(x) E}} \quad (3.2)$$

Ahora interesa calcular el desplazamiento longitudinal que experimenta un punto cualquiera P del miembro que se encuentra a una distancia X del nudo inicial, cuando existe N, si el nudo final permanece fijo. En la figura 3.2.4 se ilustra el problema en la parte superior de dicha figura se indica la posición inicial del elemento y en la inferior el problema que se va a resolver.

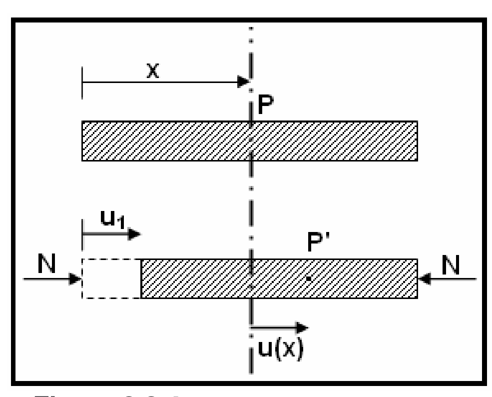


Figura 3.2.4 Descripción del problema

La deformación u(x) será igual a la deformación del nudo inicial u_1 menos la deformación producida por la fuerza axial N en el intervalo de longitud X.

$$u(x) = u_1 - \int_0^X \frac{N\ dx}{A(x)\ E}$$

Por ser N constante se tiene:

$$u(x) = u_1 - N\int_0^X \frac{dx}{A(x)\ E} \qquad (3.3)$$

Al reemplazar la ecuación (3.2), en la ecuación (3.3) y al factorar u_1, se tiene:

$$u(x) = u_1 \left(1 - \frac{\int_0^X \frac{dx}{A(x)\ E}}{\int_0^L \frac{dx}{A(x)\ E}} \right) \qquad (3.4)$$

A la expresión encerrada entre paréntesis se le conoce con el nombre de **función de forma o función de interpolación** $\phi_1(x)$

$$\phi_1(x) = 1 - \frac{\int_0^X \frac{dx}{A(x)\ E}}{\int_0^L \frac{dx}{A(x)\ E}} \qquad (3.5)$$

Luego:

$$u(x) = u_1\ \phi_1(x) \qquad (3.6)$$

Como se observa $\varnothing_1$(x), al igual que las demás funciones de forma que se van a calcular, depende de las propiedades geométricas del elemento.

Para elementos de sección constante se tiene que: EA (x) = EA, al reemplazar este valor y resolver la integral definida en la ecuación (3.5), se encuentra:

$$\phi_1(x) = 1 - \frac{X}{L} \qquad (3.7)$$

- **EJEMPLO N.- 1**

Calcular la función de forma $\varnothing_1$(x) para un elemento de sección constante, desde el punto de vista matemático.

- **SOLUCIÓN**

Para elementos de sección constante, la variación de la deformación axial, es de tipo lineal. En consecuencia las condiciones de contorno son las indicadas en la tabla 3.1

Tabla 3.1 Condiciones de borde

Punto	x	U(x)
1	0	u_1
2	L	0

La pendiente m de la recta, es:

$$m = \frac{0 - u_1}{L - 0} = -\frac{u_1}{L}$$

Luego de la ecuación de la recta, que pasa por un punto dado y se conoce su pendiente es:

$$u(x) - u_1 = -\frac{u_1}{L}(X - 0)$$

$$u(x) = u_1 - \frac{u_1}{L} X$$

$$u(x) = u_1\left(1 - \frac{X}{L}\right) = u_1 \; \phi_1(x)$$

3.2.2 Efecto de v_1 en la ordenada de la elástica

Es complicado, por las integrales que resultan, encontrar las ordenadas de la elástica en un elemento de sección variable cuando solo existe v_1, desplazamiento transversal al eje del elemento en el nudo inicial, razón por la cual se presenta el cálculo para un elemento de sección constante, figura 3.3. Para los elementos de sección variable es conveniente resolver las integrales por métodos numéricos.

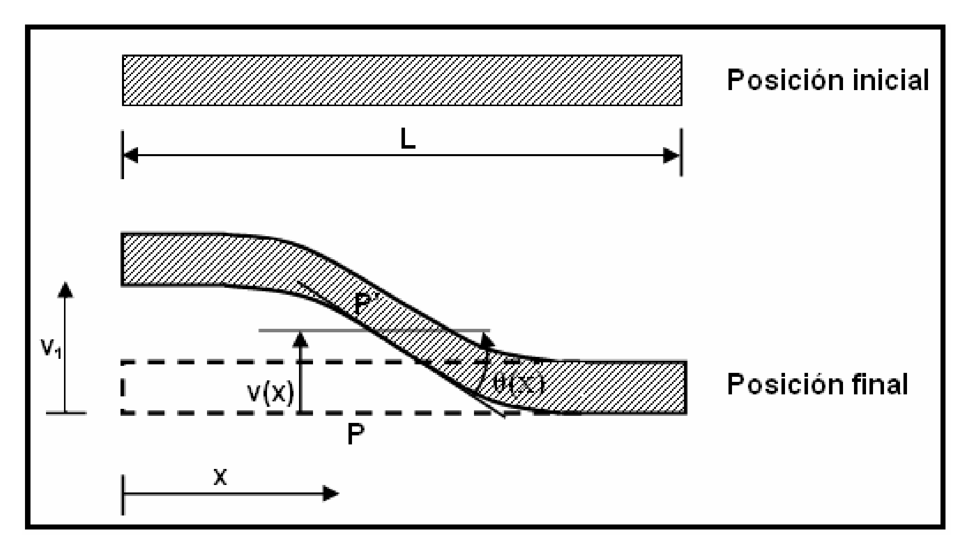


Figura 3.3 Solo existe deformación transversal en el nudo inicial y las demás son nulas.

Se va a resolver, un problema de flexión, sin carga en el tramo, $P_0 = 0$ y únicamente con condiciones de borde.

La ecuación diferencial que gobierna la flexión, en un elemento de sección constante, en el que se desprecia el efecto del corte, es:

$$\frac{d^4 v}{dx^4} = \frac{P_o}{EI} \qquad (3.8)$$

Las variables, no definidas todavía, son P_o que es la carga transversal que actúa en el elemento, I es el momento de inercia a flexión del elemento y v es la ordenada transversal de la elástica. Al ser $P_0 = 0$, la ecuación diferencial (3.8) se transforma, en:

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = 0 \qquad (3.9)$$

Las condiciones de contorno, del problema, son:

1.-	En X = 0	$v(x) = v_1$	(3.9.1)
2.-	En X = 0	$v´(x) = 0$	(3.9.2)
3.-	En X = L	$v(x) = 0$	(3.9.3)
4.-	En X = L	$v´(x) = 0$	(3.9.4)

Las integrales de la ecuación (3.9), al ser la inercia constante, son:

$$EI \frac{d^3 v}{dx^3} = A \qquad (3.10.1)$$

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = AX + B \qquad (3.10.2)$$

$$EI \frac{dv}{dx} = \frac{AX^2}{2} + BX + C \qquad (3.10.3)$$

$$EIv(x) = \frac{AX^3}{6} + \frac{BX^2}{2} + CX + D \qquad (3.10.4)$$

donde A, B, C y D son constantes de integración las mismas que se obtienen al aplicar las condiciones de borde, que están definidas de la ecuación (3.9.1) a (3.9.4)

Al reemplazar las condiciones de borde, (3.9.1) y (3.9.2) en las ecuaciones (3.10.4) y (3.10.3), se encuentran los valores de las constantes de integración D y C. Estas son:

$$D = EI\, v_1$$
$$C = 0$$

Ahora al reemplazar las condiciones (3.9.3) y (3.9.4) en (3.10.4) y (3.10.3) se halla:

$$0 = \frac{A\,L^3}{6} + \frac{B\,L^2}{2} + C\,L + D$$

$$0 = \frac{A\,L^2}{2} + B\,L + C$$

La solución del sistema reporta luego de reemplazar C y D.

$$A = \frac{12EI}{L^3} v_1 \qquad\qquad B = -\frac{6EI}{L^2} v_1$$

Al reemplazar A, B, C y D en la expresión (3.10.4) y luego de simplificar, se tiene:

$$v(x) = v_1\left(1 - \frac{3X^2}{L^2} + \frac{2X^3}{L^3}\right) \qquad (3.11)$$

Se denomina función de forma $\phi_2(x)$ a la expresión encerrada en el paréntesis.

$$\phi_2(x) = 1 - \frac{3X^2}{L^2} + \frac{2X^3}{L^3} \qquad (3.12)$$

Luego:

$$v(x) = v_1\ \phi_2(x) \qquad (3.13)$$

El giro $\theta(x)$ se encuentra derivando la ecuación (3.13) con respecto a X. Por otra parte nótese que u(x) = 0 en este problema.

- **EJEMPLO N.- 2**

Determinar la función de forma $\varnothing_2$(x) para un elemento de sección constante, utilizando el polinomio de Hermite.

- **SOLUCIÓN**

Cuando se conoce el valor de una función y el valor de su derivada, como en el presente caso, se puede aplicar la fórmula de Hermite para encontrar la elástica v (x). Esto es posible ya que la elástica para elementos de sección constante no tiene una variación brusca. Las condiciones de borde para este problema se presentan en la tabla 3.2.

Tabla 3.2 Condiciones de borde

Punto i	**0**	**1**
X_i	0	L
$v(x)$	v_1	0
$\theta(x)$	0	0

La fórmula de Hermite, para el presente caso y también para el cálculo de $\phi_3(x), \phi_5(x)$ y $\phi_6(x)$ es la siguiente:

$$v(x) = R_0 v(x_0) + R_1 v(x_1) + S_0\theta(x_0) + S_1\theta(x_1) \qquad (3.14.1)$$

donde $v(x_0)$ es el valor de v(x) en el punto cero, nudo inicial, $v(x_1)$ es el valor de v(x) en el punto uno, nudo final, $\theta(x_o)$ es el valor de $\theta(x)$ en el punto cero, nudo inicial y $\theta(x_1)$ es el valor de $\theta(x)$ en el punto uno, nudo final.

Para el cálculo de las funciones de forma, en elementos de sección constante, en los que se conoce las condiciones de borde con el interpolador de Hermite se debe calcular primero los multiplicadores de Lagrange utilizando la ecuación (3.15.4).

$$L_o(x) = \frac{X - L}{0 - L} \qquad\qquad L_1(x) = \frac{X - 0}{L - 0}$$

Los multiplicadores de Lagrange $L_o(x)$ y $L_1(x)$ que se obtienen para el punto 0 y 1 con la ecuación (3.15.4) pueden escribirse de la siguiente forma:

$$L_o(x) = 1 - \frac{X}{L}$$
$$L_1(x) = \frac{X}{L}$$

Las derivadas con respecto a X de los multiplicadores de Lagrange, son:

$$L_o^{'} = -\frac{1}{L}$$
$$L_1^{'} = \frac{1}{L}$$

Los valores de R_0 y R_1, se obtienen con la ecuación (3.15.2)

$$R_o = \left[1 - 2\, L_o^{'}\; X\right]\left(L_o\right)^2$$
$$R_1 = \left[1 - 2\, L_1^{'}(X - L)\right]\left(L_1\right)^2$$

Para S_0 y S_1 se emplea la ecuación (3.15.3)

$$S_o = X(L_o)^2$$
$$S_1 = (X - L)(L_1)^2$$

Por las condiciones de borde del problema la ecuación (3.14.1) queda:

$$v(x) = v_1\; R_o$$
$$v(x) = v_1\left[1 - 2L_o^{'}\; X\right](L_o)^2$$

$$v(x) = v_1\left[1 - 2\left(-\frac{1}{L}\right)X\right]\left(1 - \frac{X}{L}\right)^2 = v_1\left(1 + 2\frac{X}{L}\right)\left(1 - \frac{X}{L}\right)^2$$

Al desarrollar el producto indicado se encuentra:

$$v(x) = v_1\left(1 - \frac{3X^2}{L^2} + \frac{2X^3}{L^3}\right)$$

de donde:

$$\phi_2(x) = 1 - \frac{3X^2}{L^2} + \frac{2X^3}{L^3}$$

Por considerar de interés, se presenta el caso general de la fórmula de Hermite, cuando se conoce el valor de la función Y_i y la derivada $Y_i´$.

$$P(x) = \sum R_i(X_o)\,Y_i + \sum S_i(X)\,Y_i^{'} \qquad (3.15.1)$$

$$R_i(x) = \left[1 - 2L_i^{'}(X_i)(X - X_i)\right]\left[L_i(X)\right]^2 \qquad (3.15.2)$$

$$S_i(x) = (X - X_i)\,\left[L_i(X)\right]^2 \qquad (3.15.3)$$

donde $L_i(x)$ es el multiplicador de Lagrange.

$$L_i(x) = \frac{(X - X_0)(X - X_1)\ldots(X - X_{i-1})(X - X_{i+1})\ldots(X - X_n)}{(X_i - X_0)(X_i - X_1)\ldots(X_i - X_{i-1})(X_i - X_{i+1})\ldots(X_i - X_n)} \qquad (3.15.4)$$

3.2.3 Efecto de θ_1 en la ordenada de la elástica

Con las mismas consideraciones indicadas en el numeral anterior, se tiene que en el miembro existe únicamente θ_1, las demás coordenadas son nulas. En la figura 3.4 se describe el problema, en la parte superior se indica la posición inicial y en la inferior el problema de flexión a resolver.

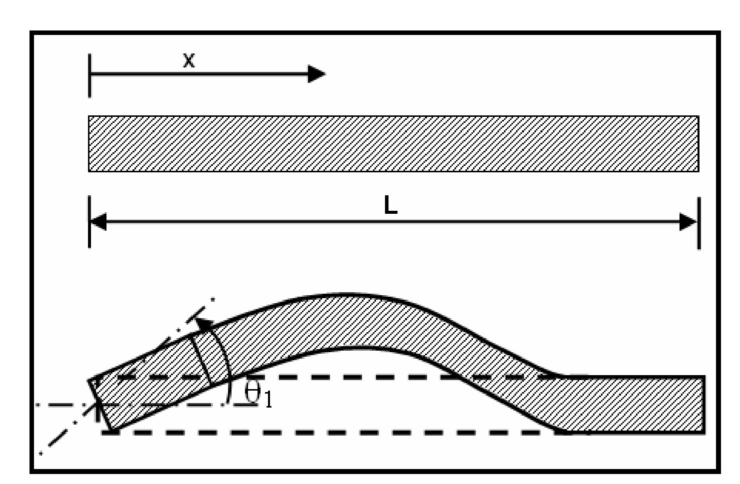


Figura N.- 3.4 Solo existe Θ_1, las demás componentes de desplazamiento son nulas.

El problema es similar al que se obtuvo $\phi_2(x)$. Únicamente cambian las condiciones de borde, en este caso son:

1. En X = 0 — v(x) = 0 — (3.16.1)
2. En X = 0 — v´(x) = θ_1 — (3.16.2)
3. En X = L — v(x) = 0 — (3.16.3)
4. En X = L — v´(x) = 0 — (3.16.4)

Reemplazando las condiciones de borde en las ecuaciones (3.10.4) y (3.10.3) se encuentra el sistema de ecuaciones lineales que conduce al cálculo de las constantes de integración. La solución de este sistema reporta:

$$A = \frac{6EI}{L^2}\theta_1 \qquad B = -\frac{4EI}{L}\theta_1 \qquad C = EI\theta_1 \qquad D = 0$$

Finalmente al sustituir los valores de A, B, C y D en la expresión (3.10.4), se encuentra luego de alguna simplificación:

$$v(x) = \theta_1 \left(\frac{X^3}{L^2} - 2\frac{X^2}{L} + X \right) = \theta_1 \ \phi_3(x) \qquad (3.17.1)$$

Por tanto:

$$\phi_3(x) = \frac{X^3}{L^2} - 2\frac{X^2}{L} + X = X\left(1 - \frac{X}{L}\right)^2 \qquad (3.17.2)$$

- **EJEMPLO N. 3**

Calcular $\phi_3(x)$ para un elemento de sección constante por medio del interpolador de Hermite.

- **SOLUCIÓN**

Tabla 3.3 Condiciones de borde para ejemplo 3.

Punto i	**0**	**1**
X_i	0	L
v(x)	0	0
$\theta(x)$	θ_1	0

Las condiciones de borde son:

$v(x_0) = 0$ $v(x_1) = 0$

$v(x_o) = \theta_1$ $\theta(x_1) = 0$

Al reemplazar en la ecuación (3.14.1) las condiciones de borde, se obtiene:

$$v(x) = \theta_1 \ S_o = \theta_1 \ X \ (L_o)^2 = \theta_1 \ X \left(1 - \frac{X}{L}\right)^2 \qquad \Rightarrow \phi_3(x) = X\left(1 - \frac{X}{L}\right)^2$$

Por un procedimiento similar, por medio de la teoría de estructuras o por medio de las matemáticas, se puede continuar calculando $\phi_4(x), \phi_5(x)$ y $\phi_6(x)$ sin embargo para comprender mejor lo que son las funciones de forma, las restantes se calculan de una manera diferente que se ha denominado Tercera forma de cálculo. La primera sería a partir de la solución de las ecuaciones diferenciales de flexión y carga axial y la segunda por medio de los Interpoladores de Lagrange y de Hermite.

3.3 TERCERA FORMA DE CÁLCULO

3.3.1 Expresiones de la Elástica

En base a los cálculos realizados, por inducción, se puede observar que las ecuaciones que definen las ordenadas de la elástica, son:

$$u(x) = u_1 \ \phi_1(x) + u_2 \ \phi_4(x) \qquad (3.18)$$

$$v(x) = v_1 \ \phi_2(x) + \theta_1 \ \phi_3(x) + v_2 \ \phi_5(x) + \theta_2 \ \phi_6(x) \qquad (3.19)$$

$$\theta(x) = \frac{dv(x)}{dx} = v\ ´(x) \qquad (3.20)$$

$\phi_1(x), \phi_2(x), \phi_3(x), \phi_4(x), \phi_5(x)$ y $\phi_6(x)$ son las funciones de forma o de interpolación asociadas a: u_1, v_1, θ_1, u_2, v_2, y θ_2 .

Se destaca que las ecuaciones (3.18), (3.19) y (3.20) son debidas a corrimientos y rotación de los nudos extremos de un miembro; en consecuencia, constituye la solución del problema complementario. **Por lo tanto, en las ecuaciones indicadas se debe añadir el problema primario para obtener la solución total**, como se indicó en el capítulo anterior.

3.3.2 Desplazamientos como cuerpo rígido

Sea un elemento $A = \infty$, e $I = \infty$, totalmente rígido; la deformada ante cualquier tipo de carga será como de cuerpo rígido y es la indicada en al figura 3.5.1. Las ordenadas de la elástica para este miembro se muestran en la figura 3.5.2.

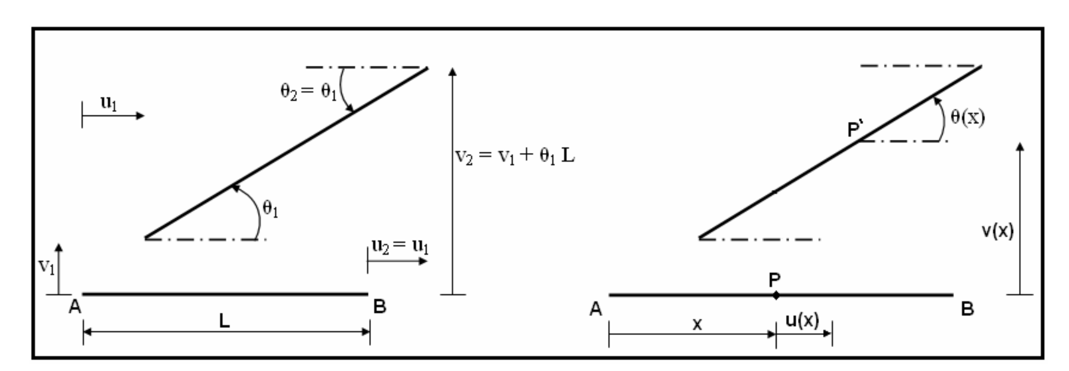


Figura 3.5.1 Deformada de un elemento totalmente rígido **Figura 3.5.2** Ordenadas de la elástica.

Por ser axialmente rígido, se tiene que:

$$u(x) = u_1 \qquad (3.21.1)$$

Del gráfico 3.5.2, se encuentra por geometría, lo siguiente:

$$v(x) = v_1 + \theta_1 \ X \qquad (3.21.2)$$

$$\theta(x) = \theta_1 \qquad (3.21.3)$$

En base a las ecuaciones (3.21.1), (3.21.2) y (3.21.3), se calcularán las funciones de forma $\phi_4(x), \phi_5(x)$ y $\phi_6(x)$ en el presente apartado.

3.3.3 Cálculo de ϕ_4(x)

Al igualar las ecuaciones (3.18) y (3.21.1) se obtiene:

$$u_1 \ \phi_1(x) + u_2 \ \phi_4(x) = u_1 \qquad (3.22.1)$$

Pero por ser el miembro, axialmente rígido $u_2 = u_1$. Luego, la ecuación (3.22.1), queda:

$$u_1\phi_1(x) + u_1\phi_4(x) = u_1$$

De donde:

$$\phi_1(x) + \phi_4(x) = 1 \qquad (3.22.2)$$

La ecuación (3.22.2) es fundamental y se aplica para elementos de sección constante o variable. Para un elemento de sección constante, se tiene:

$$\phi_4(x) = 1 - \phi_1(x) = 1 - \left(1 - \frac{X}{L}\right) = \frac{X}{L}$$

$$\phi_4(x) = \frac{X}{L} \qquad (3.22.3)$$

3.3.4 Cálculo de ϕ_5(x) y ϕ_6(x)

De igual manera, si en la expresión (3.21.2) se reemplaza la ecuación (3.19), se encuentra:

$$v(x) = v_1\phi_2(x) + \theta_1\phi_3(x) + v_2\phi_5(x) + \theta_2\phi_6(x) = v_1 + \theta_1(x)$$

Pero por ser miembro transversalmente rígido, se tiene:

$$v_2(x) = v_1 + \theta_1 L \qquad (3.23.1)$$

$$\theta_2 = \theta_1 \qquad (3.23.2)$$

Al reemplazar se obtiene:

$$v_1\,\phi_2(x) + \theta_1\,\phi_3(x) + v_1\,\phi_5(x) + \theta_1\,L\,\phi_5(x) + \theta_1\,\phi_6(x) = v_1 + \theta_1\,X$$

$$v_1[\phi_2(x) + \phi_5(x)] + \theta_1[\phi_3(x) + L\phi_5(x) + \phi_6(x)] = v_1 + \theta_1\,X$$

Para que esta expresión se cumpla, deberá cumplirse que:

$$\phi_2(x) + \phi_5(x) = 1 \qquad (3.23.3)$$

$$\phi_3(x) + L\,\phi_5(x) + \phi_6(x) = X \qquad (3.23.4)$$

Relaciones que permitirán calcular fácilmente $\phi_5(x)$ y $\phi_6(x)$ a partir de $\phi_2(x)$ y $\phi_3(x)$. Para un elemento lineal de sección constante se tiene:

$$\phi_5(x) = 1 - \phi_2(x) = 1 - \left(1 - 3\frac{X^2}{L^2} + 2\frac{X^3}{L^3}\right) = 3\frac{X^2}{L^2} - 2\frac{X^3}{L^3} = \frac{X^2}{L^2}\left(3 - \frac{2X}{L}\right)$$

$$\phi_5(x) = \frac{X^2}{L^2}\left(3 - \frac{2X}{L}\right) \qquad (3.24)$$

Usando, la relación $\phi_3(x) + L\,\phi_5(x) + \phi_6(x) = X$, y por un procedimiento análogo se tiene:

$$\phi_6(x) = -\frac{X^2}{L}\left(1 - \frac{X}{L}\right) \tag{3.25}$$

3.3.5 Resumen de las funciones de forma para miembros lineales totalmente flexibles de sección constante

$$\phi_1(x) = 1 - \frac{X}{L}$$
$$\phi_2(x) = 1 - 3\frac{X^2}{L^2} + 2\frac{X^3}{L^3}$$
$$\phi_3(x) = X\left(1 - \frac{X}{L}\right)^2$$
$$\phi_4(x) = \frac{X}{L}$$
$$\phi_5(x) = \frac{X^2}{L^2}\left(3 - 2\frac{X}{L}\right)$$
$$\phi_6(x) = -\frac{X^2}{L}\left(1 - \frac{X}{L}\right)$$

Relaciones fundamentales:

$$\phi_1(x) + \phi_4(x) = 1$$
$$\phi_2(x) + \phi_5(x) = 1$$
$$\phi_3(x) + L\phi_5(x) + \phi_6(x) = X$$

Expresiones de la Elástica:

$$u(x) = u_1\ \phi_1(x) + u_2\ \phi_4(x)$$
$$v(x) = v_1\ \phi_2(x) + \theta_1\ \phi_3(x) + v_2\ \phi_5(x) + \theta_2\ \phi_6(x)$$
$$\theta(x) = \frac{dv(x)}{dx} = v\,´(x)$$

3.3.6 Funciones de forma para miembros axialmente rígidos

Si un miembro es axialmente rígido A = ∞, significa que, $u_1 = u_2$, en consecuencia no existe $\phi_1(x)$ y $\phi_4(x)$, quedando de la siguiente manera las expresiones de la elástica:

$$u(x) = u_1 = u_2$$
$$v(x) = v_1\ \phi_2(x) + \theta_1\ \phi_3(x) + v_2\ \phi_5(x) + \theta_2\ \phi_6(x) \tag{3.26}$$
$$\theta(x) = \frac{dv(x)}{dx} = v\,´(x)$$

3.3.7 Funciones de forma para miembros transversalmente rígidos

El miembro no trabaja a flexión, I = ∞, solo se deforma axialmente . Por consiguiente, las expresiones de la elástica son:

$$u(x) = u_1 \ \phi_1(x) + u_2 \ \phi_4(x)$$

$$v(x) = v_1 + \theta_1 \ X \qquad (3.27.1)$$

$$\theta(x) = \theta_1 = \theta_2 \qquad (3.27.2)$$

Por lo tanto, cuando el miembro es transversalmente rígido, no es necesario calcular $\phi_2(x)$, $\phi_3(x)$, $\phi_5(x)$ y $\phi_6(x)$.

3.4 CUARTA FORMA DE CÁLCULO

3.4.1 Planteamiento de elementos finitos

Otra manera de interpolar, para el caso de flexión en que se desprecia el efecto de corte, consiste en imponerse un determinado polinomio, cuyas constantes se calculan en base a las condiciones de borde. Para imponerse el polinomio es necesario tener en cuenta que la deformación transversal de un elemento viene definida por la siguiente ecuación:

$$\varepsilon = y \ \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \qquad (3.28.1)$$

donde ε es la deformación transversal, que varia linealmente a lo largo de la luz, y es la ordenada vertical que define un punto de la viga, medida a partir del eje.

Para que la deformación sea lineal es necesario que v(x) sea polinomio de tercer grado de la forma:

$$v(x) = A + B \ X + C \ X^2 + D \ X^3 \qquad (3.28.2)$$

Al derivar (3.28.2) se encuentra el giro:

$$\theta(x) = B + 2C \ X + 3D \ X^2 \qquad (3.28.3)$$

Las condiciones de contorno que sirven para el cálculo de las constantes A, B, C Y D son:

1. En X = 0 $v(x) = v_1$ (3.28.4)
2. En X = 0 $\theta(x) = \theta_1$ (3.28.5)
3. En X = L $v(x) = v_2$ (3.28.6)
4. En X = L $\theta(x) = \theta_2$ (3.28.7)

Al reemplazar las cuatro condiciones, en las ecuaciones (3.28.2) y (3.28.3), se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} \qquad (3.29.1)$$

Algunos libros de elementos finitos, al sistema de ecuaciones 29.1 lo describen en forma compacta de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{U}^n = \boldsymbol{C}\ \beta \qquad (3.29.2)$$

donde $\boldsymbol{U}^n$ es el vector que contiene el término independiente del sistema, $\boldsymbol{C}$ es la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones lineales y β es el vector de incógnitas.

$$\beta = \boldsymbol{C}^{-1}\ \boldsymbol{U}^n \qquad (3.29.3)$$

La inversa de la matriz $\boldsymbol{C}$ es:

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix}$$

Luego:

$$\beta = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ -\frac{3}{L^2} v_1 - \frac{2}{L}\theta_1 + \frac{3}{L^2} v_2 - \frac{1}{L}\theta_2 \\ \frac{2}{L^3} v_1 + \frac{1}{L^2}\theta_1 - \frac{2}{L^3} v_2 + \frac{1}{L^2}\theta_2 \end{bmatrix}$$

Al sustituir las constantes A, B, C Y D en la ecuación (3.28.2), se encuentra luego de factorar, lo siguiente:

$$v(x) = v_1\ \phi_2(x) + \theta_1\ \phi_3(x) + v_2\ \phi_5(x) + \theta_2\ \phi_6(x)$$

En forma matricial:

$$v(x) = \Phi\ U^n$$

Siendo:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_2(x) & \phi_3(x) & \phi_5(x) & \phi_6(x) \end{bmatrix}$$

3.4.2 Cálculo de la matriz de rigidez de miembro

Al calcular la deformación ε, se tiene:

$$\varepsilon = y\ \frac{d^2 v}{dx^2} = y\ \frac{d^2}{dx^2}\Phi U^n = BU^n \qquad (3.30.1)$$

Siendo:

$$B = Y\ \frac{d^2}{dx^2}\Phi = y\begin{bmatrix} \frac{d^2}{dx^2}\phi_2(x) & \frac{d^2}{dx^2}\phi_3(x) & \frac{d^2}{dx^2}\phi_5(x) & \frac{d^2}{dx^2}\phi_6(x) \end{bmatrix} \qquad (3.30.2)$$

Las segundas derivadas de las funciones de forma indicadas, reportan:

$$B = y\left[-\frac{6}{L^2} + \frac{12\,X}{L^3} \qquad -\frac{4}{L} + \frac{6\,X}{L^2} \qquad \frac{6}{L^2} - \frac{12\,X}{L^3} \qquad -\frac{2}{L} + \frac{6\,X}{L^2} \right] \qquad (3.30.3)$$

Para encontrar la matriz de rigidez de un elemento, para el caso de flexión, se tiene:

$$\overline{K} = \iiint \overline{B}^{\,t} E \overline{B}\, d\left(volumen\right) \qquad (3.30.4)$$

No es el objetivo todavía, calcular la matriz de rigidez de un elemento, razón por la cual no se efectúa las integrales indicadas en la ecuación (3.30.4). Lo único que se pretendía era enseñar como se tratan las funciones de forma en el método de los elementos finitos y que se conozca una aplicación inmediata de las mismas.

3.5 APLICACIONES DE LAS FUNCIONES DE FORMA

3.5.1 Cálculo de momentos de Empotramiento

Del estudio anterior se deduce que: $\phi_1(x)$, es la elástica longitudinal cuando existe $u_1 = 1$ y los demás desplazamientos nulos. $\phi_2(x)$ es la elástica transversal cuando existe $v_2 = 1$ y los demás desplazamientos y rotaciones nulas, etc.

Si se analiza la viga de la figura 3.6.1, sobre la cual, actúa una carga concentrada P, a una distancia X del nudo inicial, se observa que la elástica es la presentada en la figura 3.6.2. Para que esto se cumpla es necesario que en los extremos actúen unas fuerzas y momentos de fijación.

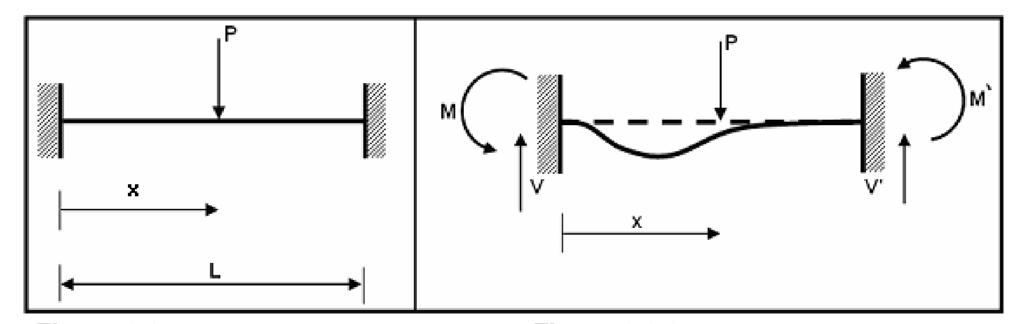


Figura 3.6.1 Estado de carga **Figura 3.6.2** Elástica de deformación

Ahora si se elimina el empotramiento pero se coloca su momento M, se tendrá lo ilustrado en la figura 3.6.3, nótese que el giro es nulo tanto en el nudo inicial como final a esto se denominará sistema I.

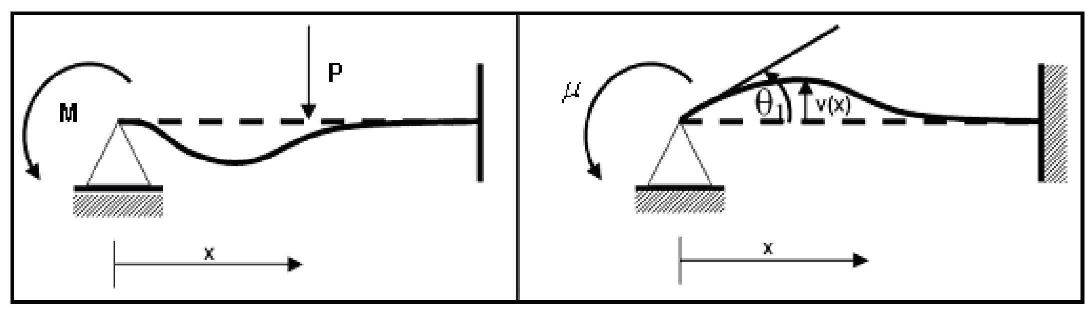


Figura 3.6.3 Sistema I **Figura 3.6.4** Sistema II

Por otra parte, al aplicar un momento cualquiera μ de tal forma que produzca un ángulo θ_1 en el nudo inicial y los demás corrimientos de nudo cero, como lo indica la figura 3.6.4, se tiene el sistema II.

El trabajo virtual del sistema I en el sistema II que se llamará TV_{I-II} es:

$$TV_{I-II} = M\ \theta_1 - P\ v(x)$$

De otro lado el trabajo virtual del sistema II en I, TV_{I-II} vale:

$$TV_{II-I} = \mu\ 0 = 0$$

Como TV_{I-II} = TV_{I-II} se tiene que:

$$M\theta_1 - P\ v(x) = 0$$

De donde:

$$M = \frac{P\ v(x)}{\theta_1}$$

Al existir únicamente el giro θ_1 (figura 3.6.4) el valor de $v(x) = \theta_1\ \phi_3(x)$. Luego:

$$M = P\ \phi_3(x) \qquad (3.31.1)$$

Por un procedimiento similar se obtiene:

$$M' = P\ \phi_6(x) \qquad (3.31.2)$$

3.5.2 Cálculo de cortantes de empotramiento

En el sistema de cargas de la figura 3.6.1 y con la elástica de deformación de la figura 3.6.2 se procede al cálculo del cortante en el nudo inicial para esto se elimina el empotramiento perfecto y se coloca un empotramiento móvil como lo ilustra la figura 3.6.5 pero actúa el cortante V. Este será el nuevo sistema I, nótese que el nudo inicial no se desplaza verticalmente; para que se mueva verticalmente se aplica una fuerza F de tal forma que produzca un corrimiento v_1 y todos los demás corrimientos de nudo nulos, teniéndose de esta manera el sistema II.

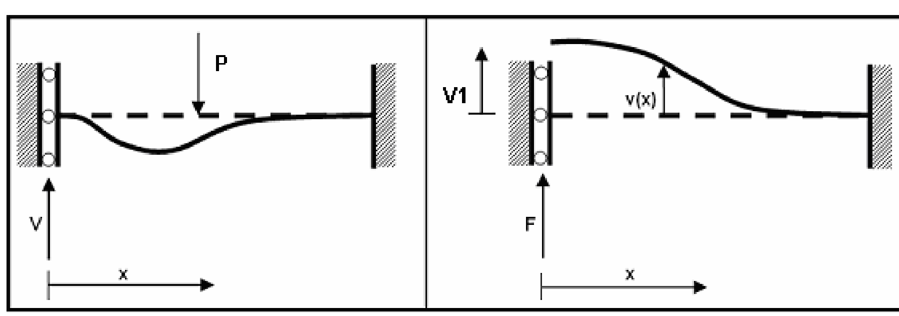


Figura 3.6.5 Sistema I **Figura 3.6.6** Sistema II

Al aplicar trabajos virtuales y proceder de forma similar al numeral anterior se tiene:

$$TV_{I-II} = V\ v_1 - P\ v(x) \qquad TV_{II-I} = F\ 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad V\ v_1(x) - P\ v(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad V = \frac{P\ v(x)}{v_1}$$

Pero $v(x) = v_1\ \phi_2(x)$ Luego:

$$V = P\ \phi_2(x) \qquad (3.31.3)$$

Al trabajar con $V^{'}$ se obtiene:

$$V^{'} = P\ \phi_5(x) \qquad (3.31.4)$$

3.5.3 Cálculo de la fuerza axial de empotramiento

En este caso la carga P actúa axial al eje del elemento y se encuentra a una distancia X. Se deja al lector la explicación de la forma como se obtiene la fuerza axial de empotramiento N en el nudo inicial y $N^{'}$ en el nudo final, en forma resumida se tiene:

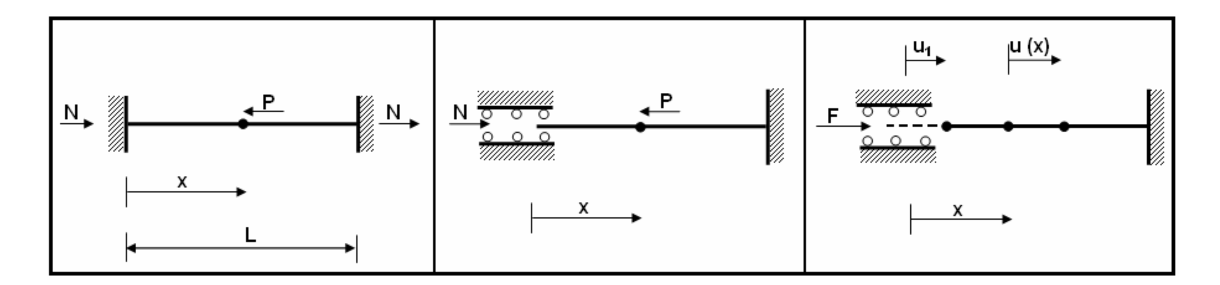


Figura 3.6.7 Estado de carga **Figura 3.6.8** Sistema I **Figura 3.6.9** Sistema II

$$TV_{I-II} = N\ u_1 - P\ u(x) \qquad TV_{II-I} = F\ 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad N\ u_1 - P\ u(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad N = \frac{P\ \ u(x)}{u_1}$$

Pero u(x) = u_1 (x) ϕ_1 (x).

Luego:

$$N = P\ \phi_1(x) \qquad (3.31.5)$$

De una manera similar se demuestra que:

$$N^{'} = P\ \ \phi_4(x) \qquad (3.31.6)$$

Es decir, que una interpretación estática de las funciones de formas es la siguiente:

- $\phi_1(x)$ es la línea de influencia de la fuerza axial N.
- $\phi_2(x)$ es la línea de influencia de la fuerza de corte V.

- $\phi_3(x)$ es la línea de influencia del momento M.
- $\phi_4(x)$ es la línea de influencia de la fuerza axial $N^{'}$.
- $\phi_5(x)$ es la línea de influencia de la fuerza de corte $V^{'}$.
- $\phi_6(x)$ es la línea de influencia del momento $M^{'}$.

Antes de proceder a realizar ejemplos, sobre el cálculo de momentos y fuerzas de empotramiento perfecto, es necesario tener presente:

i. La abscisa X se mide a lo largo del eje del elemento, no en la proyección horizontal como puede pensarse en elementos inclinados.

ii. En las ecuaciones (3.31.1),(3.31.2),(3.31.3) y (3.31.4), la carga P actúa perpendicular al eje del miembro, no es vertical en elementos inclinados sino perpendicular y hacia abajo.

iii. En las ecuaciones (3.31.5) y (3.31.6), la carga P es axial al eje del miembro, no es horizontal en elementos horizontales sino axial.

- **EJEMPLO N.- 4**

Para el elemento lineal de sección constante, de la figura 3.7, determinar las fuerzas y momentos de empotramiento perfecto.

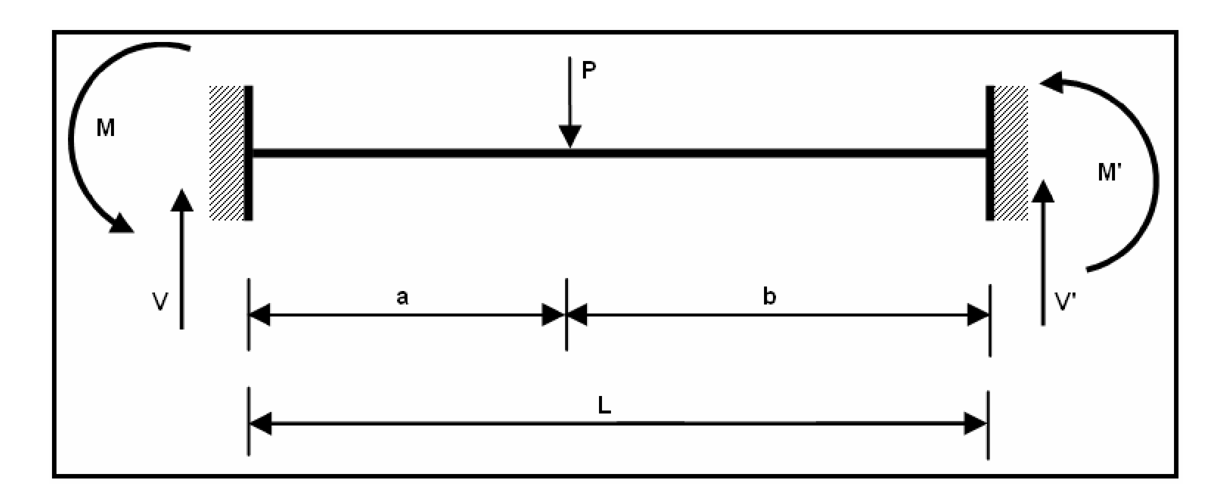


Figura 3.7 Estado de carga del ejemplo 4.

- **SOLUCION**

Para calcular las fuerzas y momentos de empotramiento primero se evalúan las funciones de forma en los puntos de aplicación de las cargas.

Para el ejemplo se tendrá para X = a:

$$\phi_1(x) = 1 - \frac{a}{L} = \frac{b}{L}$$

$$\phi_2(x) = 1 - \frac{3a^2}{L^2} + \frac{2a^3}{L^3}$$

$$\phi_3(x) = a\left(1 - \frac{a}{L}\right)^2 = \frac{ab^2}{L^2}$$

$$\phi_4(x) = \frac{a}{L}$$

$$\phi_5(x) = \frac{a^2}{L^2}\left(3 - \frac{2a}{L}\right)$$

$$\phi_6(x) = -\frac{a^2}{L}\left(1 - \frac{a}{L}\right) = -\frac{a^2 b}{L^2}$$

Solamente, para ilustrar la forma de cálculo se obtuvieron las seis funciones de forma, ϕ_1 (x) y ϕ_4 (x) no se requiere ya que la carga es perpendicular al elemento y no existe fuerza axial en consecuencia las fuerzas axiales de empotramiento perfecto son nulas.

$$V = P.\phi_2(x) = P\left(1 - \frac{3a^2}{L^2} + \frac{2a^3}{L^3}\right)$$

Se deja como ejercicio a que el estudiante demuestre que:

$$V = \frac{Pb^2}{L^3}(3a + b)$$

Para lo cual debe tener en cuenta que $a + b = L$

$$M = P.\phi_3(x) = \frac{Pab^2}{L^2}$$

$$V' = P.\phi_5(x) = \frac{Pa^2}{L^2}\left(3 - \frac{2a}{L}\right) = \frac{Pa^2}{L^3}(a + 3b)$$

$$M' = P.\phi_6(x) = -\frac{Pa^2 b}{L^2}$$

- **EJEMPLO N.- 5**

Encontrar las fuerzas y momentos de empotramiento del ejemplo N.- 4 si P = 10 T. El valor de a = 2 m. y b = 4 m.

- **SOLUCION**

$$V = \frac{P\,b^2}{L^3}(3a + b) = \frac{10 * 4^2}{6^3}(3 * 2 + 4) = 7.4074\,T.$$

$$M = \frac{P\,a\,b^2}{L^2} = \frac{10 * 2 * 4^2}{6^2} = 8.8889\,Tm.$$

$$V' = \frac{P\,a^2}{L^3}(a+3b) = \frac{10*2^2}{6^3}(2+3*4) = 2.5926\,T.$$

$$M' = -\frac{P\,a^2\,b}{L^2} = -\frac{10*2^2*4}{6^2} = -4.4444\,Tm.$$

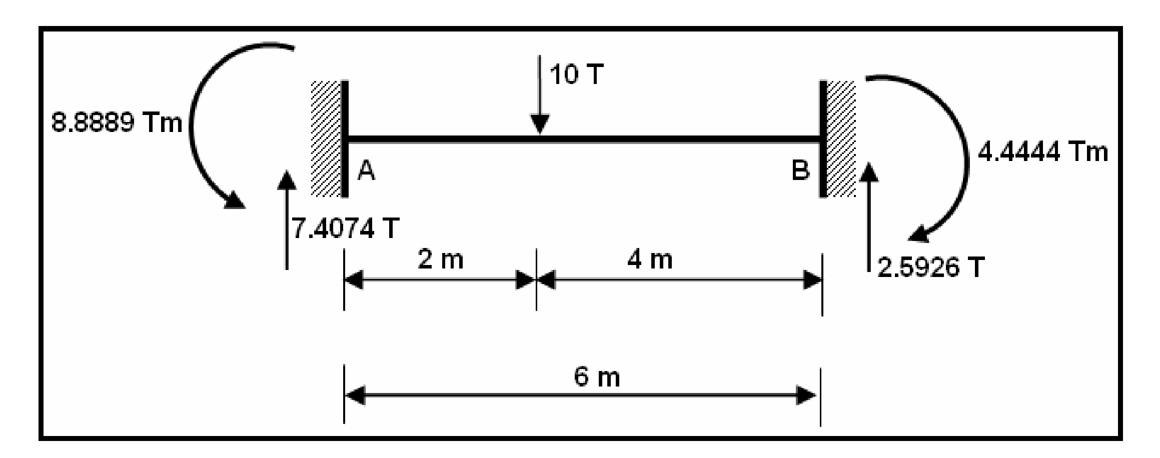


Figura 3.8 Resultados del ejemplo N.- 5

Para comprobar que el ejercicio está bien realizado, se debe verificar que exista equilibrio en el elemento.

$$\uparrow \sum F_Y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 7.4074 + 2.5926 - 10 = 0$$

$$\sum M_A = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 2.5926*6 + 8.8889 - 4.4444 - 10*2 = 0$$

- **EJEMPLO N.- 6**

Calcular las fuerzas y momentos de empotramiento perfecto para la viga de sección constante que se indica en la figura 3.9.1.

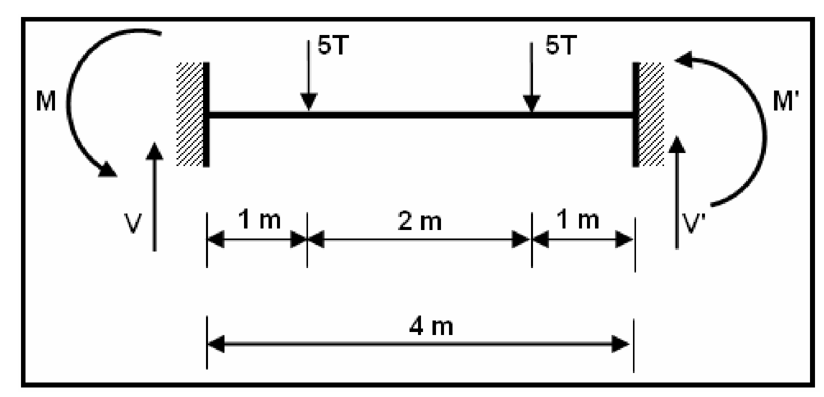
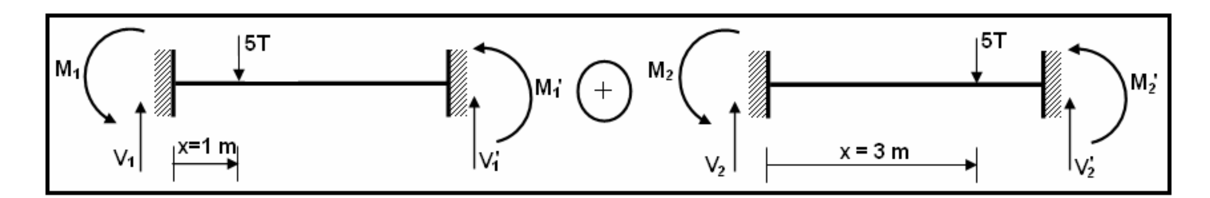


Figura 3.9.1 Datos de carga del ejemplo N.- 6

- **SOLUCION**

Se aplica el principio de superposición lineal en la solución del ejemplo 6. En consecuencia la solución total será igual a la solución de cuando se aplica la carga de 5 T. de la izquierda más la solución de cuando se aplica la otra carga de 5 T. de la derecha, como se indica a continuación.



- **Para** $X = 1\ m.$

$$\phi_2(x) = 0.84375 \quad \Rightarrow \quad V_1 = 5 * 0.84375 = 4.21875\ T.$$
$$\phi_3(x) = 0.56250 \quad \Rightarrow \quad M_1 = 5 * 0.56250 = 2.8125\ Tm.$$
$$\phi_5(x) = 0.15625 \quad \Rightarrow \quad V_1^{'} = 5 * 0.15625 = 0.78125\ T.$$
$$\phi_6(x) = -0.18750 \quad \Rightarrow \quad M_1^{'} = 5 * (-0.1875) = -0.9375\ Tm.$$

- **Para** $X = 3\ m.$

$$\phi_2(x) = 0.15625 \quad \Rightarrow \quad V_2 = 5 * 0.15625 = 0.78125\ T.$$
$$\phi_3(x) = 0.18750 \quad \Rightarrow \quad M_2 = 5 * 0.1875 = 0.93750\ Tm.$$
$$\phi_5(x) = 0.84375 \quad \Rightarrow \quad V_2^{'} = 5 * 0.84375 = 4.21875\ T.$$

$$\phi_6(x) = -0.56250 \qquad M_2^{'} = 5 * (-0.5625) = -2.8125\ Tm.$$

Luego:

$$V = V_1 + V_2 = 5.00\ T. \qquad V^{'} = V_1^{'} + V_2^{'} = 5.00\ T.$$
$$M = M_1 + M_2 = 3.75\ Tm. \qquad M^{'} = M_1^{'} + M_2^{'} = 3.75\ Tm.$$

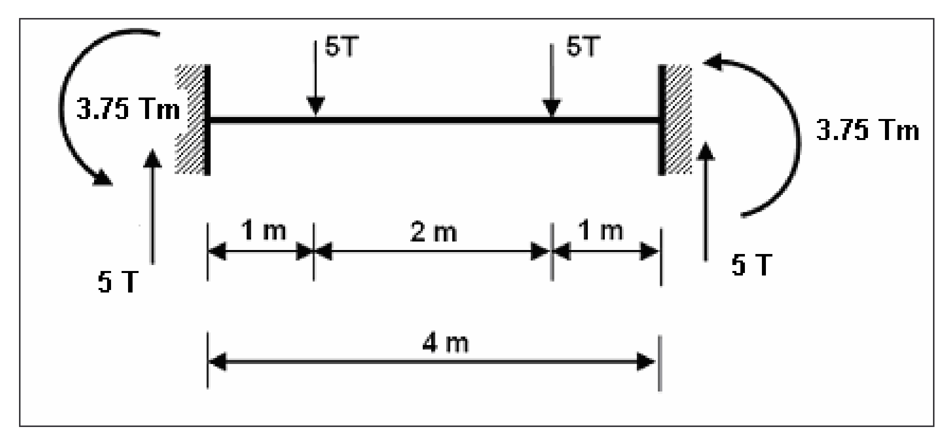


Figura 3.9.2 Solución del ejemplo 6

- **EJEMPLO N.- 7**

Calcular las fuerzas y momentos de empotramiento perfecto para la viga de sección constante de la figura 3.10.1 si sobre ella actúa una carga uniforme distribuida de magnitud P_0.

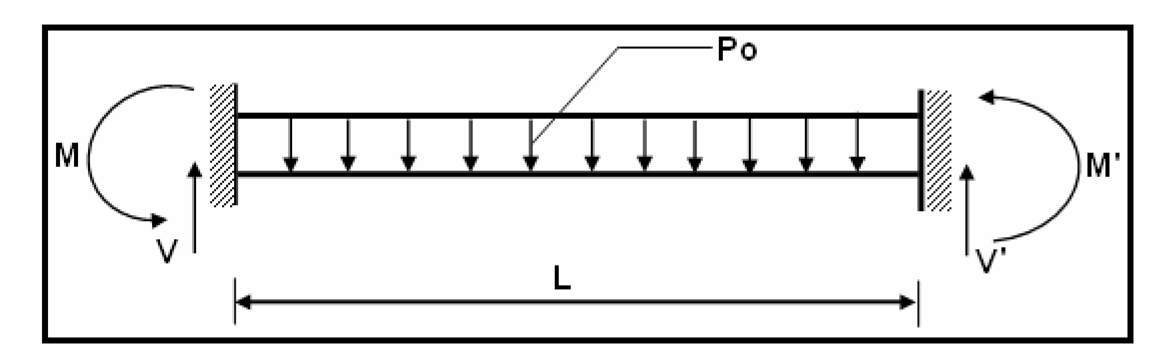


Figura 3.10.1 Viga con carga uniforme distribuida

- **SOLUCION**

En el ejemplo 6 cuando se tienen dos cargas puntuales al aplicar el principio de la superposición lineal los momentos y fuerzas de empotramiento son iguales a la contribución de cada una de las cargas. Este mismo principio se aplica el presente ejemplo teniendo en cuenta que la sumatoria no es nada más que la integral. Entonces para carga uniforme distribuida se tiene:

$$V = \int_0^L P_o \; \phi_2(x) \; dx$$

$$M = \int_0^L P_o \; \phi_3(x) \; dx$$

$$V^{'} = \int_0^L P_o \; \phi_5(x) \; dx$$

$$M^{'} = \int_0^L P_o \; \phi_6(x) \; dx$$

Los límites de las integrales correspondientes a donde actúan la carga para el presente caso de “0” a “L”.

Para el corte V se tiene:

$$V = \int_0^L P_0 \left(1 - \frac{3X^2}{L^2} + \frac{2X^3}{L^3}\right) dx = P_o \left| X - \frac{X^3}{L^3} + \frac{X^4}{2L^3} \right|_0^L \qquad \Rightarrow V = \frac{P_o L}{2}$$

$$M = \int_0^L P_o \left[X \left(1 - \frac{X}{L}\right)^2 \right] dx = \int_0^L P_o \left[X \left(1 - \frac{2X}{L} + \frac{X^2}{L^2}\right)\right] dx = \int_0^L P_o \left(X - \frac{2X^2}{L} + \frac{X^3}{L^2} \right)$$

$$M = P_0 \left| \frac{X^2}{2} - 2\frac{X^3}{3L} + \frac{X^4}{4L^2} \right|_o^L = P_o \left(\frac{L^2}{2} - \frac{2L^2}{3} + \frac{L^2}{4} \right) = P_o L^2 \left(\frac{6 - 8 + 3}{12} \right) \quad \Rightarrow M = \frac{P_o L^2}{12}$$

Al efectuar las integrales indicadas para $V^{'}$ y $M^{'}$ se obtienen:

$$V^{'} = \frac{P_o L}{2} \qquad\qquad M^{'} = -\frac{P_o L^2}{12}$$

El signo menos del momento $M^{'}$ significa que el sentido es horario.

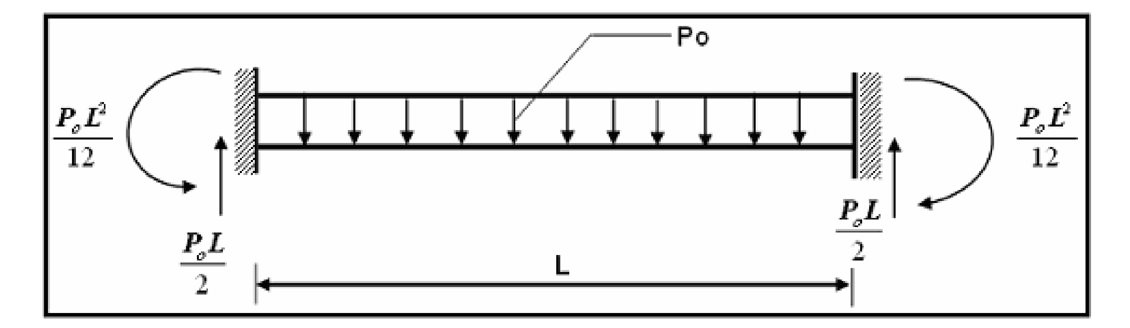


Figura 3.10.2 Acciones de empotramiento para carga uniforme

- **EJEMPLO N.- 8**

Encontrar las fuerzas y momentos de empotramiento, para el miembro de sección constante de la figura 3.11.1 si actúa un momento concentrado de magnitud M en el centro de la luz.

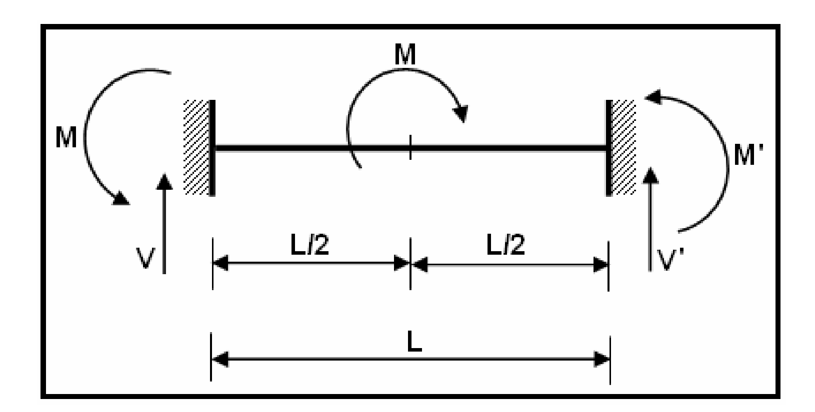


Figura 3.11.1 Estado de carga del ejemplo N.- 8

- **SOLUCION**

En virtud de tener un momento, se tienen que derivar las funciones de forma previamente:

$$\phi_2'(x) = -\frac{6X}{L^2} + \frac{6X^2}{L^3}$$

$$\phi_3'(x) = \left(1 - \frac{X}{L}\right)\left(\frac{L-3X}{L}\right)$$

$$\phi_5'(x) = \frac{6X}{L^2} - \frac{6X^2}{L^3}$$

$$\phi_6'(x) = \frac{3X^2}{L^2} - \frac{2X}{L}$$

Luego se debe evaluar $\phi_2'(x), \phi_3'(x)$; etc. En el punto de aplicación del momento, el resultado que se obtiene para $X = L/2$

$$\phi_2^{'}(x = L/2) = -\frac{3}{2L} \qquad \phi_3^{'}(x = L/2) = -\frac{1}{4}$$

$$\phi_5^{'}(x = L/2) = \frac{3}{2L} \qquad \phi_6^{'}(x = L/2) = -\frac{1}{4}$$

En consecuencia:

$$V = M\ \phi_2^{'}(x) = -\frac{3M}{2L}$$

$$M = M\phi_3^{'}(x) = -\frac{M}{4}$$

$$V^{'} = M\phi_5^{'}(x) = \frac{3M}{2L}$$

$$M^{'} = M\phi_6^{'}(x) = -\frac{M}{4}$$

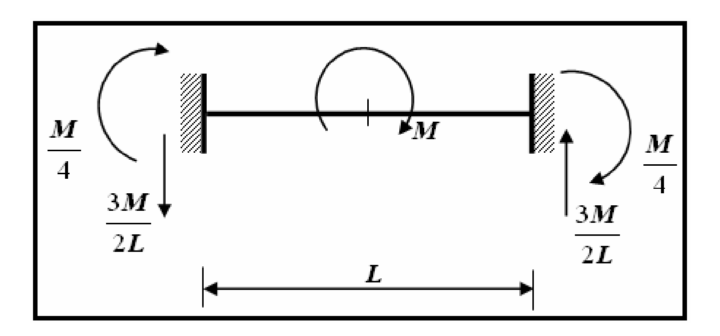


Figura 3.11.2 Resultados del ejemplo N.- 8

Con otra notación, este ejemplo se pudo presentar de la siguiente manera:

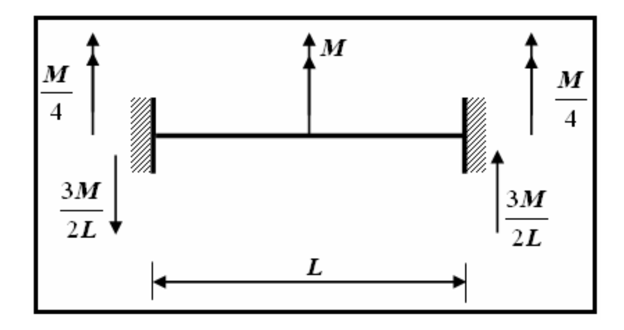


Figura 3.11.3 Otra presentación de los resultados del ejemplo N.- 8

3.5.2 Cálculo de las deflexiones

Dentro del hormigón armado, uno de los problemas que todavía tiene que ser estudiado y analizado es el cálculo de las deflexiones diferidas. Este fenómeno producido por dos causas, conceptualmente distintas pero muy difíciles de separar con precisión en la práctica: la retracción y la fluencia del concreto, llamada también deformación lenta y escurrimiento plástico, depende de una gran cantidad de variables, entre ellas se han de enumerar las siguientes: la relación del agregado al cemento, la mineralogía del agregado y su tamaño, la temperatura, velocidad del viento, humedad relativa del ambiente, el curado y la edad del concreto, el tamaño de la muestra y el nivel de esfuerzos.

Por todo esto es tan complejo el cálculo de deflexiones diferidas, pero no así el cálculo de las **deflexiones instantáneas las mismas que pueden calcularse por medio de las funciones de forma.**

Por lo tanto, la deformación total es igual a la deformación instantánea más la deformación diferida. En este capítulo se estudia el cálculo de la deformación instantánea exclusivamente. Antes es necesario presentar la solución del problema primario, para cuando actúa una carga uniforme distribuida P_0, por ejemplo.

- **EJEMPLO N.- 9**

Encontrar la ecuación de la elástica v (x) para la viga de sección constante de la figura 3.12, si se desprecia la deformación por corte.

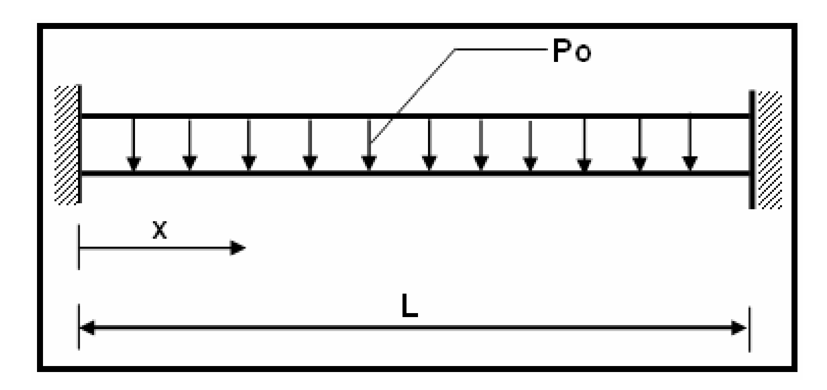


Figura 3.12 Viga de sección constante con carga uniforme P_o

- **SOLUCIÓN**

La ecuación diferencial que gobierna el problema en estudio, es:

$$\frac{d^4 v}{dx^4} = \frac{P_o}{EI} \qquad (3.32.1)$$

La solución de la ecuación diferencial de cuarto orden, es:

$$v(x) = A\ X^3 + B\ X^2 + C\ X + D + \frac{P_o}{24EI} X^4 \qquad (3.32.2)$$

Las constantes de integración: A, B, C y D se obtienen de las siguientes condiciones de borde:

1. En X = 0 v(x) = 0
2. En X = 0 v´(x) =0
3. En X = L v(x) = 0
4. En X = L v´(x) = 0

Donde $v^{'}(x)$ corresponde al giro $\theta(x)$. La solución del sistema de ecuaciones que se obtienen al reemplazar las condiciones de borde, reporta:

$$A = -\frac{P_0 L}{12\ EI} \qquad B = \frac{P_0 L^2}{24\ EI} \qquad C = 0 \qquad D = 0$$

Luego, la ecuación de elástica $v(x)$ es:

$$v(x) = -\frac{P_o L}{12EI} X^3 + \frac{P_o L^2}{24EI} X^2 + \frac{P_o}{24EI} X^4$$

$$v(x) = \frac{P_o}{24EI}\left(X^4 + X^2 L^2 - 2X^3 L\right) \quad (3.32.3)$$

$$\theta(x) = \frac{P_o}{24EI}\left(4X^3 + 2XL^2 - 6X^2 L\right) \quad (3.32.4)$$

Es importante destacar que la ecuación (3.32.1) fue obtenida con la siguiente convención de signos:

i. Desplazamiento vertical positivo, si es hacia abajo.

ii. Rotación positiva, si es horaria.

Esta es la convención de signos de las ecuaciones (3.32.3) y (3.32.4), y es contraria a la que se ha venido trabajando en este capítulo. Por lo tanto, para tener concordancia en la convención de signos a las ecuaciones indicadas se deberá cambiar de signo.

Si se tiene en cuenta que la solución total del problema es igual al problema primario más el problema complementario como se estudió en el capítulo anterior se tiene que para calcular las coordenadas de la elástica a flexión, debidas a una carga uniforme distribuida P_0, las ecuaciones a utilizarse, son:

$$v(x) = v_1\phi_2(x) + \theta_1\phi_3(x) + v_2\phi_5(x) + \theta_2\phi_6(x) - \frac{P_o}{24EI}\left(X^4 + X^2L^2 - 2X^3L\right) \quad (3.33)$$

$$\theta(x) = \frac{d}{dx}v(x) \quad (3.34)$$

- **EJEMPLO N.- 10**

El pórtico plano de la figura 3.13.1 está conformado por columnas de 25 cm x 25 cm y vigas de 30 cm x 40 cm, tiene un módulo de elasticidad = 217370.65 Kg/cm^2. Sobre éste pórtico gravita una carga uniforme distribuida de 35.4 Kg/cm, Se desea encontrar $v(x)$ en el punto medio del vano izquierdo.

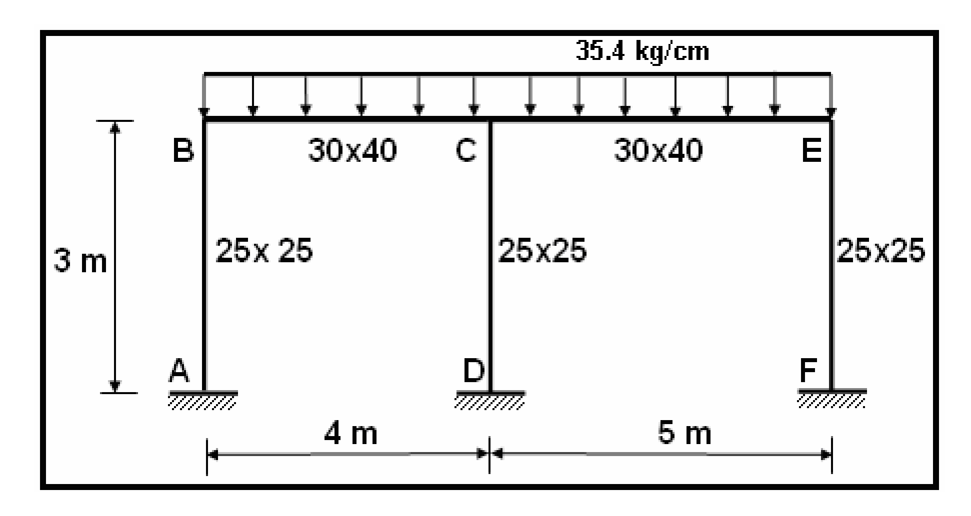


Figura 3.13.1 Cálculo de elástica de deformación

- **SOLUCIÓN**

Se consideran que los elementos son totalmente flexibles, en consecuencia existen tres grados de libertad por nudo. Los grados de libertad con las cuales se resuelve la estructura se presenta en la figura 3.13.2.

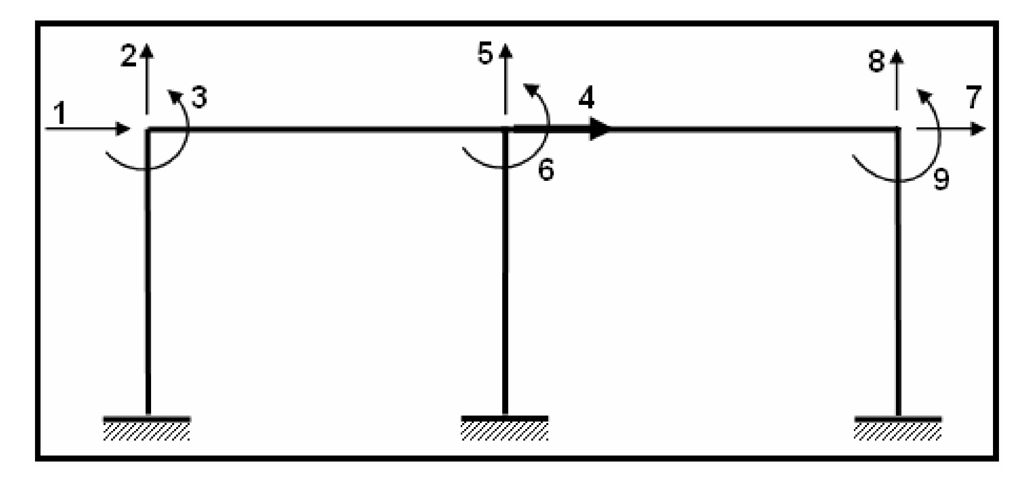


Figura 3.13.2 Sistema de coordenadas $Q - q$

El cálculo del vector de coordenadas generalizadas $\overline{q}$, se verá en los capítulos posteriores de este libro. Por ahora, se presentan los resultados que se obtuvieron al utilizar un programa de computación.

$$\overline{q} = \begin{bmatrix} -0.4069752 \\ -0.1181176 \\ -8.759498x10^{-4} \\ -0.4152865 \\ -0.4196969 \\ -6.020483x10^{-4} \\ -0.4336346 \\ -0.1657211 \\ 2.315262x10^{-3} \end{bmatrix}$$

Los desplazamientos están en milímetros y los giros en radianes. Nótese que son muy bajos en consecuencia la estructura trabaja en el rango elástico para las cargas del problema.

Para el cálculo de v (x), es necesario encontrar las coordenadas locales del miembro BC, las mismas que se obtienen del vector $\overline{q}$.

$$v_1 = q_2 = -0.1181176 \; mm.$$
$$\theta_1 = q_3 = -8.759498 * 10^{-4} \; rad.$$
$$v_2 = q_5 = -0.4196969 \; mm.$$
$$\theta_2 = q_6 = -6.020483 * 10^{-4} \; rad.$$

Al evaluar las funciones de forma en X = 2 m, se tiene:

$$\phi_2(x) = 1 - \frac{3X^2}{L^2} + \frac{2X^3}{L^3} = 1 - \frac{3*4}{4^2} + \frac{2*8}{4^3} = 0.5$$

$$\phi_5(x) = 1 - \phi_2(x) = 1 - 0.5 = 0.5$$

$$\phi_3(x) = X\left(1 - \frac{X}{L}\right)^2 = 2\left(1 - \frac{2}{4}\right)^2 = 0.5\ m.$$

$$\phi_6(x) = -\frac{X^2}{L}\left(1 - \frac{X}{L}\right) = -\frac{4}{4}\left(1 - \frac{2}{4}\right) = -0.5m.$$

Por otra parte, el factor $P_0/24EI$, vale:

$$\frac{P_o}{24\ EI} = \frac{35.4}{24 * 217370.65\left(\frac{30 * 40^3}{12}\right)} = 4.241028 * 10^{-11}\ \frac{1}{cm^3}$$

El paréntesis de la ecuación (3.33) vale lo siguiente:

$$X^4 + X^2L^2 - 2X^3L = 2^4 + 2^2 * 4^2 - 2 * 2^3 * 4 = 16\ m^4 = 16 * 10^{12}\ mm^4$$

Por último al reemplazar todo en la ecuación (3.33) en milímetros, se tiene:

$$v(x) = -0.1181176 * 0.5 - 8.759498 * 10^{-4} * 500 - 0.4196969 * 0.5$$
$$- 6.020483 * 10^{-4} * (-500) - 4.241028 * 10^{-14}\left(16 * 10^{12}\right)$$

$$v(x) = -1.08442248\ mm$$

Esta es la deformación instantánea en el centro de la luz del primer vano, el signo menos indica que en ese punto el eje de la viga se desplaza hacia abajo.

3.6 APLICACIÓN A LA INGENIERÍA SISMORRESISTENTE

Para el diseño de vigas, columnas y cimentación de un edificio, se considera que la carga que gravita sobre la losa se reparte a los pórticos a 45°, como lo ilustra la figura 3.14.

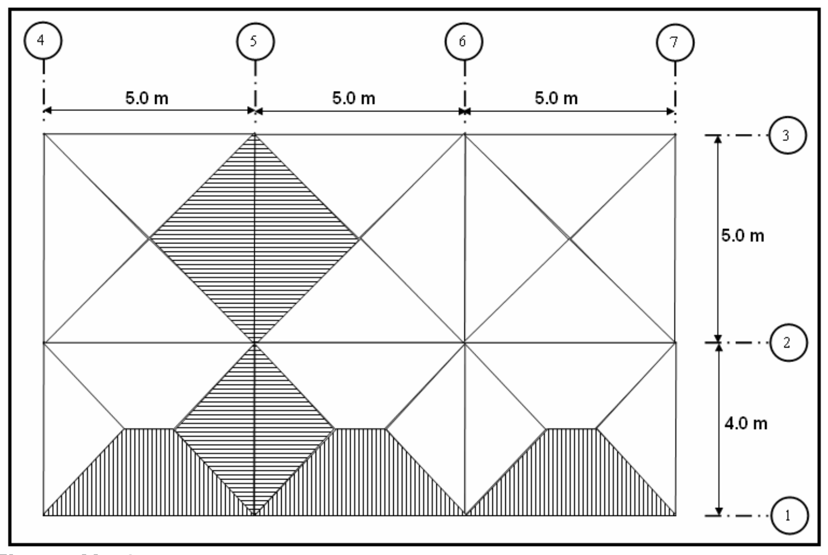


Figura N.- 3.14 Vista en planta de un edificio que tiene 7 pórticos ortogonales

Prácticamente existen dos tipos de cargas que actúan sobre las vigas de un pórtico plano. Estas son:

i. Carga triangular para la luz corta, y

ii. Carga trapezoidal para la luz larga.

En este capítulo, se estudiará únicamente el cálculo de las fuerzas y momentos de empotramiento perfecto para estos dos tipos de carga.

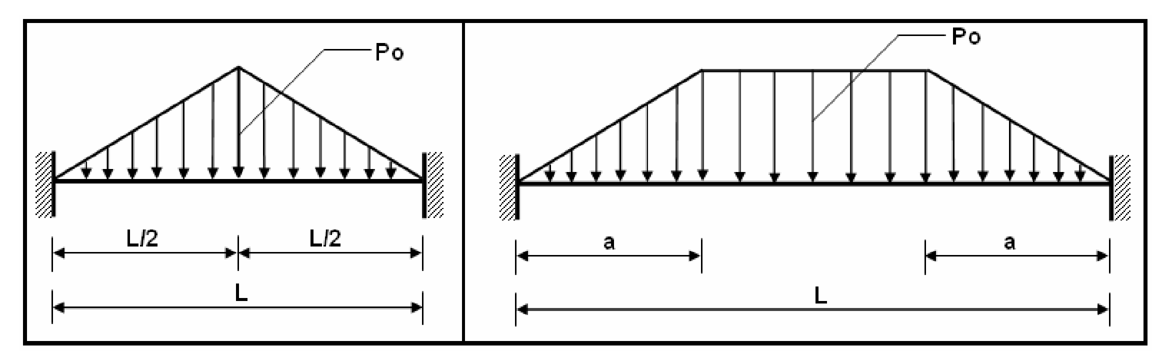


Figura 3.15.1 Carga Triangular **Figura 3-15.2** Carga Trapezoidal

- **EJEMPLO N.- 11**

Calcular el cortante y el momento de empotramiento, en el nudo inicial, de la viga, de la figura 3.15.1.

- **SOLUCIÓN**

Cálculo del cortante V:

$$V = \int P(y)\phi_2(x)\, dx$$

$P(y)$ es la ecuación de variación de la carga que en este caso es lineal. Luego hay que encontrar la ecuación de dos rectas de la forma:

$$Y - Y_1 = m(X - X_1)$$

Teniendo presente que la variable Y corresponde a la variación de carga $P(y)$ y que existen dos pendientes m.

- Para $0 < x < L/2$

$$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{P_0 - 0}{\frac{L}{2} - 0} \quad \Rightarrow \quad m_1 = \frac{2P_0}{L} \quad \Rightarrow \quad P(y) = \frac{2P_0 X}{L}$$

- Para L/2 ≤ x < L

$$m_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{P_0 - 0}{\frac{L}{2} - L} \quad \Rightarrow \quad m_2 = -\frac{2P_0}{L}$$

$$P(Y) - 0 = -\frac{2P_o}{L}(X - L) \quad \Rightarrow \quad P(Y) = 2P_o - \frac{2P_o}{L}X$$

Luego El cortante V en el nudo inicial se evalúa como sigue:

$$V = \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{2P_0 x}{L}\left(1 - \frac{3X^2}{L^2} + \frac{2X^3}{L^3}\right)dx + \int_{\frac{L}{2}}^{L}\left(2P_0 - \frac{2P_0 x}{L}\right)\left(1 - \frac{3X^2}{L^2} + \frac{2X^3}{L^3}\right)dx$$

$$V = \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{2P_0 x}{L}dx - \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{6P_0 X^3}{L^3}dx + \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{4P_0 X^4}{L^4}dx + \int_{\frac{L}{2}}^{L} 2P_0 dx + \int_{\frac{L}{2}}^{L} \frac{4P_0 X^3}{L^3}dx -$$

$$- \int_{\frac{L}{2}}^{L} \frac{6P_0 X^2}{L^2}dx - \int_{\frac{L}{2}}^{L} \frac{2P_0 X}{L}dx + \int_{\frac{L}{2}}^{L} \frac{6P_0 X^3}{L^3}dx - \int_{\frac{L}{2}}^{L} \frac{4P_0 X^4}{L^4}dx$$

$$V = \left|\frac{2P_0X^2}{2L} - \frac{6P_0X^4}{4L^3} + \frac{4P_0X^5}{5L^4}\right|_0^{L/2} + \left|2P_0X + \frac{4P_0X^4}{4L^3} - \frac{6P_0X^3}{3L^2} - \frac{2P_0X^2}{2L} + \frac{6P_0X^4}{4L^3} - \frac{4P_0X^5}{5L^4}\right|_{L/2}^{L}$$

Al reemplazar los límites de integración se tiene:

$$V = \frac{P_0L}{4} - \frac{3}{32}P_0L + \frac{P_0L}{40} + 2P_0L + P_0L - 2P_0L - P_0L + \frac{3}{2}P_0L - \frac{4}{5}P_0L - P_0L - \frac{P_0L}{16} + \frac{P_0L}{4} + \frac{P_0L}{4} - \frac{3}{32}P_0L + \frac{P_0L}{40}$$

$$V = P_0L\left(\frac{40-15+4+320-320+160-160+240-128-160+40-10+40-15+4}{160}\right)$$

$$V = \frac{40}{160}P_0L = \frac{1}{4}P_0L$$

Cálculo del Momento M

$$M = \int_0^L P(y)\phi 3(x) \quad dx$$

$$M = \int_O^{\frac{L}{2}} \frac{2P_0X^2}{L}\left(1 - \frac{X}{L}\right)^2 dx + \int_{\frac{L}{2}}^{L} \left(2P_o - \frac{2P_0X}{L}\right)\left[X\left(1 - \frac{X}{L}\right)^2\right]dx$$

$$M = \int_O^{\frac{L}{2}} \frac{2P_0X^2}{L}\left(1 - \frac{2X}{L} + \frac{X^2}{L^2}\right)dx + \int_{\frac{L}{2}}^{L} 2P_0X\left(1 - \frac{2X}{L} + \frac{X^2}{L^2}\right)dx - \int_{\frac{L}{2}}^{L} \frac{2P_oX^2}{L}\left(1 - \frac{2X}{L} + \frac{X^2}{L^2}\right)dx$$

$$M=\int_{O}^{\frac{L}{2}} \frac{2P_0X^2}{L}dx-\int_{0}^{\frac{L}{2}} \frac{4P_0X^3}{L^2}dx+\int_{0}^{\frac{L}{2}} \frac{2P_0X^4}{L^3}dx+\int_{\frac{L}{2}}^{L} 2P_0X \quad dx-\int_{\frac{L}{2}}^{L} \frac{4P_0X^2}{L}dx+\int_{\frac{L}{2}}^{L} \frac{2P_0X^3}{L^2}dx-$$

$$-\int_{\frac{L}{2}}^{L} \frac{2P_0X^2}{L}dx+\int_{\frac{L}{2}}^{L} \frac{4P_0X^3}{L^2}dx-\int_{\frac{L}{2}}^{L} \frac{2P_0X^4}{L^3}dx$$

$$M=\left|\frac{2P_oX^3}{3L}-\frac{4P_oX^4}{4L^2}+\frac{2P_oX^5}{5L^3}\right|_0^{L/2}+\left|\frac{2P_oX^2}{2}-\frac{4P_oX^3}{3L}+\frac{2P_oX^4}{4L^2}-\frac{2P_oX^3}{3L}+\frac{4P_oX^4}{4L^2}-\frac{2P_oX^5}{5L^3}\right|_{L/2}^{L}$$

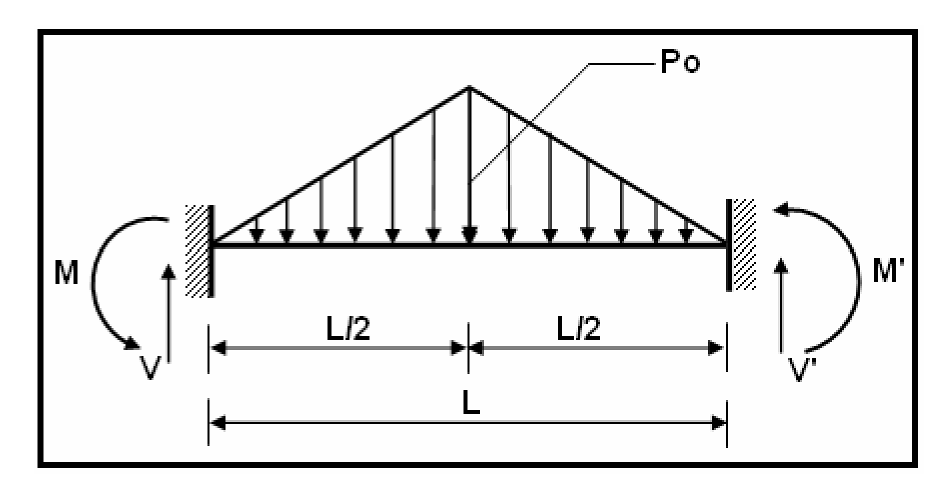
Al sustituir los límites de integración se obtiene:

$$M=\left(\frac{2P_o}{3L}\frac{L^3}{8}-\frac{P_o}{L^2}\frac{L^4}{16}+\frac{2P_o}{5L^3}\frac{L^5}{32}\right)+\left(P_oL^2-\frac{4P_o}{3L}L^3+\frac{P_oL^4}{2L^2}-\frac{2P_oL^3}{3L}+\frac{P_oL^4}{L^2}-\frac{2P_oL^5}{5L^3}\right)$$
$$-\left(\frac{P_oL^2}{4}-\frac{4P_o}{3L}\frac{L^3}{8}+\frac{P_o}{2L^2}\frac{L^4}{16}-\frac{2P_o}{3L}\frac{L^3}{8}+\frac{P_o}{L^2}\frac{L^4}{16}-\frac{2P_o}{5L^3}\frac{L^5}{32}\right)$$

$$M=P_0L^2\left(\frac{200-150+30+2400-3200+1200-1600+2400-960-600+400-75+200-150+30}{2400}\right)$$

$$M=\frac{125}{2400}P_0L^2=\frac{5P_0L^2}{96}$$

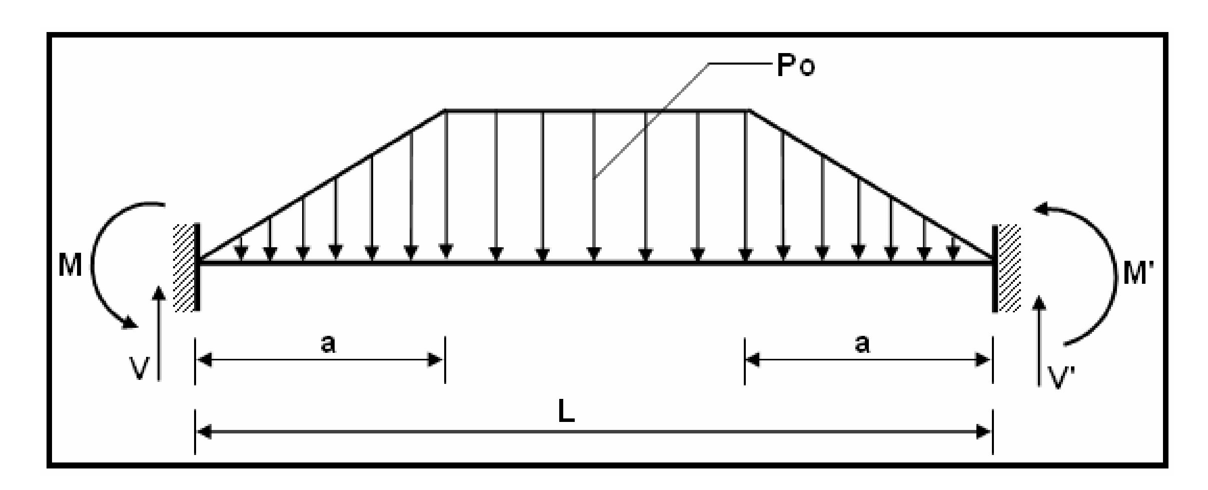
Por un procedimiento similar se obtendrá la fuerza y el momento de empotramiento para el nudo final, trabajando con $\phi_5(x)$ y $\phi_6(x)$, respectivamente. Los resultados a que se llega, son:



$$M=\frac{5\,P_o\,L^2}{96}=-M^{'} \qquad (3.35.1)$$

$$V=\frac{P_o\,L}{4}=V^{'} \qquad (3.35.2)$$

Para carga trapezoidal, se tiene:



$$M = \frac{P_o L^2}{12}\left[1 - 2\left(\frac{a}{L}\right)^2 + \left(\frac{a}{L}\right)^3\right] = -M' \qquad (3.36.1)$$

$$V = \frac{P_o L}{2}\left(1 - \frac{a}{L}\right) = V' \qquad (3.36.2)$$

3.7 EJERCICIOS RESUELTOS

- **EJEMPLO N.- 12**

Sobre el elemento lineal de sección constante de la figura 3.16.1, que tiene 5.0 m. de longitud actúa una carga concentrada P. Calcular las fuerzas y momentos de empotramiento perfecto.

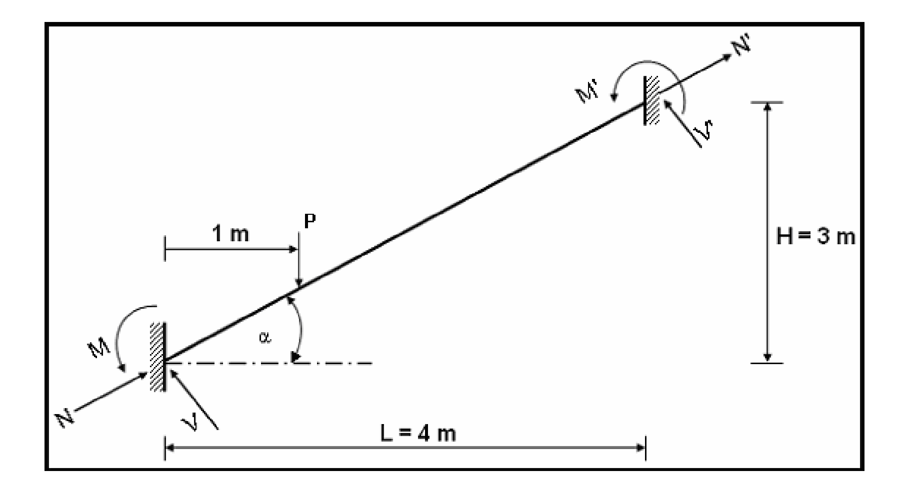


Figura 3.16.1 Estado de carga del ejemplo 12

SOLUCIÓN

i) Se evalúa las funciones de forma en el punto de aplicación de la carga.

$$tg\,\alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \alpha = 36.87°$$

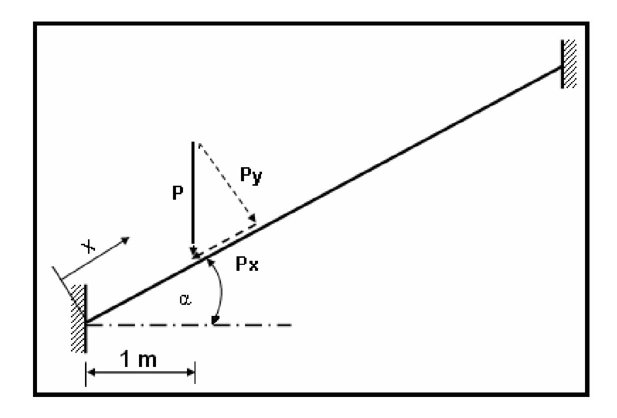


Figura 3.16.2 Descomposición de la carga P.

Se destaca que X se mide a lo largo del eje del miembro.

$$\cos\ \alpha = \frac{1.0}{X} \Rightarrow X = 1.25$$

$$\phi_1(x) = 1 - \frac{X}{L} = 1 - \frac{1.25}{5.0} = 0.75$$
$$\phi_4(x) = 1 - \phi_1(x) = 1 - 0.75 = 0.25$$
$$\phi_2(x) = 1 - \frac{3X^2}{L^2} + \frac{2X^3}{L^3} = 1 - \frac{3(1.25)^2}{5^2} + \frac{2(1.25)^3}{5^3} = 0.844$$
$$\phi_5(x) = 1 - \phi_2(x) = 1 - 0.844 = 0.156$$
$$\phi_3(x) = X\left(1 - \frac{X}{L}\right)^2 = 1.25\left(1 - \frac{1.25}{5.00}\right)^2 = 0.703$$
$$\phi_6(x) = -\frac{X^2}{L}\left(1 - \frac{X}{L}\right) = -\frac{1.25^2}{5.00}\left(1 - \frac{1.25}{5.00}\right) = -0.234$$

ii) Se descompone la carga P, en una perpendicular al miembro Py y en una longitudinal Px (como muestra la figura 3.16.2)

$$Py = P \ \cos\alpha = \frac{4}{5}P$$
$$Px = P \ sen\alpha = \frac{3}{5}P$$

iii) Las Fuerzas y momentos de empotramiento, son:

$$N = P_x\ \phi_1(x) = 0.75P\ Sen\alpha = 0.45P$$
$$V = P_y\ \phi_2(x) = 0.844P\ Cos\alpha = 0.675P$$
$$M = P_y\ \phi_3(x) = 0.703P\ Cos\alpha = 0.562P$$
$$N' = P_x\ \phi_4(x) = 0.25P\ Sen\alpha = 0.15P$$
$$V' = P_y\ \phi_5(x) = 0.156P\ Cos\alpha = 0.125P$$
$$M' = P_y\ \phi_6(x) = -0.234P\ Cos\alpha = -0.187P$$

- **EJEMPLO N.- 13**

Para el pórtico plano de la figura 3.17.1, seleccionar un sistema de coordenadas $Q-q$ y hallar en función de las mismas, las componentes horizontal y vertical del desplazamiento y la rotación de la elástica, en la sección media del elemento AB.

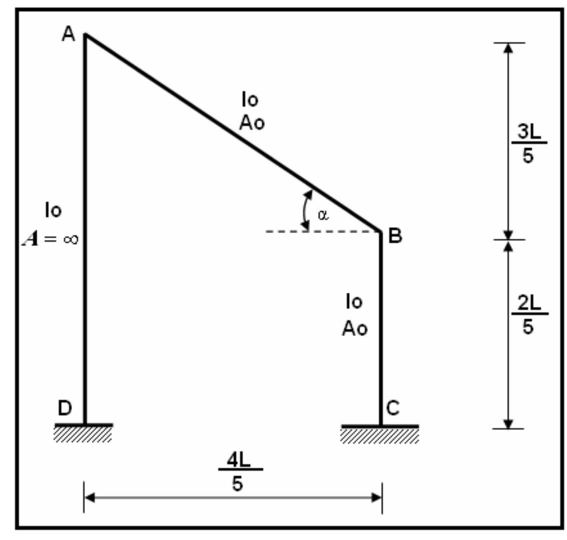


Figura 3.17.1 Pórtico del ejemplo N.- 13

- **SOLUCIÓN**

El sistema de coordenadas $Q-q$, para la estructura en estudio se presenta en la figura 3.17.2.

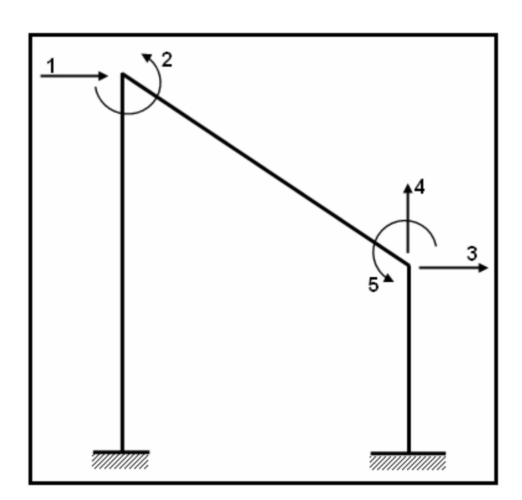


Figura 3.17.2 Sistema de coordenadas $Q-q$

Al no haber carga sobre el elemento AB, las ordenadas de la elástica son:

$$u(x) = u_1\ \phi_1(x) + u_2\ \phi_4(x)$$

$$v(x) = v_1\ \phi_2(x) + \theta_1\ \phi_3(x) + v_2\ \phi_5(x) + \theta_2\ \phi_6(x)$$

$$\theta(x) = v'(x)$$

Ahora, hay que expresar u_1, u_2, v_1, etc. En función de q_1, q_2, q_3, etc. Para esto a las coordenadas **q** se descomponen en una perpendicular y una longitudinal al eje del elemento AB, como lo ilustra la figura 3.17.3.

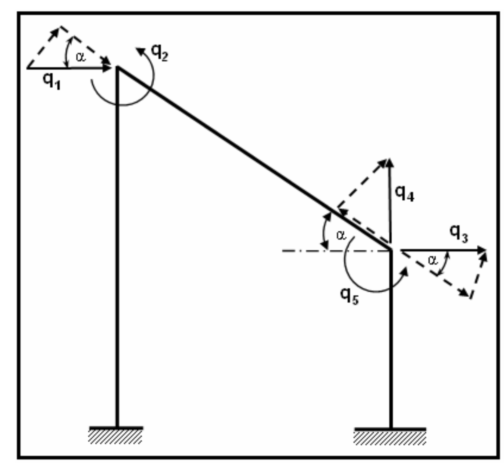


Figura 3.17.3 Descomposición de las coordenadas q_1, q_3 y q_4.

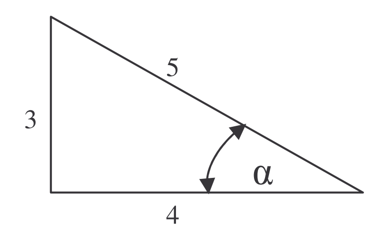
Para el elemento AB se tiene:

$u_1 = q_1 \cos\alpha$ $\qquad$ $u_2 = q_3 \cos\alpha - q_4 \operatorname{sen}\alpha$

$v_1 = q_1 \operatorname{sen}\alpha$ $\qquad$ $v_2 = q_3 \operatorname{sen}\alpha + q_4 \cos\alpha$

$\Theta_1 = q_2$ $\qquad$ $\Theta_2 = q_5$

En la figura 3.17.3, se observa:



$$sen\alpha = \frac{3}{5}$$

$$\cos\alpha = \frac{4}{5}$$

Sustituyendo:

$u_1 = \frac{4}{5} q_1$ $\qquad$ $u_2 = \frac{4}{5} q_3 - \frac{3}{5} q_4$

$v_1 = \frac{3}{5} q_1$ $\qquad$ $v_2 = \frac{3}{5} q_3 - \frac{4}{5} q_4$

$\Theta_1 = q_2$ $\qquad$ $\Theta_2 = q_5$

El siguiente paso es evaluar las funciones de forma, en el punto medio del elemento AB. Al analizar la figura 3.17.1 se observa que la longitud de este elemento es L, por lo que habrá que calcular en x = L/2.

$$\phi_1(x) = 1 - \frac{X}{L} = 1 - \frac{L}{2L} = 0.5$$

$$\phi_4(x) = 1 - \phi_1(x) = 0.5$$

$$\phi_2(x) = 1 - \frac{3X^2}{L^2} + \frac{2X^3}{L^3} = 1 - \frac{3L^2}{4L^2} + \frac{2L^3}{8L^3} = 0.5$$

$$\phi_5(x) = 1 - \phi_2(x) = 0.5$$

$$\phi_3(x) = X\left(1-\frac{X}{L}\right)^2 = \frac{L}{2}\left(1-\frac{L}{2L}\right)^2 = \frac{L}{8}$$

$$\phi_6(x) = -\frac{X^2}{L}\left(1-\frac{X}{L}\right) = -\frac{L^2}{4L}\left(1-\frac{L}{2L}\right) = -\frac{L}{8}$$

Al reemplazar las funciones de forma y las componentes de desplazamiento del elemento AB, en las expresiones de la elástica se obtiene:

$$u(x) = \frac{4}{5}q_1\ \frac{1}{2} + \left(\frac{4}{5}q_3 - \frac{3}{5}q_4\right)\frac{1}{2}$$

$$u(x) = \frac{1}{5}\left(2\ q_1 + 2\ q_3 - \frac{3}{2}\ q_4\right)$$

$$v(x) = \frac{3}{5}q_1\ \frac{1}{2} + q_2\ \frac{L}{8} + \left(\frac{3}{5}q_3 + \frac{4}{5}q_4\right)\frac{1}{2} - q_5\ \frac{L}{8}$$

$$v(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}q_1 + \frac{L}{4}q_2 + \frac{3}{5}q_3 + \frac{4}{5}q_4 - \frac{L}{4}q_5\right)$$

Para calcular Ө(X) se debe escribir la forma general de v(x) para posteriormente derivar.

$$\theta(x) = \frac{d}{dx}v(x)$$

$$\theta(x) = \frac{d}{dx}\left[v_1\left(1-\frac{3X^2}{L^2}+\frac{2X^3}{L^3}\right)+\theta_1\left(X-\frac{2X^2}{L}+\frac{X^3}{L^2}\right)+v_2\left(\frac{3X^2}{L^2}-\frac{2X^3}{L^3}\right)+\theta_2\left(-\frac{X^2}{L}+\frac{X^3}{L^2}\right)\right]$$

$$\theta(x) = v_1\left(-\frac{6X}{L^2}+\frac{6X^2}{L^3}\right)+\theta_1\left(1-\frac{4X}{L}+\frac{3X^2}{L^2}\right)+v_2\left(\frac{6X}{L^2}-\frac{6X^2}{L^3}\right)+\theta_2\left(-\frac{2X}{L}+\frac{3X^2}{L^2}\right)$$

- Para X = L/2

$$\theta(x) = v_1\left(-\frac{6}{2L}+\frac{6}{4L}\right)+\theta_1\left(1-\frac{4}{2}+\frac{3}{4}\right)+v_2\left(\frac{6}{2L}-\frac{6}{4L}\right)+\theta_2\left(-\frac{2}{2}+\frac{3}{4}\right)$$

$$\theta(x) = -\frac{3}{2L}v_1 - \frac{1}{4}\theta_1 + \frac{3}{2L}v_2 - \frac{1}{4}\theta_2$$

De donde

$$\theta(x) = -\frac{3}{2L}\frac{3}{5}q_1 - \frac{1}{4}q_2 + \frac{3}{2L}\left(\frac{3}{5}q_3 + \frac{4}{5}q_4\right) - \frac{1}{4}q_5$$

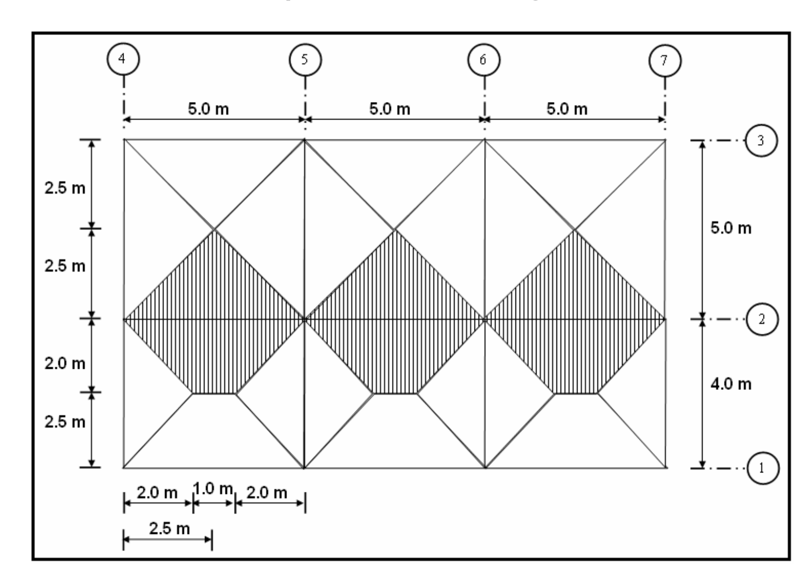
$$\theta(x) = -\frac{3}{10L}(3q_1 - 3q_3 - 4q_4) - \frac{1}{4}(q_2 + q_5)$$

- **EJEMPLO N.- 14**

Encontrar los momentos y fuerzas de empotramiento perfecto para un vano del pórtico 2 de la figura 3.14, si la carga permanente D es 0.8 T/m^2 y la carga transitoria L es 0.25 T/m^2.

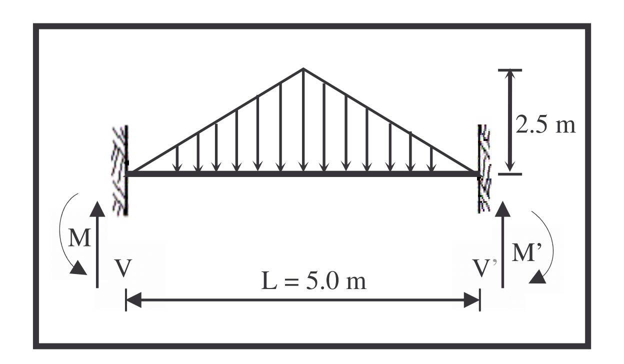
- **SOLUCIÓN**

Repartición de las cargas



- **Pórtico 2 D=0.8 T/m²**

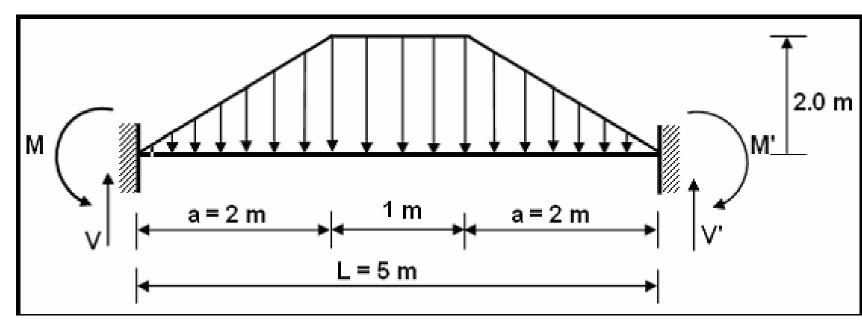
$P_o = 0.8 \dfrac{T}{m^2} * 2.5m = 2.0 \dfrac{T}{m}$



$V = V' = \dfrac{P_o L}{4} = \dfrac{2*5.0}{4} = 2.5T$

$M = M' = \dfrac{5 P_o L^2}{96} = \dfrac{5*2*25}{96} = 2.604 \dfrac{T}{m}$

Sobre el pórtico 2 gravitan dos tipos de carga, la triangular cuyo cálculo ya se ha indicado y la trapezoidal cuya forma de cálculo se indica a continuación

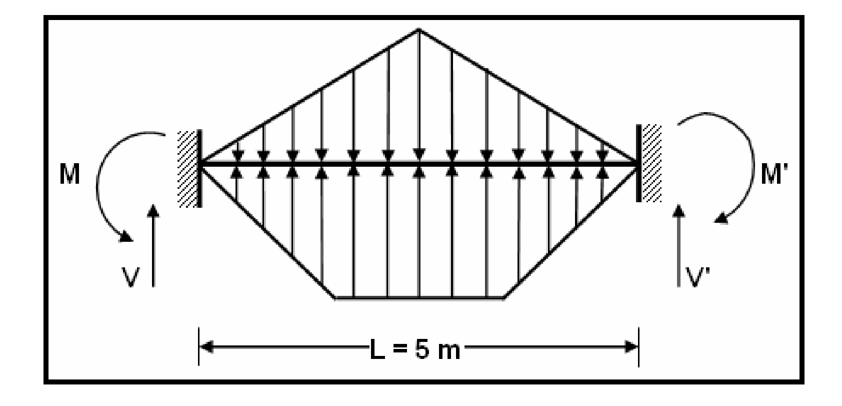


$P_o = 0.8 \dfrac{T}{m^2} * 2.0m = 1.6 \dfrac{T}{m}$

$V = V' = \dfrac{P_o L}{2}\left(1 - \dfrac{a}{L}\right) = \dfrac{1.6*5.0}{4}\left(1 - \dfrac{2}{5}\right) = 2.4T$

$M = M' = \dfrac{P_o L^2}{12}\left[1 - 2\left(\dfrac{a}{L}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{L}\right)^3\right] = \dfrac{1.6*25}{12}\left[1 - 2\left(\dfrac{2}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{2}{5}\right)^3\right] = 2.48 \quad T.m$

Superposición de efectos.



V = V' = 2.5 T + 2.4 T = 4.9 T

M = M' = 2.604 + 2.48 = 5.084 T.m

- **Pórtico 2 L=0.25 T/ m^2**

Para la segunda parte del problema se puede volver a repetir el cálculo pero con el objeto de ilustrar una nueva forma se realiza aplicando la definición de que en el rango elástico la teoría es lineal. En consecuencia con dos simples reglas de tres se obtiene la solución, una para calcular el cortante y otra para encontrar el momento.

Con 0.8 T/m^2 -----------------------4.9 T

0.5 T/m^2 ------------------------V = ?

V' = V = 1.531 T

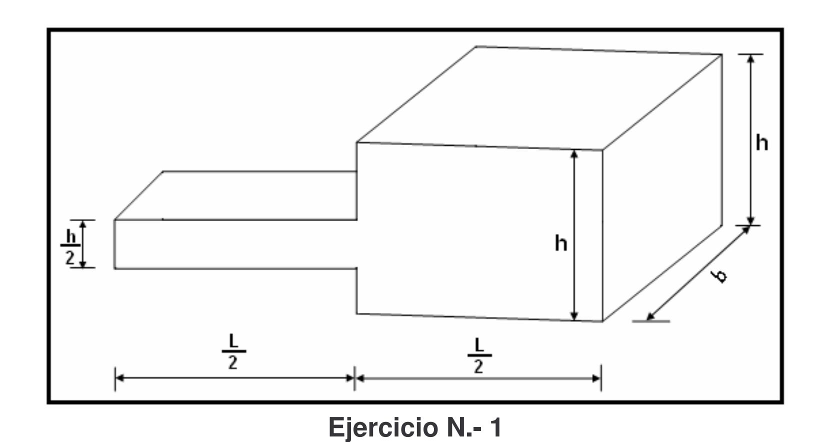
Con 0.8 T/m^2 -----------------------5.084 T.m

0.25 T/m^2 ------------------------M = ?

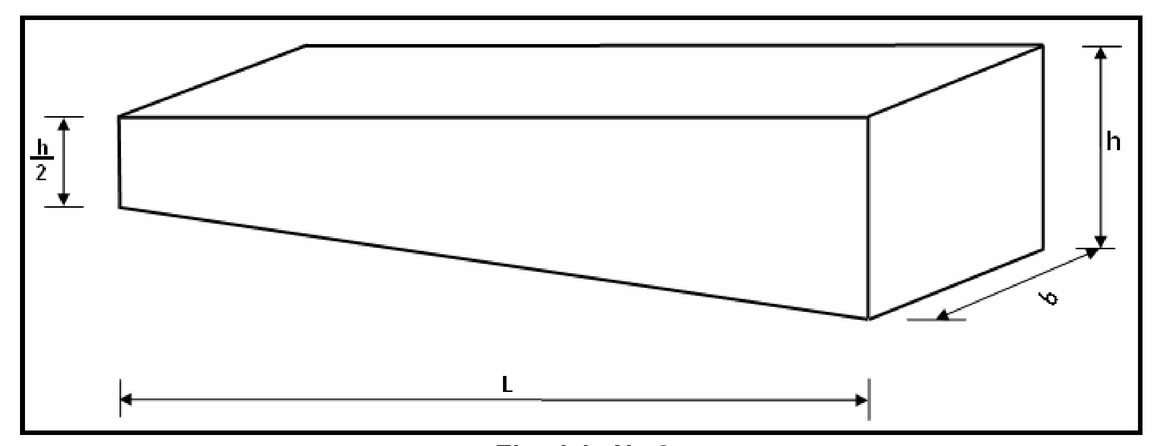
M = M' = 1.589 T.m

3.8 EJERCICIOS PROPUESTOS

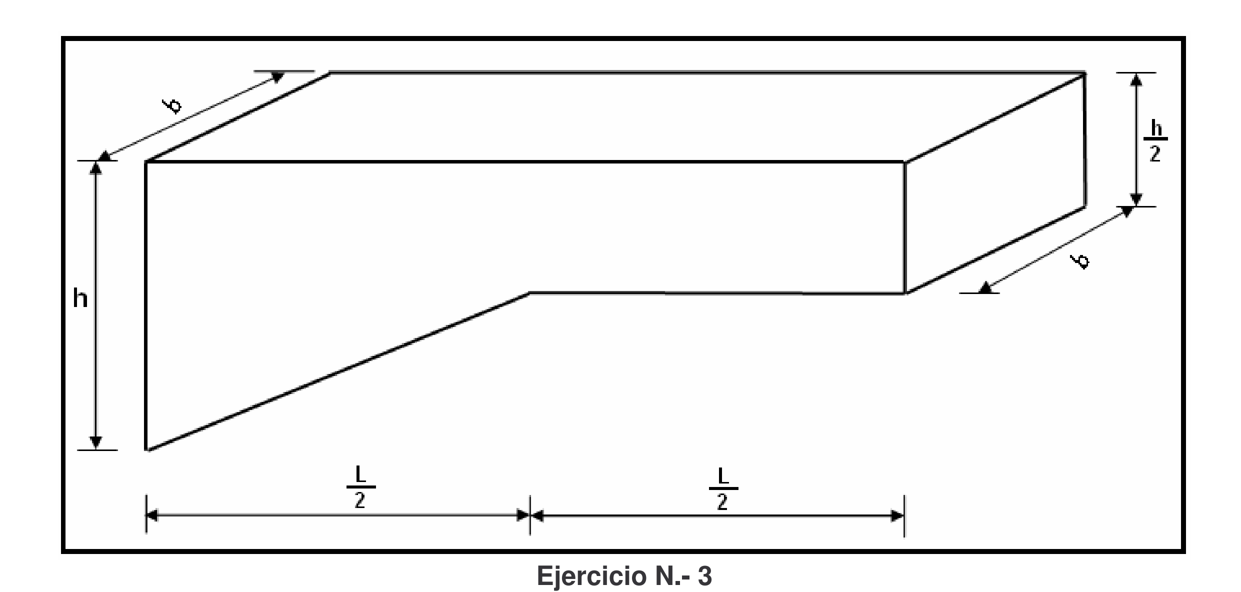
Encontrar las funciones de forma, para los siguientes elementos lineales de sección variable. Todos tienen un ancho b constante y altura variable.



Ejercicio N.- 1

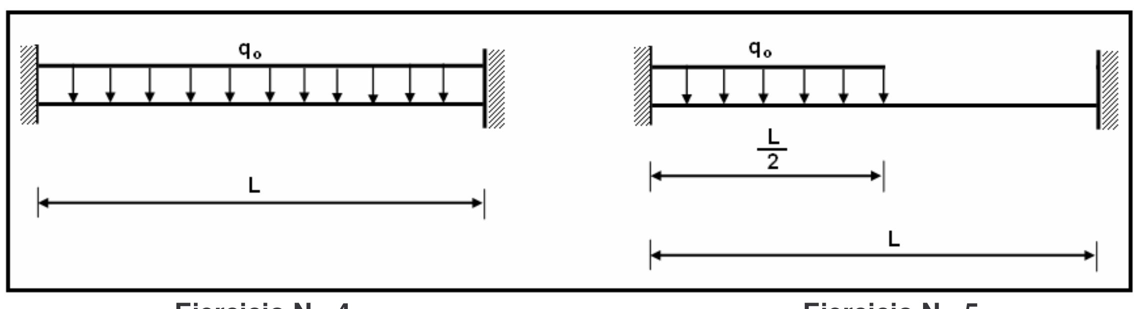


Ejercicio N.- 2

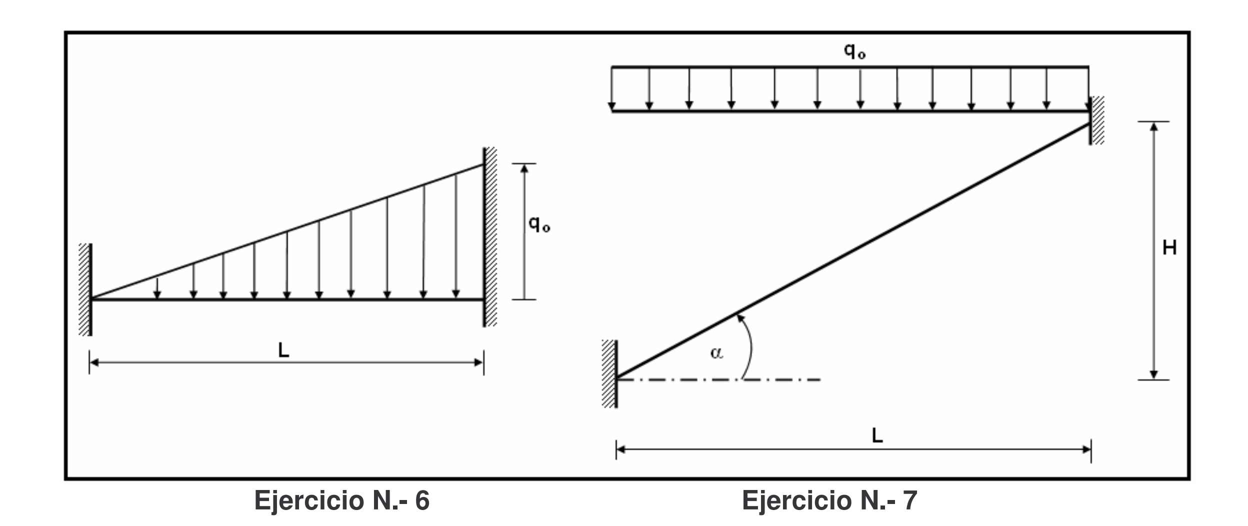


Ejercicio N.- 3

Calcular las fuerzas y momentos de empotramiento de los siguientes elementos lineales por medio de las funciones de forma.

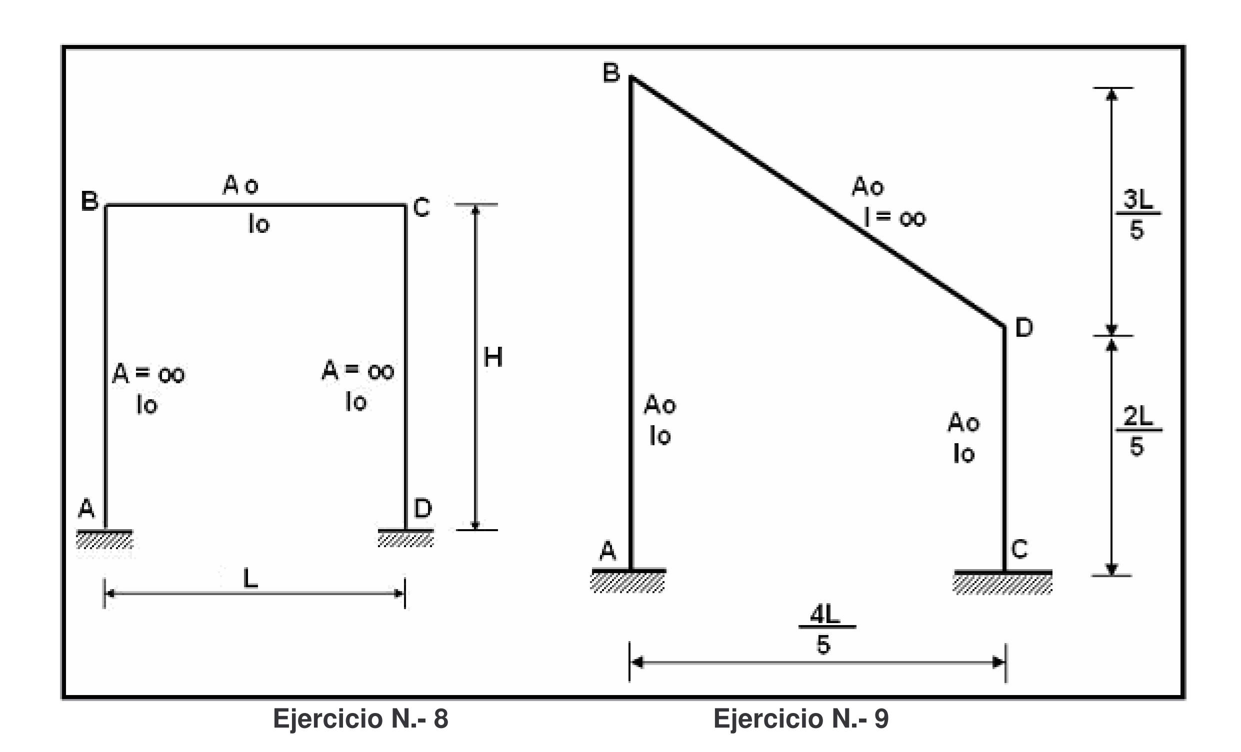


Ejercicio N.- 4 Ejercicio N.- 5

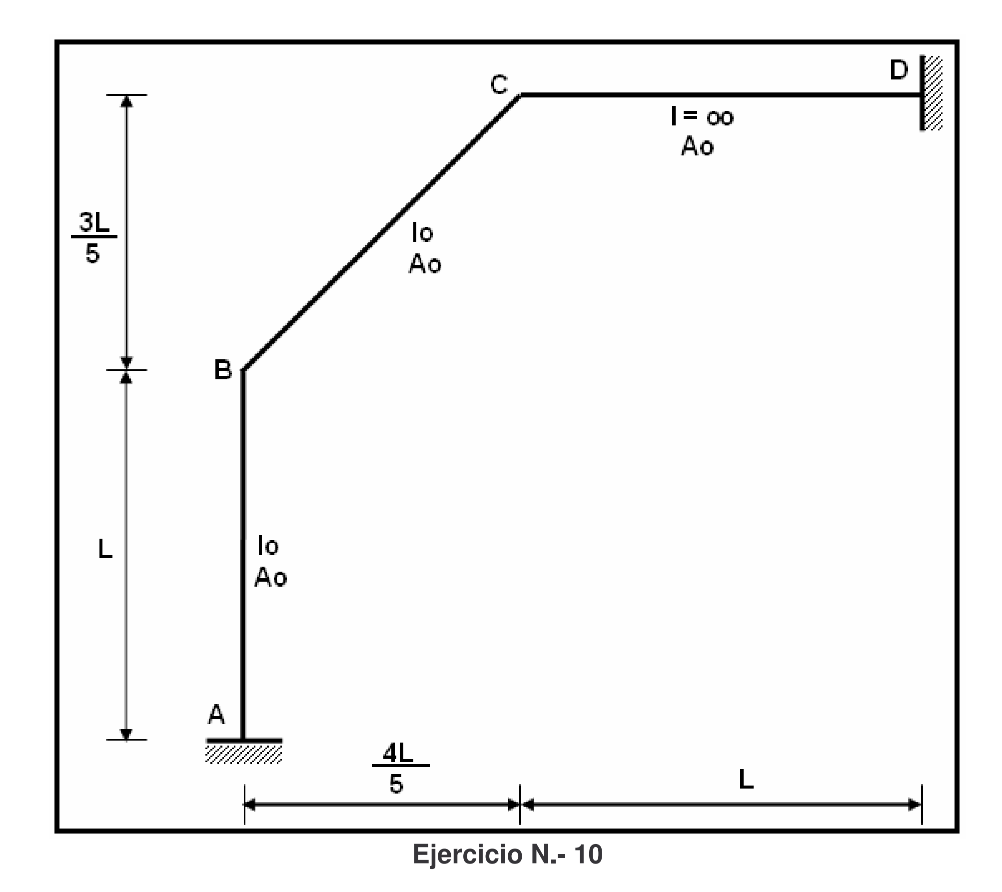


Ejercicio N.- 6 **Ejercicio N.- 7**

Para los siguientes ejercicios, seleccione un sistema de coordenadas $Q-q$ y encuentre la expresión de las elásticas horizontal y vertical del elemento BC en términos de las coordenadas q_i y las funciones $\phi_1, \phi_2, ...$, características del miembro.



Ejercicio N.- 8 **Ejercicio N.- 9**



Ejercicio N.- 10

Ejercicio N.- 11

Encontrar $v(x)$ en el punto medio (x = 2.5 m) del vano derecho del pórtico de la figura 3.13.1.

Ejercicio N.- 12

Deducir las ecuaciones correspondientes al momento y cortantes en el nudo inicial de una viga de sección constante con carga trapezoidal.

CAPITULO 4

VECTOR DE CARGAS GENERALIZADAS Q

RESUMEN

Se presenta el cálculo del vector de cargas generalizadas Q en marcos y armaduras planas cuyos elementos pueden ser: totalmente flexibles A_o, I_o; axialmente rígidos $A = \infty, I_o$; y transversalmente rígidos $A_o, I = \infty$. El cálculo se lo realiza de dos formas:

i) Mediante la aplicación del problema primario complementario que fue enunciado en el capitulo 2, y

ii) Mediante trabajos virtuales.

El algoritmo que se utiliza para programar el cálculo del vector de cargas generalizadas se lo indica en el capítulo 5 una vez que se haya estudiado la matriz de transformación de coordenadas T. Sin embargo es importante que en este capítulo se diferencie entre acciones en elemento y acciones en las juntas, y como las acciones de los elementos en las juntas actúan cambiadas de signo.

4. 1 PROBLEMA PRIMARIO Y COMPLEMENTARIO

4.1.1. Introducción

Como se indicó en el capítulo 2, numeral 2.2.3, la solución de estructuras en las cuales la carga no está únicamente concentrada en los nudos se realiza mediante el problema primario y complementario. Teniéndose que:

SOLUCIÓN ESTRUCTURAL = SOLUCIÓN DEL PROBLEMA PRIMARIO + SOLUCIÓN DEL PROBLEMA COMPLEMENTARIO

En efecto en el problema primario se considera que actúan:

- Cargas en los nudos,
- Cargas en los elementos,
- Cambios de temperaturas en los elementos,
- Asentamientos en los apoyos, y
- Acciones dinámicas.

En este capítulo solo se consideran los dos primeros tipos de carga.

4.1.2 Problema primario

Es aquel en el cual actúa todas las cargas con la condición de que el vector q es nulo. Esto se consigue colocando vínculos adicionales en las direcciones de los desplazamientos definidos por las coordenadas generalizadas, como consecuencia de estos vínculos se van a generar cargas de fijación que se los designa con la letra **R**.

Por la condición de que el vector q es nulo, cada uno de los elementos de la estructura se encuentra empotrado-empotrado, independiente de la forma de los vínculos.

Por ejemplo, al considerar el pórtico plano de la figura 4.1.1 compuesto por elementos totalmente flexibles sobre la cual actúan las cargas indicadas. En la figura adyacente 4.1.2 se indica el sistema de coordenadas generalizadas denominado sistema $Q-q$

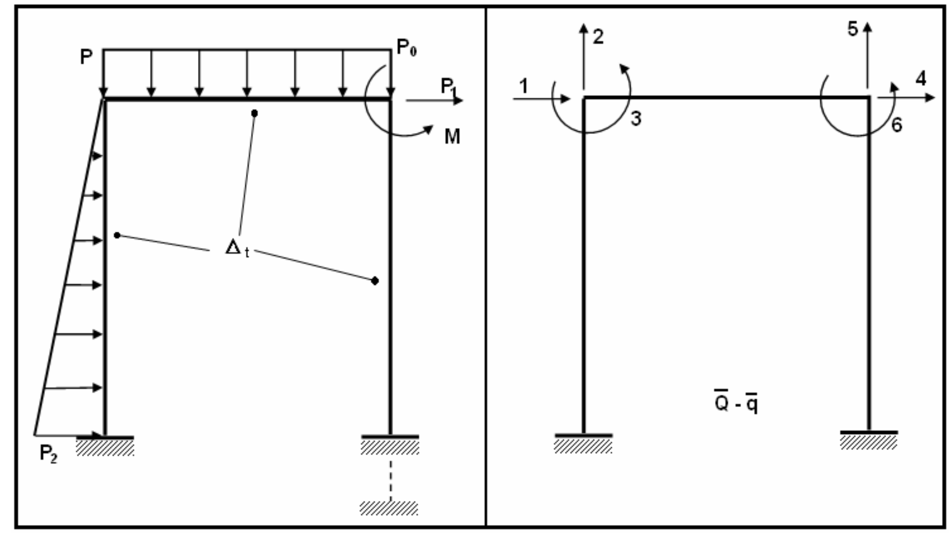


Figura 4.1.1 Acciones sobre un marco plano **Figura 4.1.2** Grados de libertad

El problema primario para la estructura analizada es el presentado en la figura 4.1.3. Nótese que mediante la colocación de vínculos se han restringido los desplazamientos en la dirección del sistema de coordenadas $Q-q$.

En toda estructura debe existir equilibrio de miembros y equilibrio de juntas; al hacer esto se obtienen las fuerzas de fijación R con lo que se termina el problema primario.

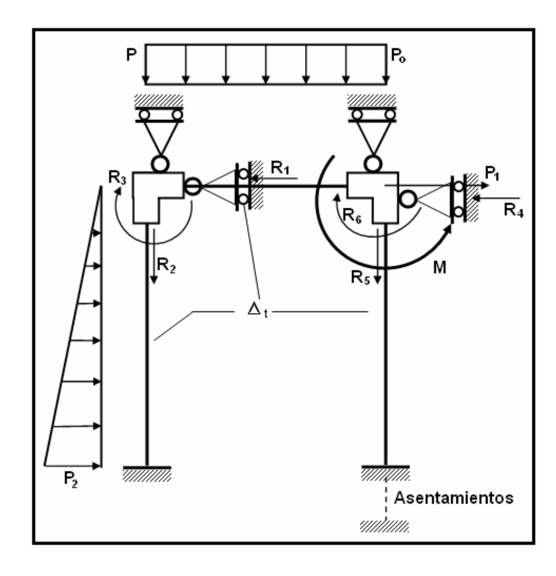


Figura N.- 4.1.3 Problema primario

4.1.3 Problema complementario

Ahora en la estructura solamente actúan las fuerzas de fijación pero con sentido contrario al que tuvieron en el problema primario. Al actuar de esta manera se generan los desplazamientos y giros que tiene la estructura, los mismos que se consideran nulos en el problema primario.

Es el problema complementario lo que se resolverá en los capítulos posteriores ya que el problema primario se resuelve por estática. Para el ejemplo que se esta analizando, se tiene:

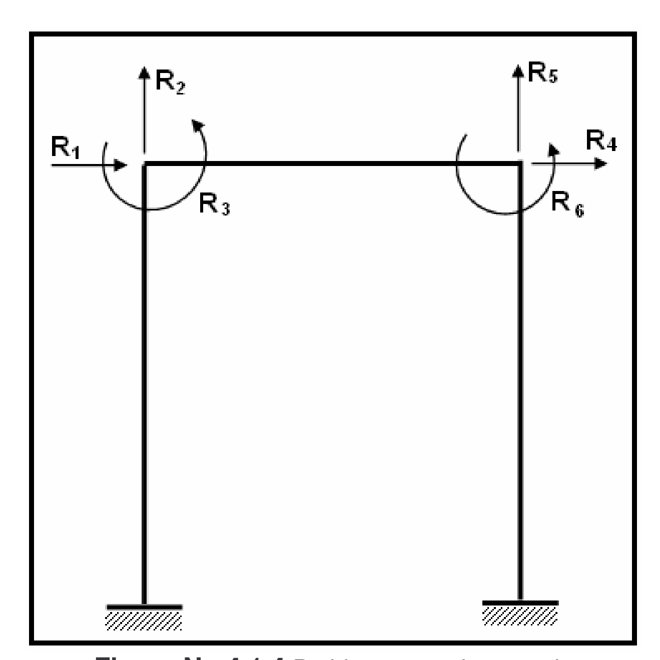


Figura N.- 4.1.4 Problema complementario

Al observar las figuras 4.1.2 y 4.1.4 se determina el vector de vector de cargas generalizadas el mismo que se indica a continuación:

$$Q = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{bmatrix}$$

4.1.4 Problemas numéricos

- **EJEMPLO N.- 1**

Determinar el vector de cargas generalizadas Q, por medio del problema primario y complementario para el marco plano de la figura 4.2.1 cuyos elementos son totalmente flexibles.

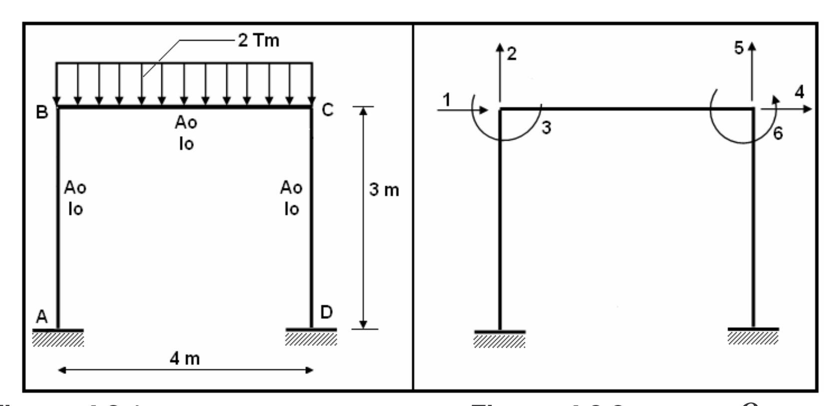


Figura 4.2.1 Estructura de ejemplo N.- 1 **Figura 4.2.2** Sistema $Q - q$

- **SOLUCIÓN**

En la presentación del problema primario por facilidad se suprime el dibujo de los vínculos con lo que se logra que los desplazamientos sean nulos, solo se colocan las fuerzas de fijación R.

En la figura 4.2.2 se indican los grados de libertad de la estructura y en la figura 4.2.3 se muestra el problema primario.

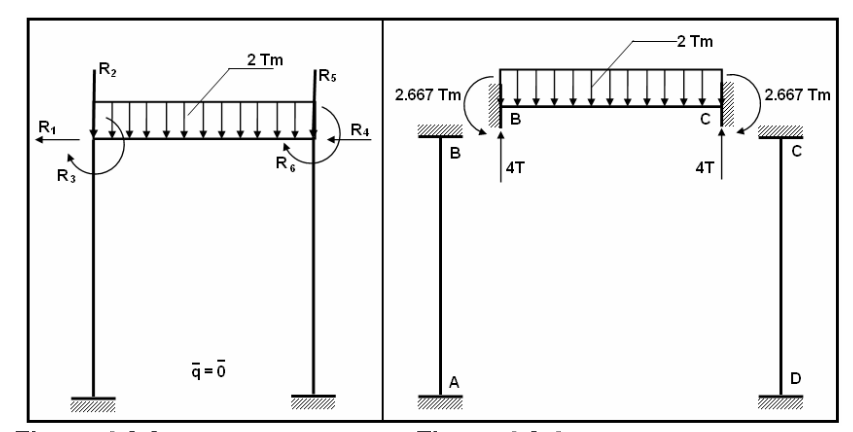


Figura 4.2.3 Problema Primario **Figura 4.2.4** Equilibrio de elementos.

La solución del problema primario comprende dos puntos, a saber:

i) Equilibrio de elementos, y

ii) Equilibrio de juntas.

Para el equilibrio de los elementos, se deben calcular las fuerzas y momentos de empotramiento perfecto utilizando las funciones de forma, estudiadas en el capítulo 3. Para el ejemplo analizado estas se indican en la figura 4.2.4.

Cada junta del marco plano debe estar en equilibrio. En consecuencia, debe cumplir que la suma de fuerzas en el sentido "X" e "Y" sea igual a cero y que la suma de momentos sea igual a cero.

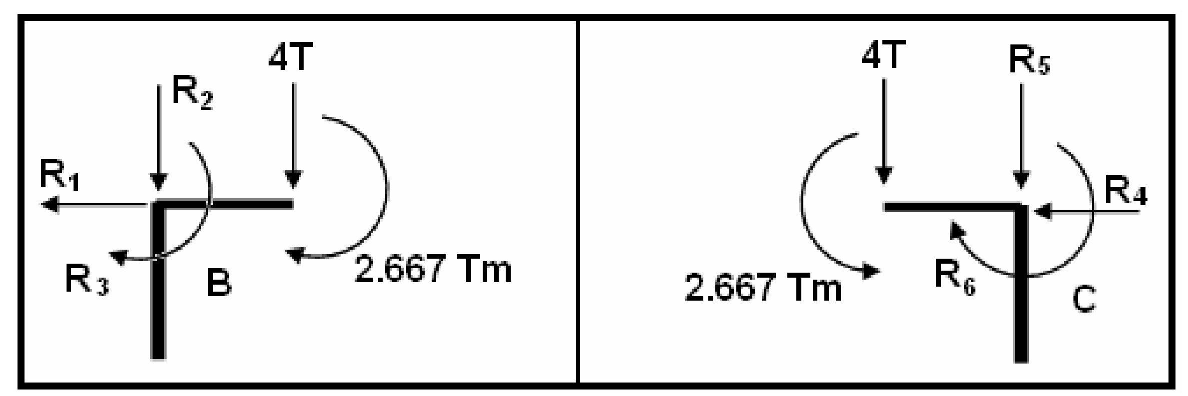


Figura 4.2.5 Equilibrio de la Junta B. **Figura 4.2.6** Equilibrio de la Junta C.

En las figuras 4.2.5 y 4.2.6 se presentan las fuerzas y momentos que actúan en las juntas B y C respectivamente. Nótese, por ejemplo, en la junta B que el cortante de empotramiento perfecto de 4T que en el elemento BC, de la figura 4.2.4 está hacia arriba, en la junta actúa hacia abajo como lo muestra la figura 4.2.5. Esto se debe a que en el un caso son acciones en el elemento y en el otro acciones en las juntas, lo propio sucede con los momentos de empotramiento perfecto. Por otra parte las cargas (fuerzas y momentos) de fijación R_i gravitan directamente en las juntas.

- **Equilibrio de la junta B**

$$\sum \overset{\rightarrow +}{Fx} = 0 \quad \rightarrow \quad R_1 = 0$$

$$+\downarrow \sum Fy = 0 \quad \rightarrow \quad R_2 + 4 = 0 \quad \rightarrow \quad R_2 = -4$$

$$\sum M = 0 \quad \rightarrow \quad R_3 + 2.667 = 0 \quad \rightarrow R_3 = -2.667$$

- **Equilibrio de la junta C**

$$\sum \overset{\rightarrow +}{Fx} = 0 \quad \rightarrow \quad R_4 = 0$$

$$+\downarrow \sum Fy = 0 \quad \rightarrow \quad R_5 + 4 = 0 \quad \rightarrow \quad R_5 = -4$$

$$\sum M = 0 \quad \rightarrow \quad R_6 - 2.667 = 0 \quad \rightarrow R_6 = 2.667$$

En el problema complementario solo se tienen las fuerzas de fijación actuando sobre las juntas.

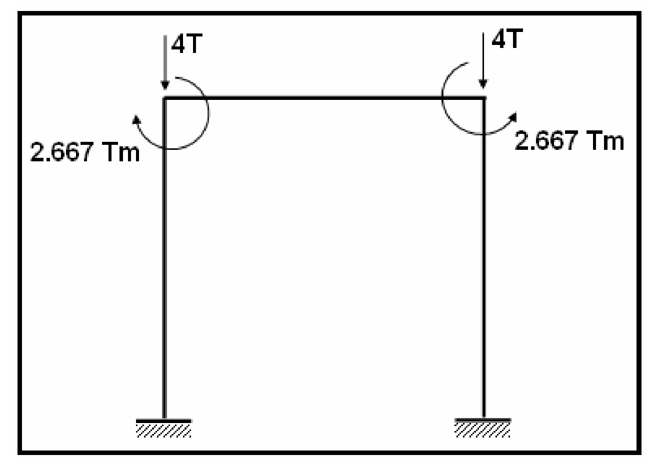


Figura 4.2.7 Problema complementario

Al observar las figuras 4.2.2 y 4.2.7 se determinan los elementos del vector de cargas generalizadas, que resultan:

$Q_1 =$ 0 $Q_2 =$ -4 T $Q_3 =$ -2.667 Tm

$Q_4 =$ 0 $Q_5 =$ -4 T $Q_6 =$ 2.667 Tm

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ -4.000 \\ -2.667 \\ 0.0000 \\ -4.000 \\ 2.6670 \end{bmatrix}$$

- **EJEMPLO N.- 2**

Para la estructura de la figura 4.3.1, resolver el problema primario; indicar el problema complementario y obtener el vector de cargas generalizadas.

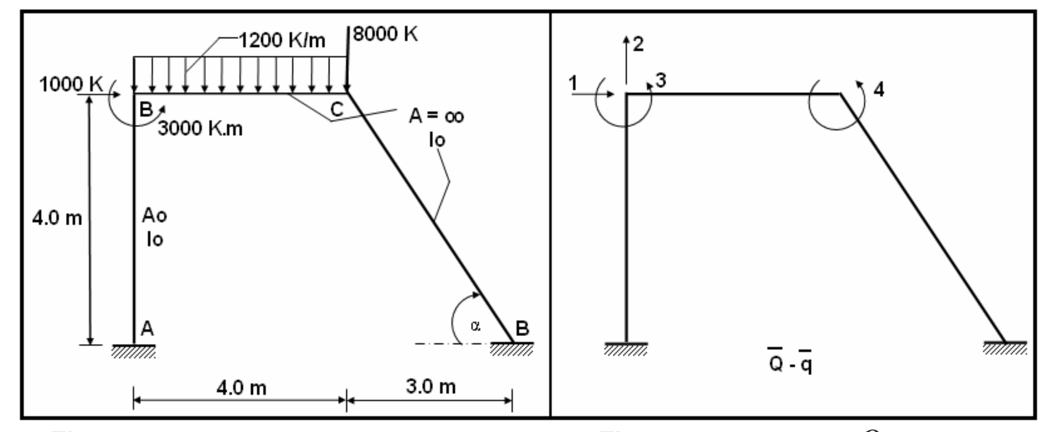


Figura 4.3.1 Estructura del ejemplo 2. **Figura 4.3.2** Sistema $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{q}$

- **SOLUCIÒN**

Para el pórtico analizado, se tiene que el sistema de coordenadas generalizadas es el presentado en la figura 4.3.2.

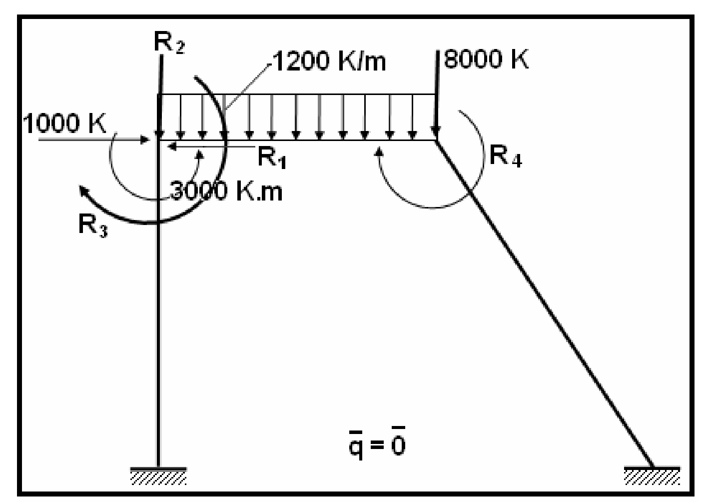


Figura 4.3.3 Problema primario

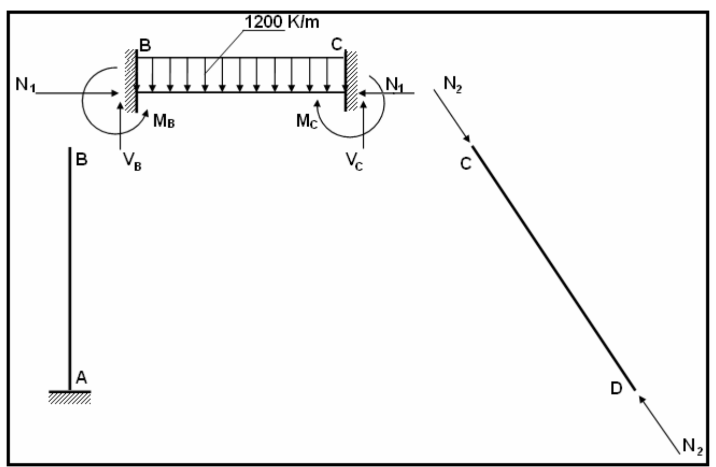


Figura 4.3.4 Equilibrio de miembros

$$V_B = V_C = \frac{1200 \ * \ 4}{2} = 2400 \quad Kg$$

$$M_B = M_C = \frac{1200 \ * \ 4^2}{12} = 1600 \quad Kg.m$$

Nótese que en los elementos BC y CD existen fuerzas axiales N_1 y N_2 que se deben calcular, esto es debido a que estos miembros son axialmente rígidos. Otra forma de ver esto seria que debido al sistema de cargas que actúan en la estructura estos elementos se deberían deformar axialmente pero como no pueden hacerlo porque se consideran axialmente rígidos se originan estas fuerzas N_1 y N_2.

Una vez que se ha terminado el equilibrio en cada uno de los elementos, se procede al equilibrio de las juntas. Las fuerzas que actúan en los elementos en las juntas lo hacen con sentido contrario. En cada junta se debe cumplir que:

$\Sigma Fx = 0$, $\Sigma Fy = 0$ y $\Sigma M = 0$

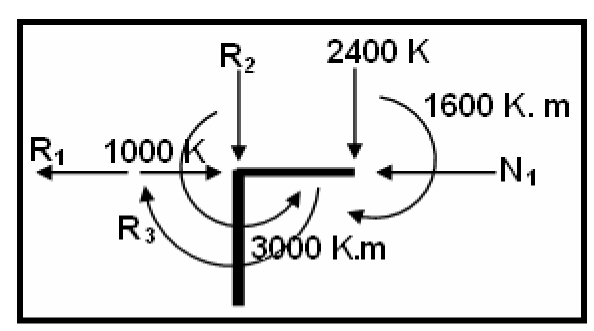


Figura 4.3.5 Equilibrio de junta B

$$\sum \overset{\rightarrow +}{F} x = 0$$

$$1000 - R_1 - N_1 = 0$$

$$+\downarrow \sum F\ y = 0$$

$$2400 + R_2 = 0$$

$$\sum M = 0$$

$$R_3 + 1600 - 3000 = 0$$

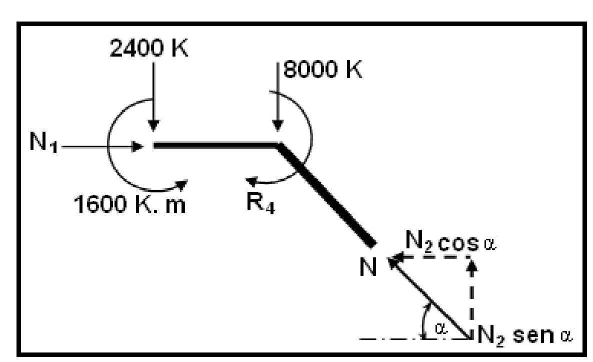


Figura 4.3.6 Equilibrio de junta C

$$\sum \overset{\rightarrow +}{F} x = 0$$

$$N_1 - N_2 \quad \cos\alpha = 0$$

$$+\downarrow \sum F\ y = 0$$

$$N_2 \quad sen\alpha - 2400 - 8000 = 0$$

$$\sum M = 0$$

$$R_4 - 1600 = 0$$

Únicamente por didáctica, a las juntas se las ha dibujado más grandes. Al resolver el sistema de ecuaciones y considerando que: sen α = 4/5 y cos α = 3/5 se obtiene:

N_1 = 7800 Kg	N_2 = 13000 Kg
R_1 = -6800 Kg	R_2 = -2400 Kg
R_3 = 1400 Kg.m	R_4 = 1600 Kg.m

Ahora en el problema complementario actúan solamente las fuerzas de fijación R, con sentido contrario al del problema primario.

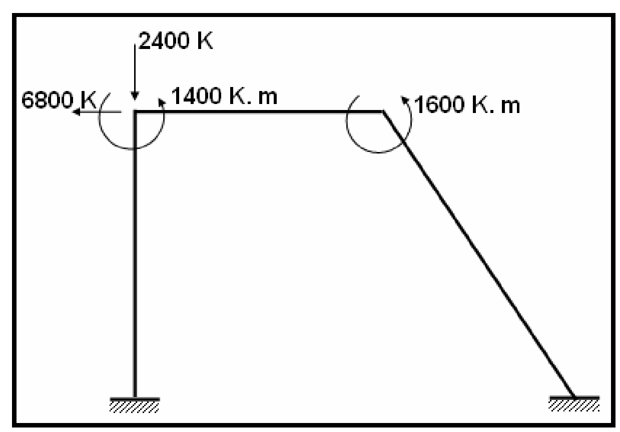


Figura N.- 4.3.7 Problema complementario

El vector de cargas generalizadas $\boldsymbol{Q}$ se obtiene del problema complementario.

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} -6800 \\ -2400 \\ 1400 \\ 1600 \end{bmatrix}$$

- **EJEMPLO N.- 3**

Con el objeto de ilustrar el procedimiento de cálculo cuando se tienen elementos transversalmente rígidos se resuelve el ejercicio anterior cambiando la condición de A = ∞ por I = ∞, para el miembro BC. Por lo tanto se resolverá la estructura indicada en la figura 4.4.1.

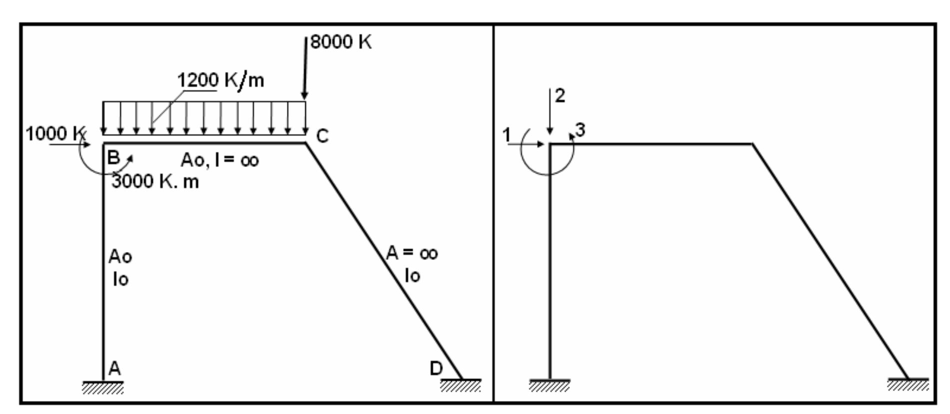


Figura 4.4.1 Estructura de ejemplo 3 y sistema $\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{q}$

Al hacer equilibrio de elementos hay que tener presente que el miembro BC no trabaja a flexión, en consecuencia en sus extremos actuarán dos momentos μ y μ' que deben ser calculados. Esta es una forma de resolver el ejercicio, calculando los momentos finales que en este caso se han llamado μ y μ'. Otra forma de resolver es encontrar los momentos de empotramiento debido a la carga vertical y a esos momentos añadir un momento por la condición de $I=\infty$. Se resolverá el ejercicio de las dos formas en los ejemplos 3 y 4.

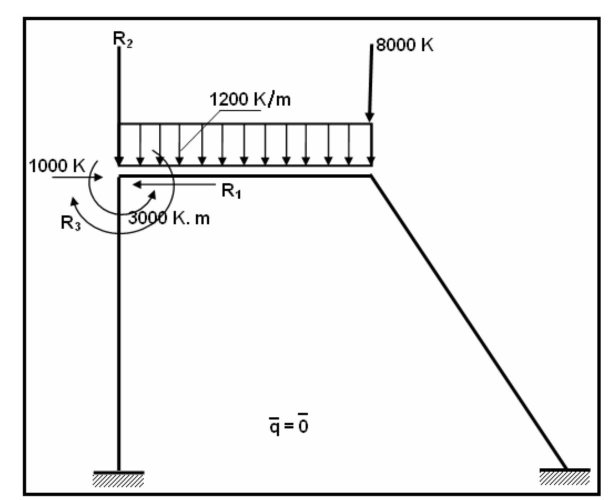


Figura N.- 4.4.2 Problema primario

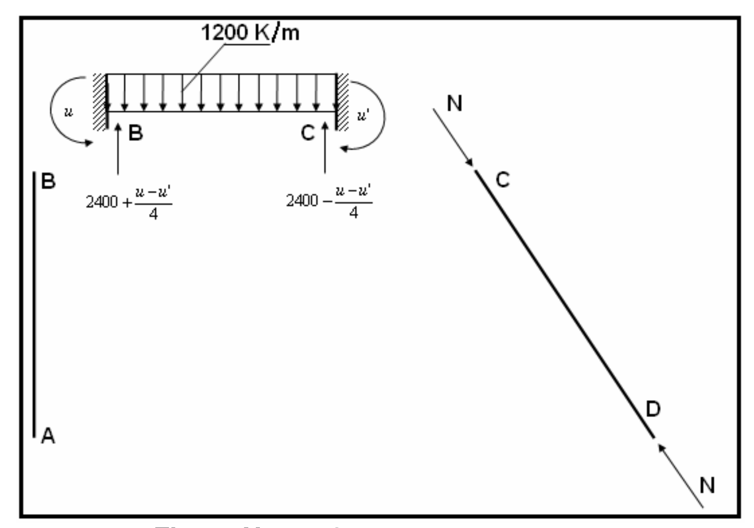
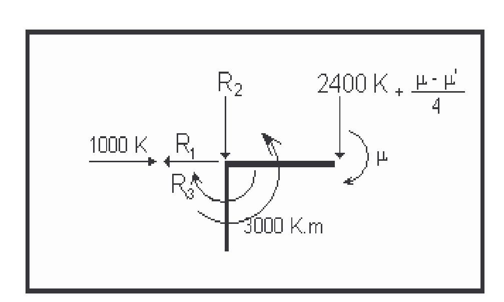


Figura N.- 4.4.3 Equilibrio de elementos

El cortante en el miembro BC es igual al producido por la carga distribuida más en el que se produce por la acción de los momentos μ y $\mu^{'}$. El sentido positivo de estos momentos es arbitrario. En este caso se ha colocado μ horario y $\mu^{'}$ antihorario. Se pudo haber colocado al revés pero lo importante es que los cortantes se encuentren en concordancia con los momentos para que exista equilibrio.

- **Equilibrio de las juntas**

Junta B

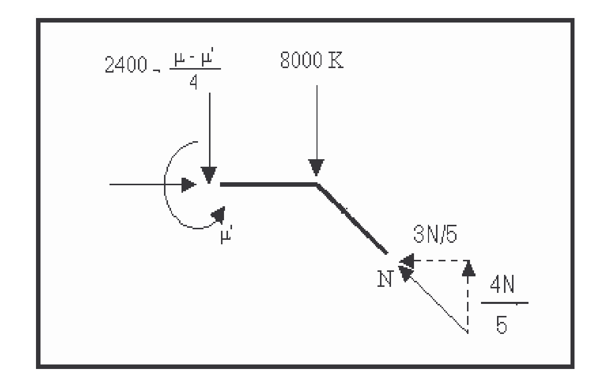


$$\overset{\pm}{\sum} Fx = 0 \Rightarrow 1000 - R_1 = 0$$

$$+\downarrow \sum Fy = 0 \Rightarrow R_2 + 2400 + \frac{\mu - \mu'}{4} = 0$$

$$\overset{+}{\sum} M = 0 \Rightarrow R_3 + \mu - 3000 = 0$$

Junta C



$$\overset{+}{\rightarrow}\sum Fx = 0 = -\frac{3}{5}N = 0$$

$$+\downarrow \sum Fy = 0$$

$$2400 - \frac{\mu - \mu'}{4} + 8000 - \frac{4}{5}N = 0$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow \mu' = 0$$

De la solución del sistema de ecuaciones se tiene:

N = 0 u = 41600 Kg.m

u' = 0 R_1 = 1000 Kg.

R_2 = -12800 Kg R_3 = -38600 Kg.m

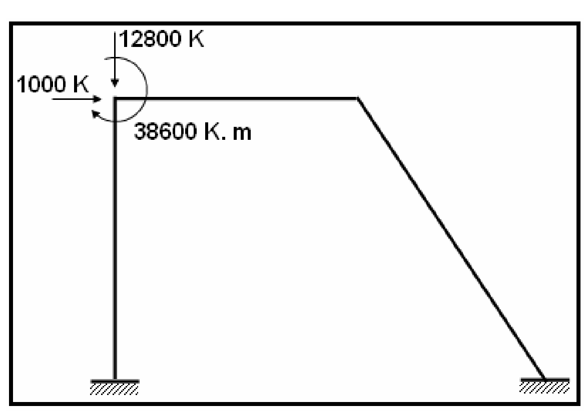


Figura N.- 4.4.4 Problema complementario

El vector de cargas generalizadas se obtiene directamente del Problema Complementario.

$$Q = \begin{bmatrix} 1000 \\ -12800 \\ -38600 \end{bmatrix}$$

- **EJEMPLO N.- 4**

Resolver de otra forma el ejemplo N.- 3, considerando los momentos de empotramiento que produce la carga vertical.

- **SOLUCIÓN**

Al hacer el equilibrio de elementos, en la figura 4.4.3 no se colocó las acciones de empotramiento perfecto que produce la carga uniforme repartida esto se lo va a realizar en este

ejercicio y luego se añadirán los momentos μ y μ' que son necesarios que actúen en los extremos del miembro transversalmente rígido para que no trabaje a flexión.

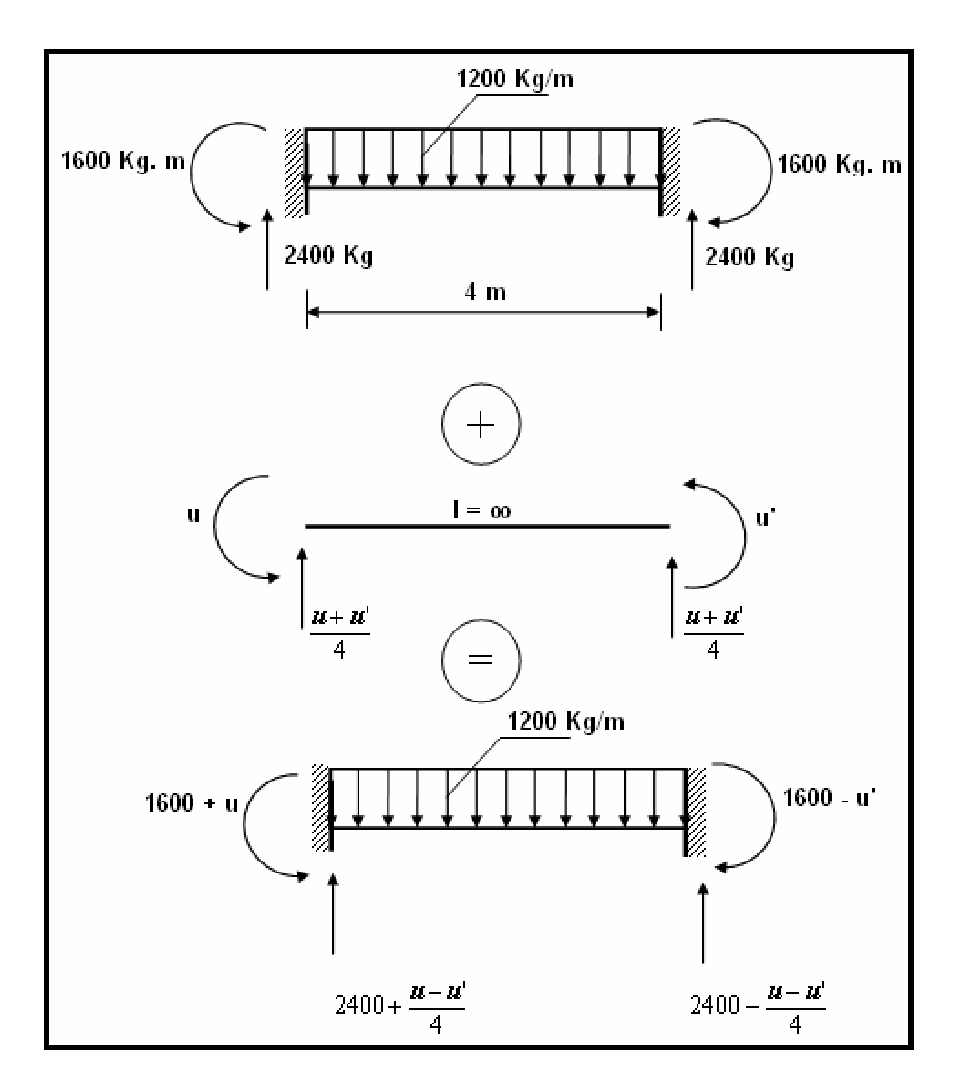
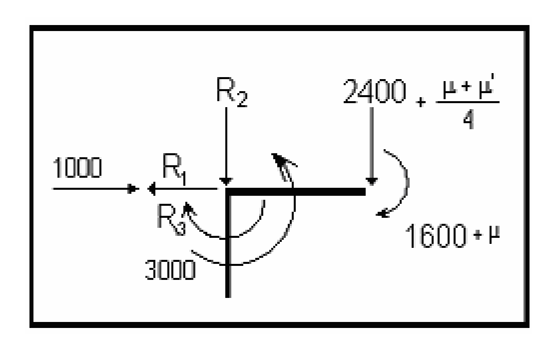


Figura 4.4.5 Equilibrio del elemento BC

Para el presente caso el equilibrio de juntas resulta.

- **Junta B**

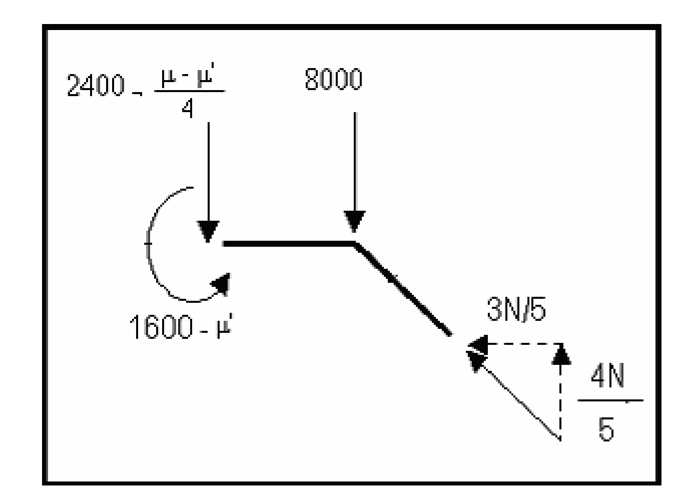


$$\overset{+}{\rightarrow}\sum Fx = 0 \Rightarrow R_1 = 1000$$

$$+\downarrow \sum Fy = 0 \Rightarrow R_2 + \frac{\mu+\mu'}{4} + 2400 = 0$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow 1600 + \mu - 3000 + R_3 = 0$$

- **Junta C**



$$\overset{+}{\rightarrow}\sum Fx = 0 \Rightarrow -\frac{3}{5}N = 0 \Rightarrow N = 0$$

$$+\downarrow \sum Fy = 0$$

$$8000 + 2400 - \frac{\mu - \mu'}{4} - \frac{4}{5}N = 0$$

$$\overset{+}{\curvearrowright}\sum M = 0 \Rightarrow 1600 - \mu' = 0$$

La solución del sistema de ecuaciones reporta:

u = 40000 Kg.m	u' = 1600 Kg m
N = 0	R_1 = 1000 Kg
R_2 = -12800 Kg	R_3 = -38600 Kg.m

Por lo tanto, se obtiene el mismo vector de cargas generalizadas, ya que los valores de las fuerzas R_i son los mismos del ejercicio anterior. Se deja al lector el comentario por que los momentos μ y μ' son diferentes.

4.2 TRABAJOS VIRTUALES

Otra forma de obtener el vector de cargas generalizadas en una estructura es mediante la aplicación del principio de los trabajos virtuales.

Por ejemplo, si sobre la estructura de la figura 4.5.1 actúan el sistema de cargas mostrado, mediante la aplicación del problema primario y complementario, se puede tener solamente cargas concentradas Q en las juntas, como lo ilustra la figura 4.5.3. Para el pórtico analizado el sistema de coordenadas $Q - q$ se presenta en la figura 4.5.2.

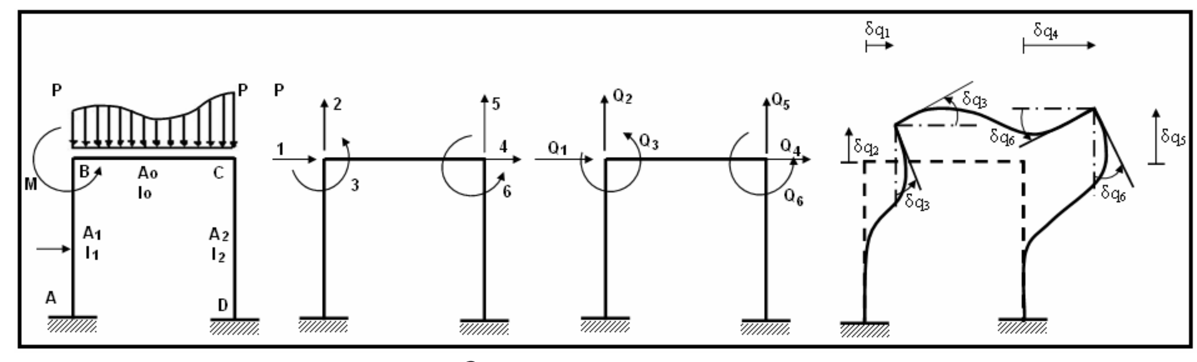


Figura 4.5.1 **Figura 4.5.2 $Q - q$** **Figura 4.5.3** **Figura 4.5.4**

El objetivo es calcular Q_1, Q_2, Q_3, … , Q_6 por trabajos virtuales. Para esto en la figura 4.5.4 se han dibujado unos posibles desplazamientos que podrían tener la estructura, desplazamientos virtuales. Por ser virtuales se les antepone la letra δ a la variable q.

El Trabajo Virtual (TV) del sistema de cargas de la figura 4.5.3 en los desplazamientos virtuales de la figura 4.5.4, vale:

$$TV = Q_1 \ \delta q_1 + Q_2 \ \delta q_2 + Q_3 \ \delta q_3 + Q_4 \ \delta q_4 + Q_5 \ \delta q_5 + Q_6 \ \delta q_6 \qquad (4.1)$$

Este trabajo virtual también es igual al producido por el sistema de cargas de la figura 4.5.1 en los desplazamientos virtuales de la figura 4.5.4.

Entonces, para calcular Q_1, se construirá la deformada elemental siguiente:

$$\delta q_1 = 1 \ \text{y} \ \delta q_i = 0 \qquad i \neq 1$$

Para esta deformada elemental la ecuación (4.1) queda:

$$TV = Q_1 * 1$$

Pero este trabajo virtual es igual al que produce el sistema de cargas de la figura 4.5.1 en la deformada elemental indicada.

En resumen, **Q_1 es el trabajo virtual del sistema de cargas de la figura 4.5.1 en la deformada elemental correspondiente a** δq_1. Para calcular **Q_2 se debe evaluar el trabajo virtual del sistema de cargas en la deformada elemental** δq_2, etc. En consecuencia se evalúa una por una las componentes del vector de cargas generalizadas $\boldsymbol{Q}$

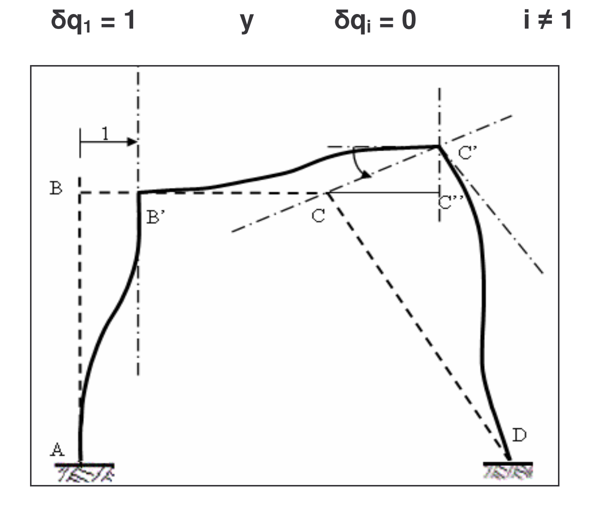
- **EJEMPLO N.- 5**

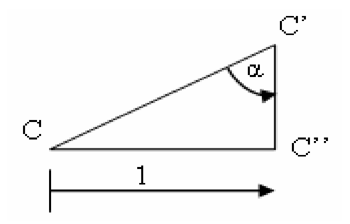
Calcular el vector $\boldsymbol{Q}$, empleando trabajos virtuales, para la estructura de la figura 4.3.1. Si el sistema de coordenadas generalizadas es el presentado en la figura 4.3.2.

- **SOLUCIÓN**

  - **Cálculo de Q_1**

$\delta q_1 = 1$ y $\delta q_i = 0$ $i \neq 1$





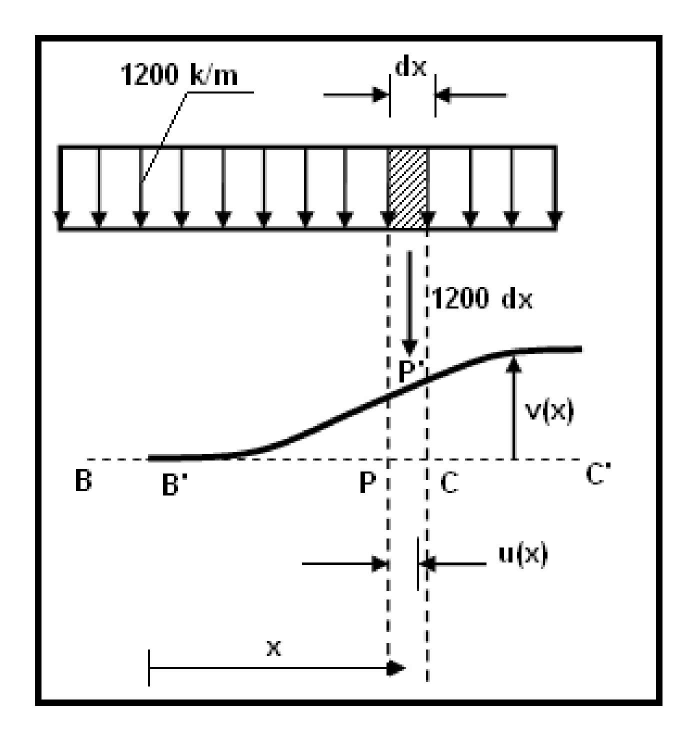
En el triángulo CC'C'' se tiene: C'C'' = Cotg α = 3/4

El trabajo virtual del sistema de cargas de la figura 4.3.1 en la deformada elemental dibujada, vale:

$$Q_1 = TV = 1000(kg) * 1 + 3000(kg\ m) * 0 - 8000(kg) * \frac{3}{4} + Y$$

La carga horizontal de 1000 Kg que actúa en la junta B produce un TV positivo toda vez que el nudo B se desplaza a B' en la misma dirección de la aplicación de la carga. En cambio la carga vertical de 8000 Kg que gravita en el nudo C hacia abajo genera un trabajo vertical negativo ya que la junta C se desplaza hacia arriba hasta C'. El momento de 3000 Kg.m no produce TV ya que la junta B no rota.

Sea Y el trabajo virtual producido por la carga uniformemente distribuida.



Al analizar un elemento diferencial dx cualquiera del elemento BC, vemos que un punto P, después de deformarse horizontalmente u(x) y verticalmente v(x), pasa a P'.

Por otra parte al considerar la carga distribuida en el elemento diferencial dx, se tiene que la resultante vale: 1200 . dx y actúa hacia abajo. Por lo tanto el trabajo virtual en este elemento diferencial valdrá: -1200 . dx . v(x). En consecuencia:

$$Y = \int_0^4 -1200 * v(x)\ dx$$

$$v(x) = v_1\ \phi_2(x) + \theta_1 \phi_3(x) + v_2 \phi_5(x) + \theta_2 \phi_6(x)$$

En la deformada elemental se tiene que $v_1 = 0, \theta_1 = 0, \theta_2 = 0$ y $v_2 = \frac{3}{4}$. Luego:

$$v(x) = \frac{3}{4}\left(\frac{3X^2}{L^2} - \frac{2X^3}{L^3}\right)$$

Reemplazando en la integral el valor de v(x):

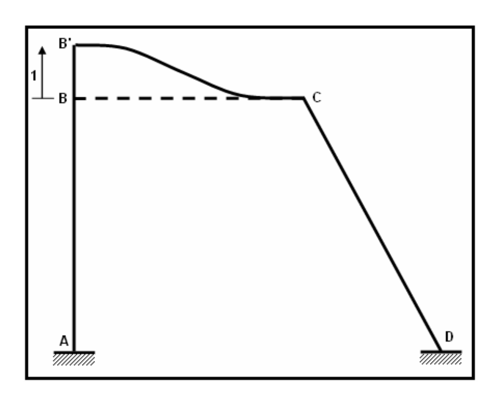
$$Y = -1200\int_0^4 \frac{3}{4}\left(\frac{3X^2}{L^2} - \frac{2X^3}{L^3}\right)dx = -900\left|\frac{X^3}{L^2} - \frac{X^4}{2L^3}\right|_0^4 = -1800\ Kg$$

Por lo tanto, la carga generalizada correspondiente a la coordenada q_1 vale:

Q_1 = 1000 Kg. -6000 Kg. -1800 Kg. = - 6800 Kg.

- **Cálculo de** Q_2

δq₂ = 0 y **δqᵢ = 0** **i ≠ 2**



En este caso solamente la carga distribuida produce trabajo virtual.

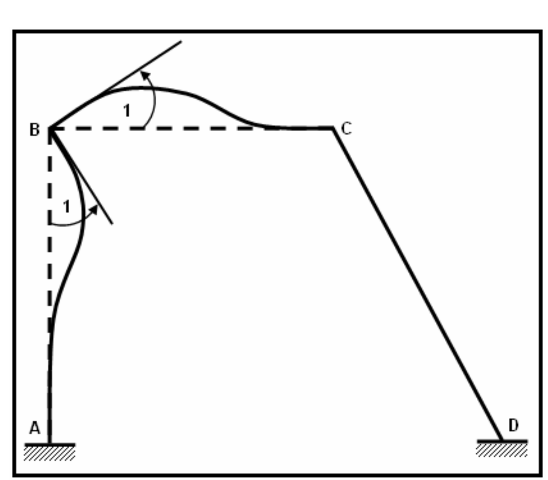
$$Q_2 = \int_0^4 -1200.\ v(x)\ .dx$$

$$v(x) = v_1\ \phi_2(x) = 1\left(1 - \frac{3X^2}{L^2} + \frac{2X^3}{L^3}\right)$$

$$Q_2 = -1200\int_0^4 \left(1 - \frac{3X^2}{L^2} + \frac{2X^3}{L^3}\right)dx = -2400Kg$$

- **Cálculo de** Q_3

δq₃ = 1 y **δqᵢ = 0** **i ≠ 3**



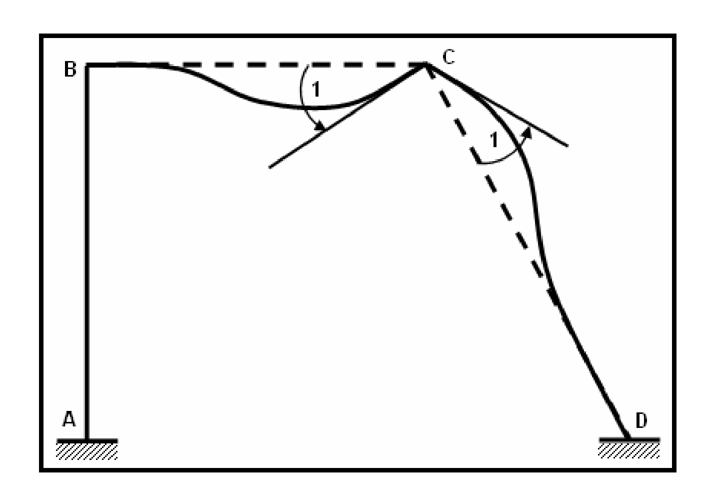
$$Q_3 = 3000\ Kg\ m. * 1 + \int_0^4 -1200\ v(x)\ dx$$

$$v(x) = \theta_1\ \phi_3(x) = 1 * X\left(1 - \frac{X}{L}\right)^2$$

$$Q_3 = 3000 - 1200\int_0^4 X\left(1 - \frac{X}{L}\right)^2 dx = 1400\ (Kg.m)$$

- **Cálculo de Q_4**

δq₄ = 1 y **δqᵢ = 0** **i ≠ 4**



$$Q_4 = \int_0^4 -1200.v(x).dx$$

$$v(x) = \theta_2\ \phi_6(x) = -\frac{X^2}{L}\left(1 - \frac{X}{L}\right)$$

$$Q_4 = -1200\int_0^4 -\frac{X^2}{L}\left(1 - \frac{X}{L}\right)dx = 1600\ kg.m.$$

Por lo tanto, el vector de cargas generalizadas, es:

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} -6800 \\ -2400 \\ 1400 \\ 1600 \end{bmatrix}$$

Es más laborioso el cálculo del vector $\boldsymbol{Q}$ empleando trabajos virtuales pero para ciertos problemas puede ser de gran utilidad.

4.3 EJERCICIOS RESUELTOS

- **EJERCICIO N.- 6**

Para la estructura de la figura 4.6 que está conformada por elementos totalmente flexibles, cuyas dimensiones son: $a = 5.5\ m.$ y $b = 3.0\ m.$ Se pide:

a) Seleccionar un sistema de coordinas $Q - q$ apropiado.
b) Resolver el Problema Primario.
c) Señalar cual es el Problema Complementario.
d) Determinar el vector de cargas generalizadas Q

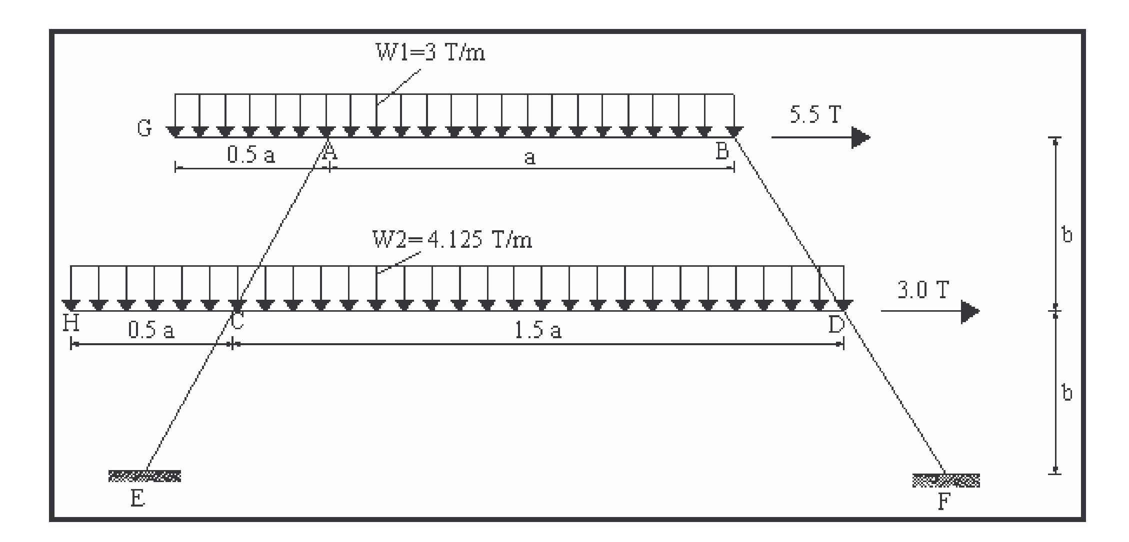
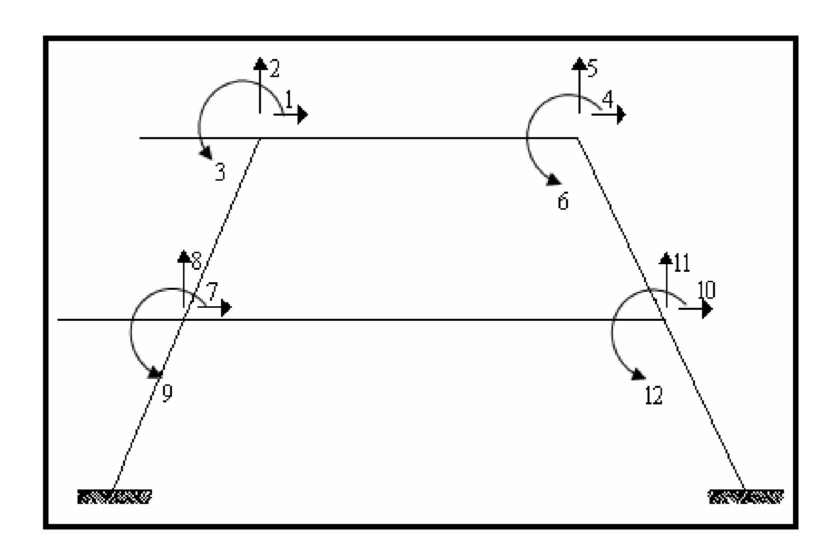


Figura 4.6 Estructura de ejemplo 6.

- **SOLUCIÓN**

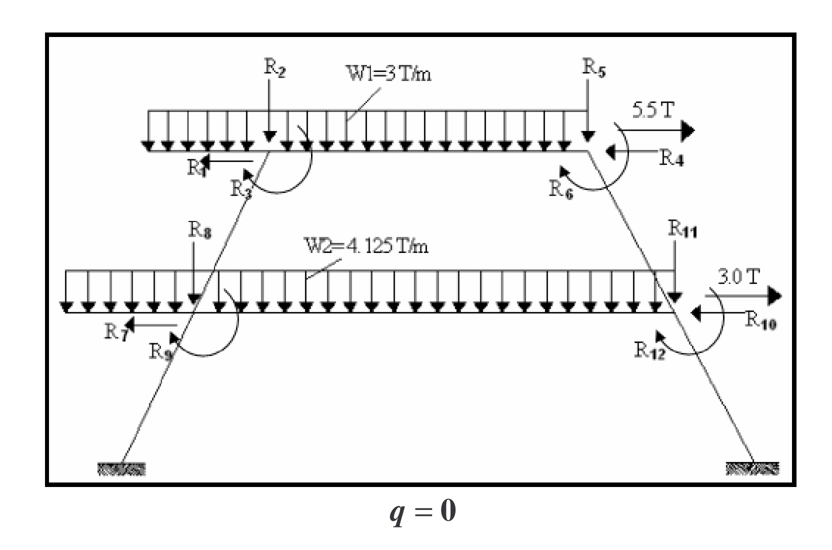
a) Sistema de Coordenadas $Q - q$



Sistema $Q - q$

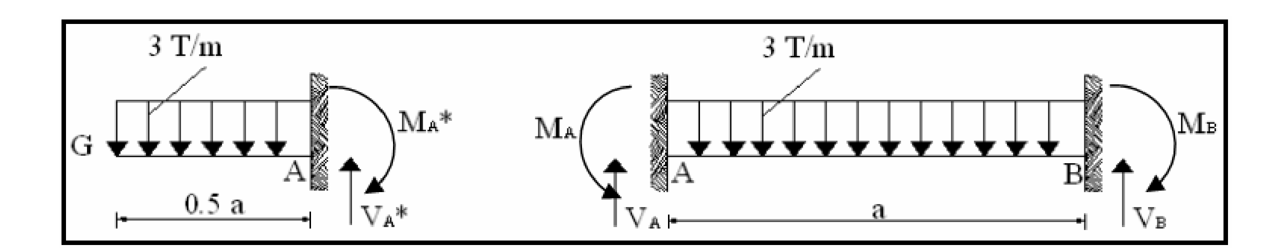
Se puede considerar a los volados como un elemento, en este caso se aumentaría el número de grados de libertad. La otra opción con la cual se trabaja el presente ejemplo es colocar cargas concentradas en los nudos provenientes de la acción de los voladizos ahí se disminuye el número de grados de libertad.

b) Problema Primario



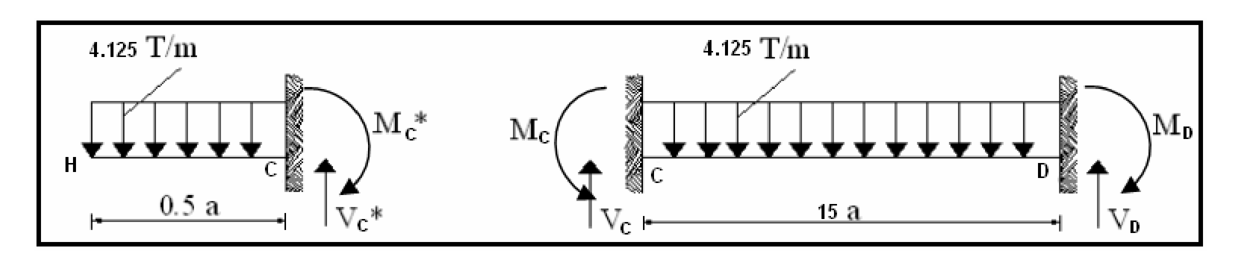
$$q = 0$$

- **Equilibrio de elementos**



$$M_A^* = 3\frac{(2.75)^2}{2} = 11.344\,Tm. \qquad M_A = M_B = 3\frac{(5.5)^2}{12} = 7.563\,Tm.$$

$$V_A^* = 3 * 2.75 = 8.25\,T. \qquad V_A = V_B = \frac{3*5.5}{2} = 8.25\,T.$$

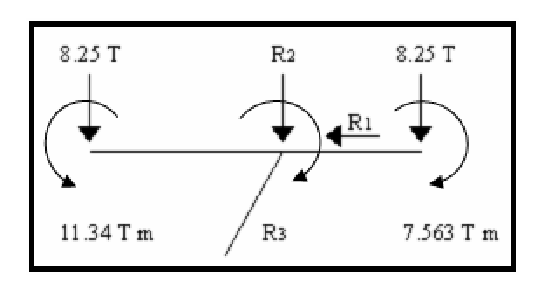


$$M_C^* = 4.125\frac{(2.75)^2}{2} = 15.598\,Tm. \qquad M_D = M_C = 4.125 * \frac{(8.25)^2}{12} = 23.396\,Tm.$$

$$V_C^* = 4.125 * 2.75 = 11.344\,T. \qquad V_D = V_C = 4.125 * \frac{8.25}{2} = 17.016\,T.$$

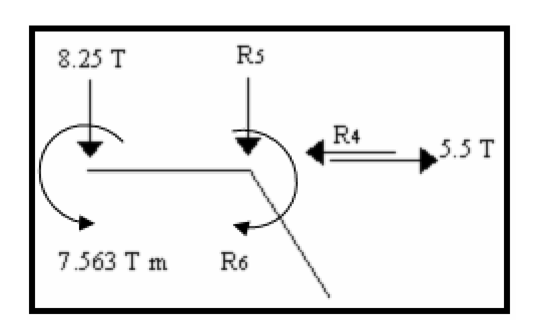
- **Equilibrio de Juntas**

Junta A



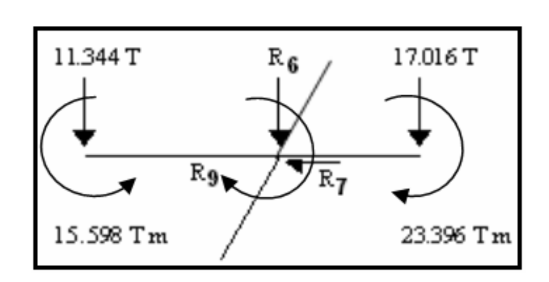
$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad R_1 = 0$$
$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad 8.25 + R_2 + 8.25 = 0 \quad \Rightarrow R_2 = -16.50\,T.$$
$$\sum M = 0 \quad \Rightarrow \quad -11.344 + 7.563 + R_3 = 0 \quad \Rightarrow R_3 = 3.781\,Tm.$$

Junta B



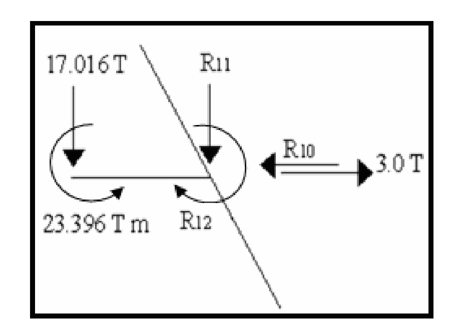
$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad 5.5 - R_4 = 0 \quad \Rightarrow R_4 = 5.5\,T.$$
$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad 8.25 + R_5 = 0 \quad \Rightarrow R_5 = -8.25\,T.$$
$$\sum M = 0 \quad \Rightarrow \quad R_6 - 7.563 = 0 \quad \Rightarrow R_6 = 7.563\,Tm.$$

Junta C



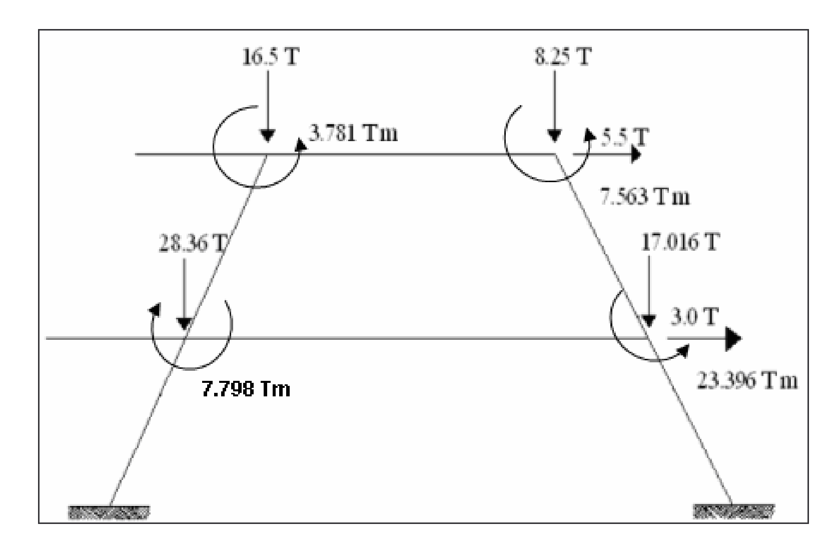
$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad R_7 = 0$$
$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad -11.34 - R_8 - 17.016 = 0 \quad \Rightarrow R_8 = -28.360\,T.$$
$$\sum M = 0 \quad \Rightarrow \quad R_9 + 23.396 - 15.598 = 0 \quad \Rightarrow R_9 = -7.798\,Tm.$$

Junta D



$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad -R_{10} + 3.0 = 0 \quad \Rightarrow R_{10} = 3.0\,T.$$
$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad 17.016 + R_{11} = 0 \quad \Rightarrow R_{11} = -17.016\,T.$$
$$\sum M = 0 \quad \Rightarrow \quad 23.396 - R_{12} = 0 \quad \Rightarrow R_{12} = 23.396\,Tm.$$

c) Problema Complementario



d) Vector de Cargas Generalizadas Q

$$Q = \begin{bmatrix} 0.000 \\ -16.500 \\ 3.781 \\ 5.500 \\ -8.250 \\ 7.563 \\ 0.000 \\ -28.360 \\ -7.798 \\ 3.000 \\ -17.016 \\ 23.396 \end{bmatrix}$$

- **EJERCICIO N.- 7**

Todos los elementos del pórtico de la figura 4.7 se consideran axialmente rígidos. Se pide:

e) Seleccionar un sistema de coordinas $Q - q$ apropiado.
f) Resolver el Problema Primario.
g) Señalar cual es el Problema Complementario.
h) Determinar el vector de cargas generalizadas Q

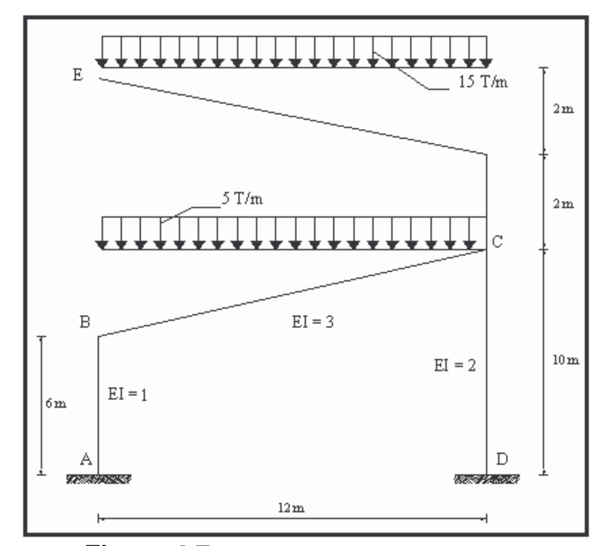
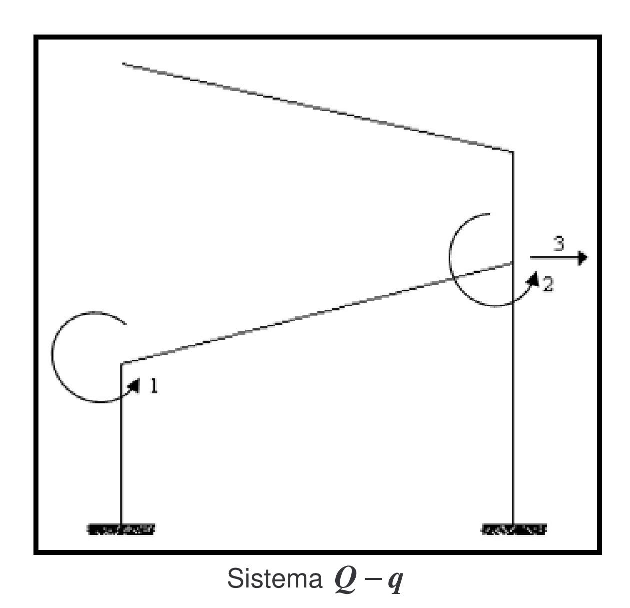


Figura 4.7 Estructura de ejercicio N.- 7.

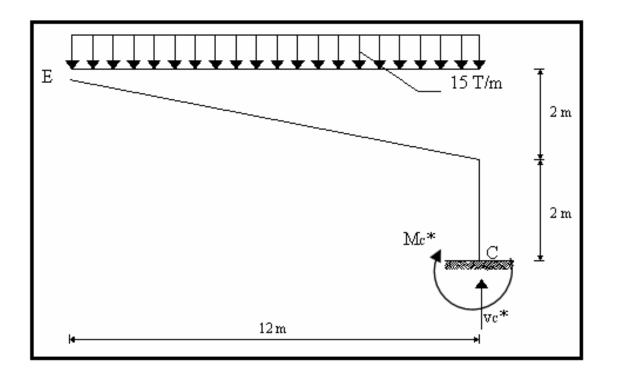
- **SOLUCIÓN**

a) Sistema de Coordenadas $Q - q$



Sistema $Q - q$

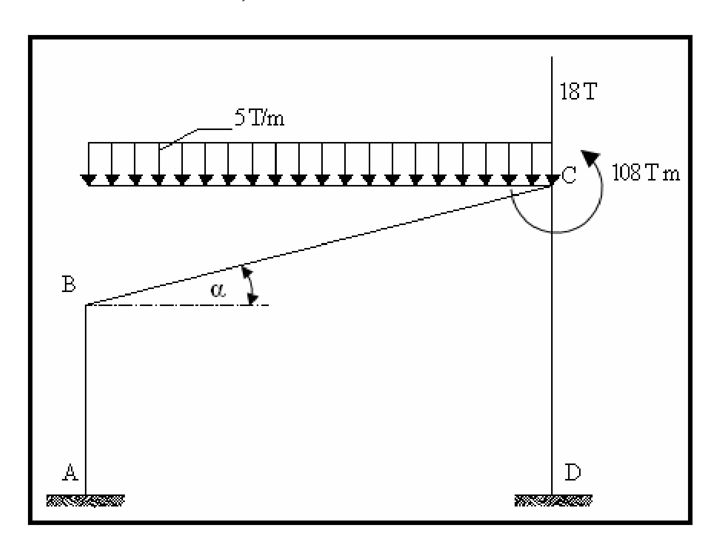
Al elemento EC se lo va a considerar como un voladizo. Por lo tanto hay que calcular las fuerzas exteriores que actúan en el nudo C por efecto de la carga de 1.5 T/m.



$$M_C^* = 1.5 * \frac{(12.0)^2}{2} = 108\ Tm.$$

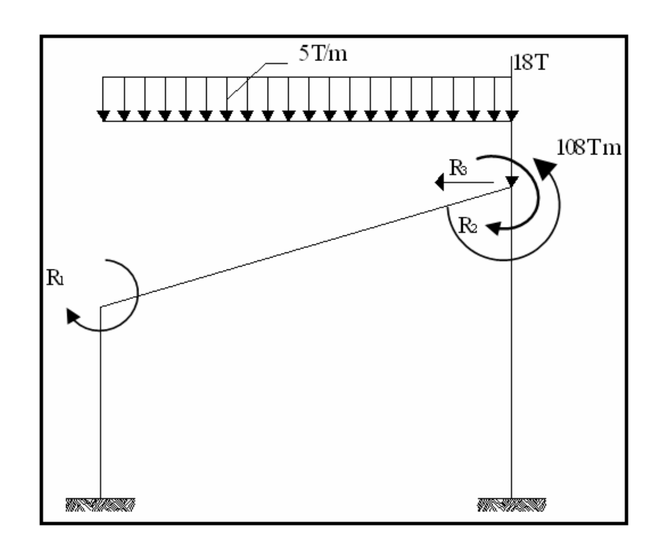
$$V_C^* = 1.5 * 12 = 18\ T$$

Estas fuerzas V_C^* y M_C^* actúan en el nudo C, con sentido contrario en el resto de la estructura como se indica a continuación, sin el voladizo.

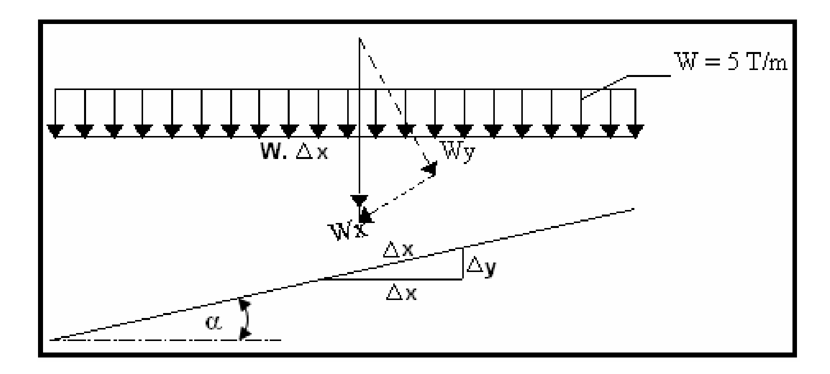


$$Sen\ \alpha = \frac{4}{\sqrt{160}} \qquad Cos\ \alpha = \frac{12}{\sqrt{160}} \qquad Longitud\ BC = \sqrt{160}\ m.$$

b) Problema Complementario



- **Descomposición de la carga distribuida**



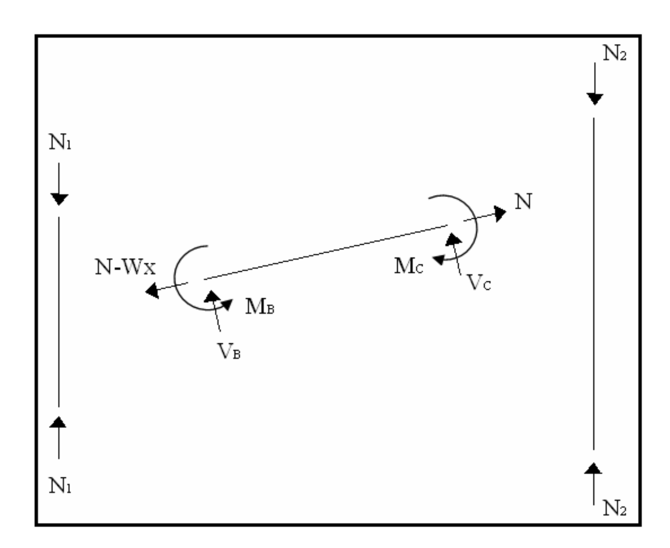
$$W_Y = W \frac{\Delta X}{\Delta x} Cos\ \alpha \qquad\qquad W_X = W \frac{\Delta X}{\Delta x} Sen\alpha$$

pero $\frac{\Delta X}{\Delta x} = Cos\ \alpha$. Luego las cargas uniformes distribuidas perpendicular y axial al eje del elemento son:

$$w_y = W\ Cos^2\alpha = W\ \frac{144}{160} = 4.5\ \frac{T}{m}$$
$$w_x = W\ Sen\alpha\ Cos\alpha = W\ \frac{48}{160} = 1.5\ \frac{T}{m}$$

donde w_y es la carga uniforme distribuida que actúa perpendicular al eje del elemento y w_x es la carga uniforme distribuida que actúa axialmente al eje del elemento.

- **Equilibrio de Elementos**



La resultante de la fuerza axial W_X es igual a la carga uniforme distribuida axial por la longitud.

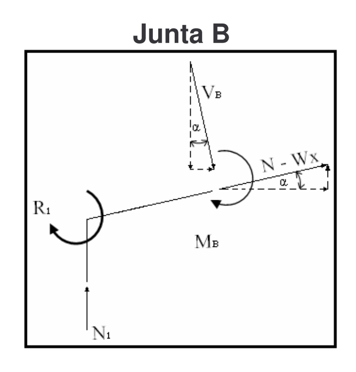
$$W_X = w_x\sqrt{160} = 1.5*\sqrt{160} = 18.974\,T.$$

$$V_B = V_C = \frac{w_y\ \sqrt{160}}{2} = \frac{4.5\ \sqrt{160}}{2} = 28.460\,T.$$

$$M_B = M_C = \frac{w_y\ *160}{12} = \frac{4.5*160}{12} = 60.00\,Tm.$$

- **Equilibrio de Juntas**

Junta B

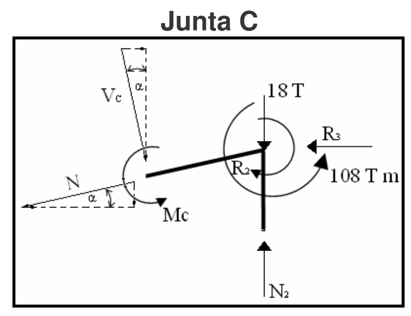


$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad (N - W_X)Cos\ \alpha + V_B\ Sen\alpha \quad \Rightarrow N = 9.487\,T.$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 + (N - W_X)Sen\alpha - V_B\ Cos\alpha = 0 \quad \Rightarrow N_1 = 30.00\,T.$$

$$\sum M = 0 \quad \Rightarrow \quad M_B + R_1 = 0 \quad \Rightarrow R_1 = -60.00\,Tm.$$

Junta C

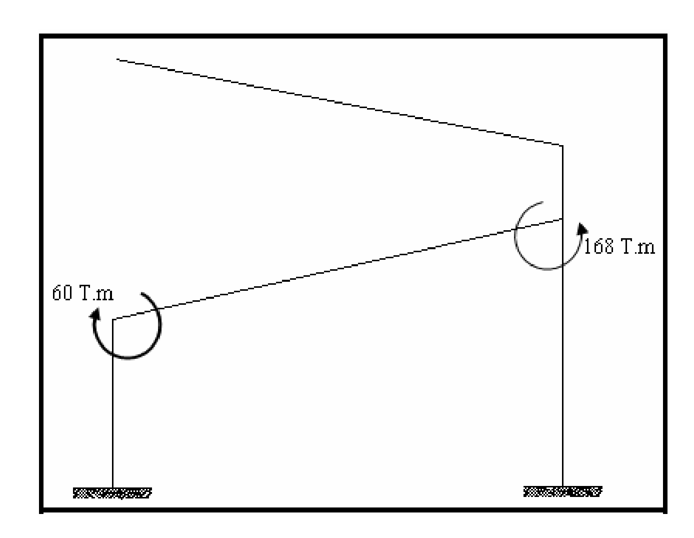


$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad V_C\ sen\alpha - N\ Cos\alpha - R_3 \quad \Rightarrow R_3 = 0$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad -V_c\ Cos\alpha - N\ sen\alpha - 18 + N_2 = 0 \quad \Rightarrow N_2 = 48.00\,T.$$

$$\sum M = 0 \quad \Rightarrow \quad R_2 - 108 - M_C = 0 \quad \Rightarrow R_2 = 168.00\,Tm.$$

c) **Problema Complementario**



d) Vector Q

$$Q = \begin{bmatrix} -60.00 \\ 168.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}$$

- **EJERCICIO N.- 8**

Obtener el vector de cargas generalizadas Q para el pórtico plano de la figura 4.8, empleando trabajos virtuales.

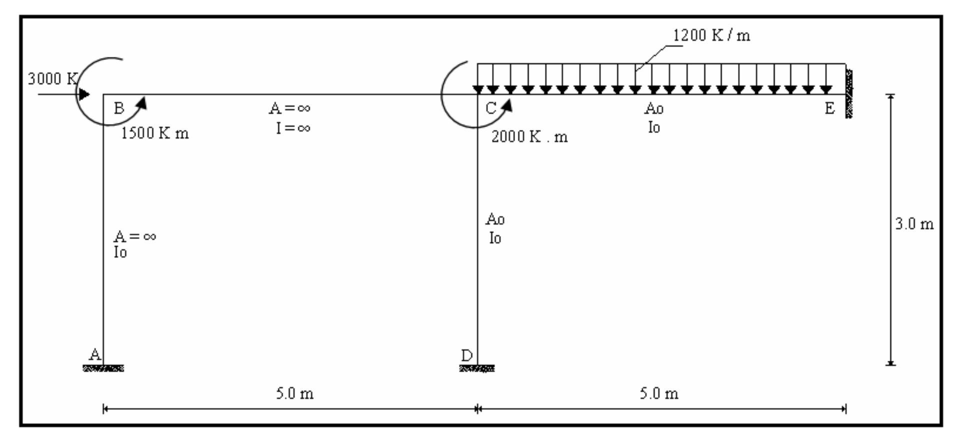
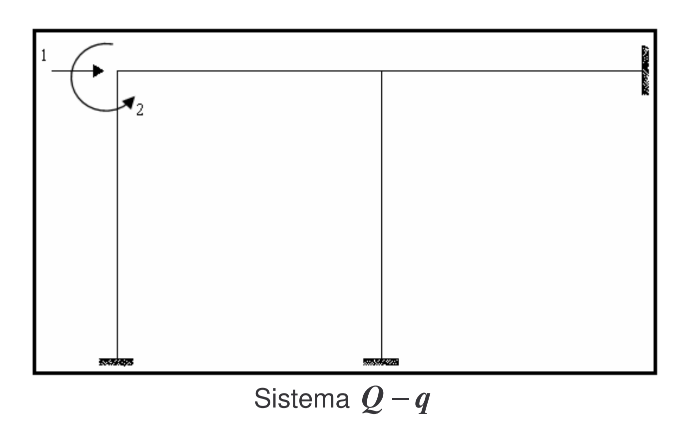


Figura 4.8 Estructura del Ejercicio 8.

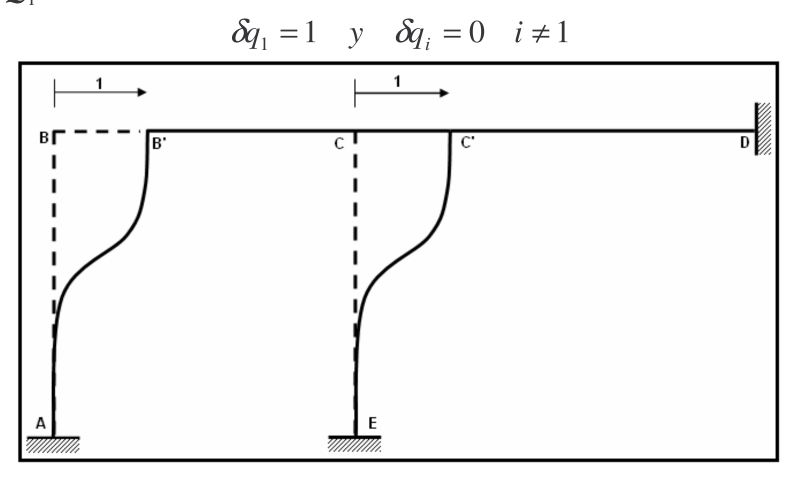
- **SOLUCIÓN**



Sistema $Q - q$

- **Cálculo de Q_1**

$$\delta q_1 = 1 \quad y \quad \delta q_i = 0 \quad i \neq 1$$

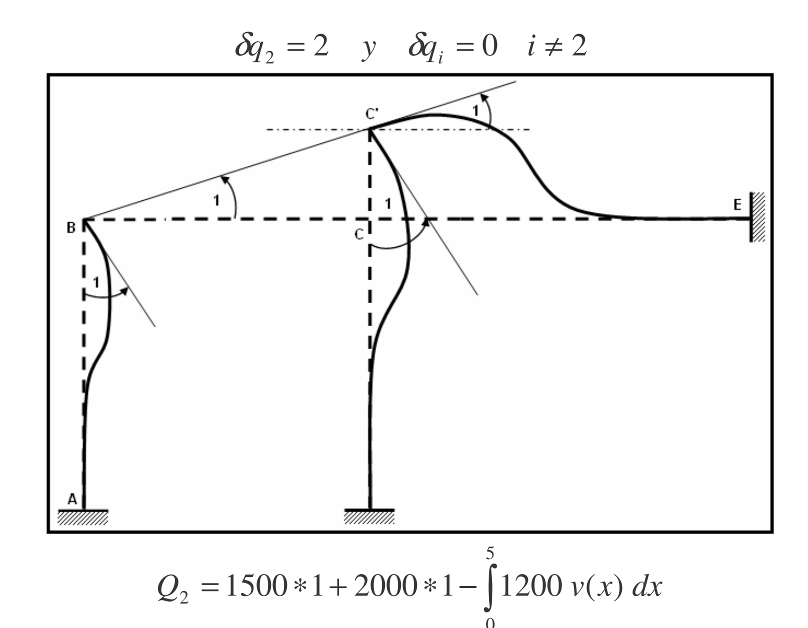


$$Q_1 = 3000 * 1 + 1500 * 0 + 2000 * 0 = 3000\ Kg.$$

La carga uniforme distribuida en este caso no produce trabajo virtual por la forma de la deformada elemental.

- **Cálculo de Q_2**

$$\delta q_2 = 2 \quad y \quad \delta q_i = 0 \quad i \neq 2$$



$$Q_2 = 1500 * 1 + 2000 * 1 - \int_0^5 1200\ v(x)\ dx$$

Para el elemento CE se tiene:

$$v_1 = 5 \qquad v_2 = 0$$
$$\theta_1 = 1 \qquad \theta_2 = 0$$

El valor de v_1 se obtiene aplicando el siguiente artificio en el elemento BC. Cuerda CC' dividido para el radio que viene a ser BC es igual al ángulo unitario. De donde CC'=BC. Este artificio únicamente se aplica en los elementos $I = \infty$. El valor de $v(x)$ resulta:

$$v(x) = v_1\ \phi_2(x) + \theta_1 \phi_3(x) = 5\left(1 - \frac{3X^2}{L^2} + \frac{2X^3}{L^3}\right) + X\left(1 - \frac{X}{L}\right)^2$$

Sustituyendo el valor de $v(x)$ en Q_2 se tiene:

$$Q_2 = 3500 - 1200 \int_0^5 \left[5\left(1 - \frac{3X^2}{L^2} + \frac{2X^3}{L^3}\right) + X\left(1 - \frac{X}{L}\right)^2 \right] dx$$

Luego de realizar la integral y reemplazar los límites respectivos, se halla:

$$Q_2 = -14000\ Kg.m.$$

- **Vector $\boldsymbol{Q}$**

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 3000 \\ -14000 \end{bmatrix}$$

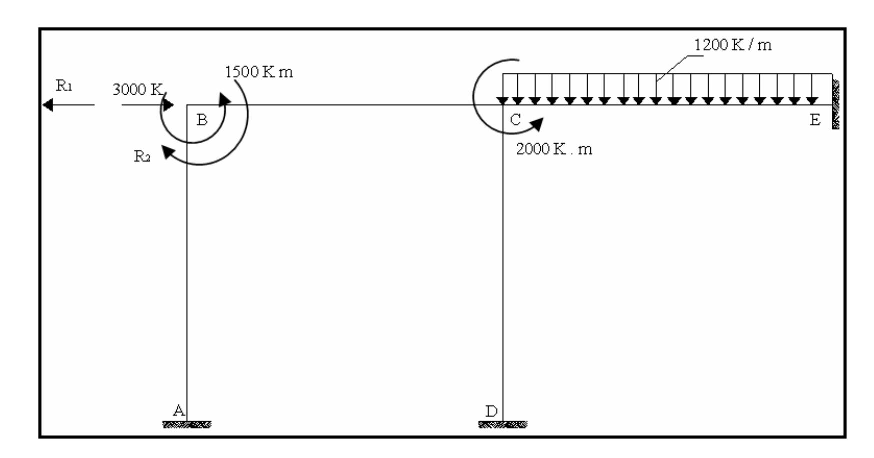
- **EJERCICIO N.- 9**

Con relación al ejercicio N.- 8, ahora se pide:

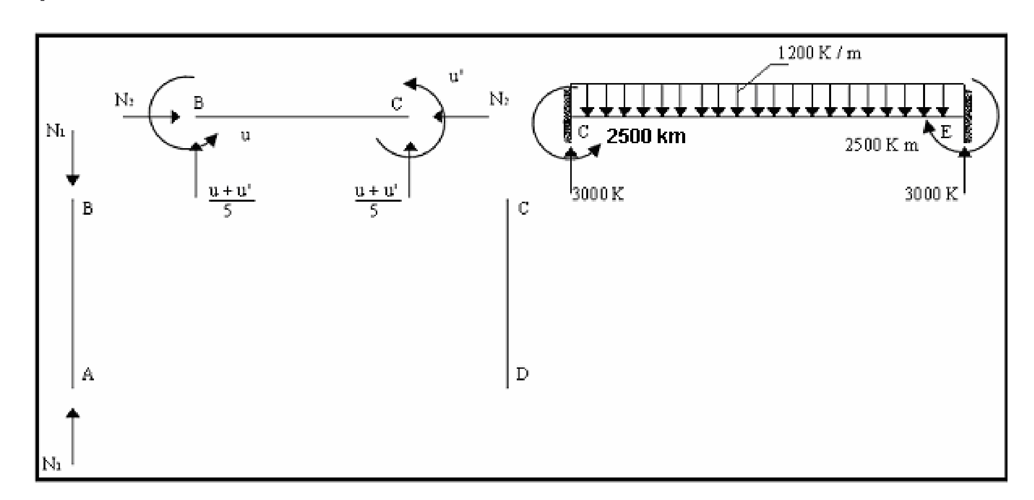
a) Resolver el Problema Primario.
b) Cuál es el problema Complementario.
c) Obtener el vector Q .

- **SOLUCIÓN**

a) Problema Primario

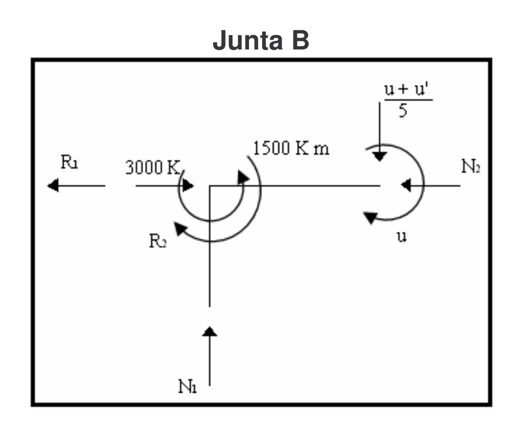


- **Equilibrio de Elementos**



- **Equilibrio de Juntas**

Junta B

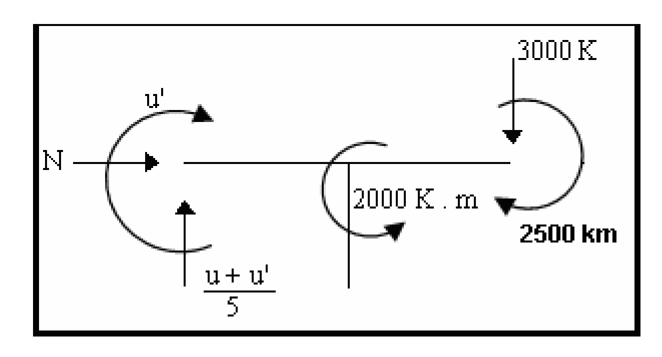


$$\sum F_X = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 3000 - R_1 - N_2 = 0$$

$$\sum F_Y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad N_1 - \frac{(\mu + \mu')}{5} = 0$$

$$\sum M = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R_2 + \mu - 1500 = 0$$

Junta C



$$\sum F_X = 0 \qquad \Rightarrow \qquad N_2 = 0$$

$$\sum F_Y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{(\mu + \mu')}{5} - 3000 = 0$$

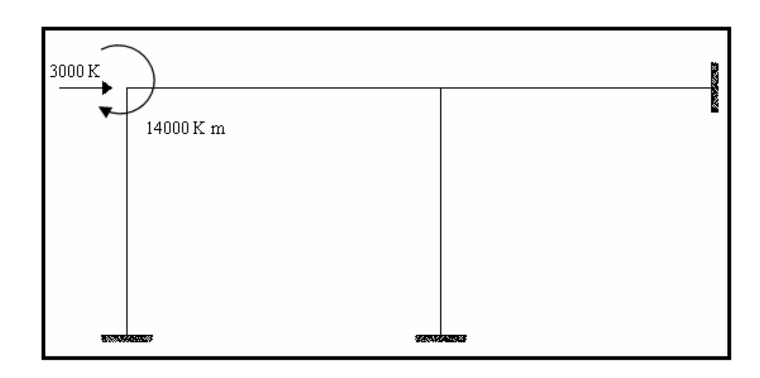
$$\sum M = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 2500 + \mu' - 2000 = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se tiene:

$N_1 = 3000\ Kg.$ $\qquad N_2 = 0$ $\qquad \mu = 15500\ Kg.m.$

$\mu' = -500\ Kg.m.$ $\qquad R_1 = 3000\ Kg.$ $\qquad R_2 = -14000\ Kg.m.$

b) Problema Complementario



c) Vector de Cargas Generalizadas Q

$$Q = \begin{bmatrix} 3000 \\ -14000 \end{bmatrix}$$

- **EJERCICIO N.- 10**

Para la estructura de la figura 4.9, encontrar el vector de Cargas Generalizadas Q a través del Problema Primario y Complementario.

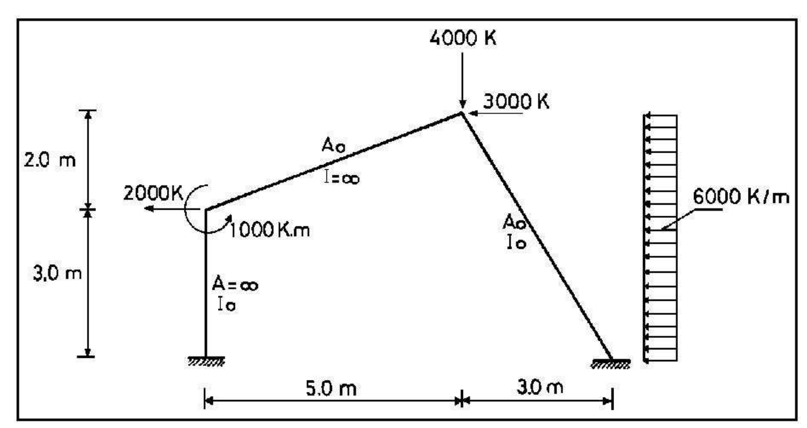
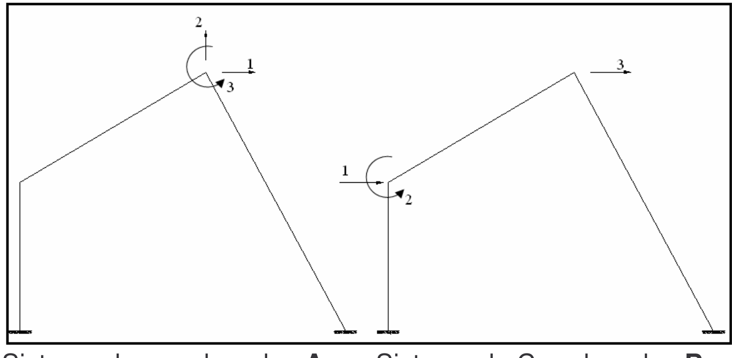


Figura 4.9 Estructura del Ejemplo 10.

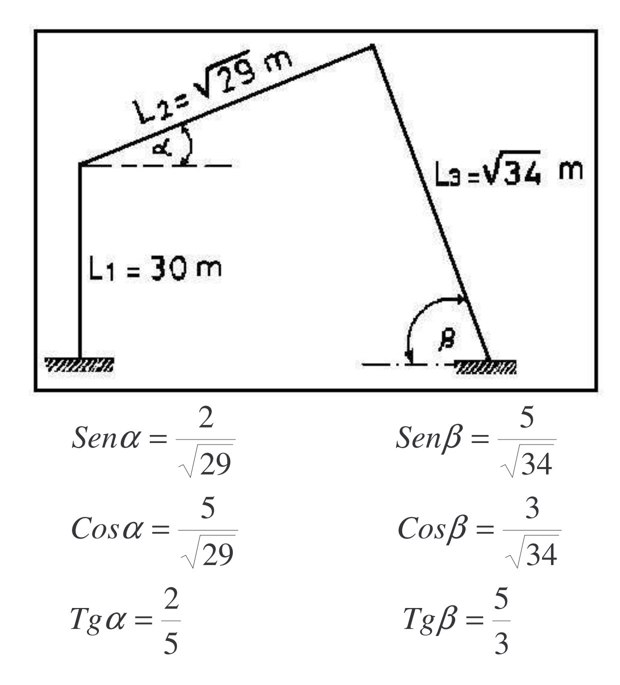
Se va a calcular para los siguientes sistemas de coordenadas $Q - q$.



Sistema de coordenadas **A** Sistema de Coordenadas **B**

- **SOLUCIÓN**

- **Parámetros Geométricos**

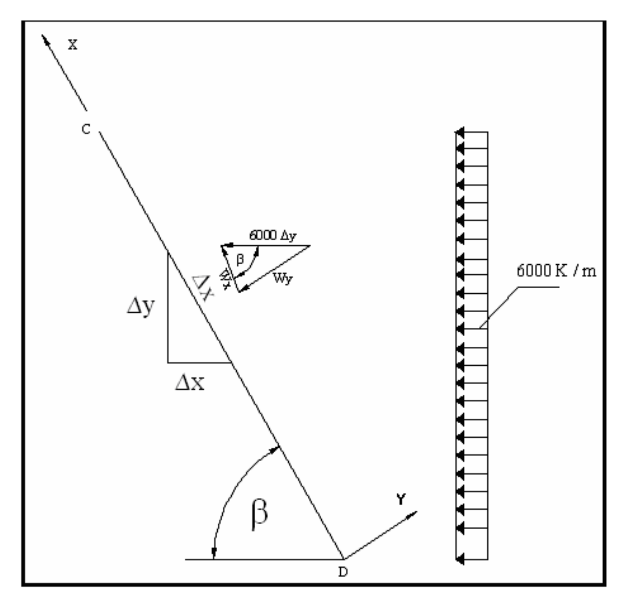


$$Sen\alpha = \frac{2}{\sqrt{29}} \qquad Sen\beta = \frac{5}{\sqrt{34}}$$

$$Cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{29}} \qquad Cos\beta = \frac{3}{\sqrt{34}}$$

$$Tg\alpha = \frac{2}{5} \qquad Tg\beta = \frac{5}{3}$$

Por didáctica se transforma la carga repartida en fuerzas y momentos actuando en los nudos, para ello se debe determinar las fuerzas y momentos de empotramiento perfecto que actúan en el elemento CD.



$$W_Y = 6000 Sen\beta \frac{\Delta Y}{\Delta x} = 6000 Sen^2 \beta = 4411.765\ Kg/m.$$

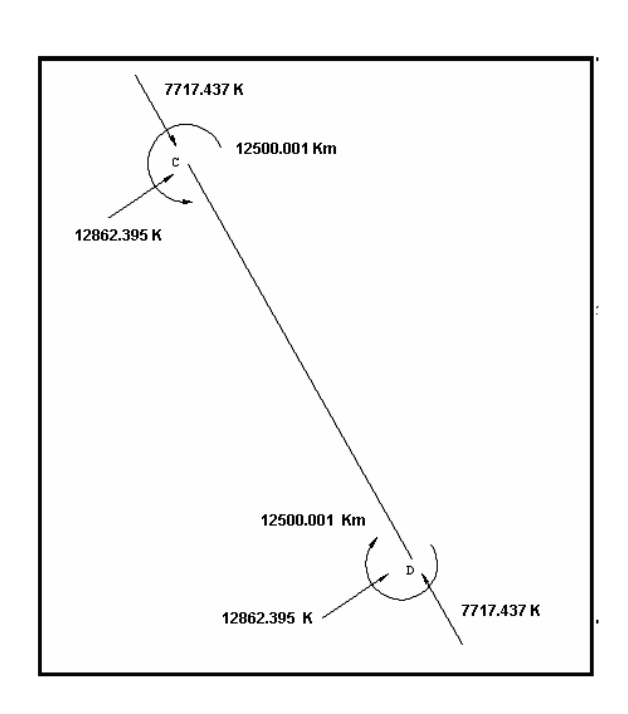
$$W_X = 6000 Cos\beta \frac{\Delta Y}{\Delta x} = 6000 Cos\beta\ Sen\beta = 2647.059\ Kg/m.$$

En consecuencia las acciones de empotramiento perfecto son:

$$N_C = \int_0^{L_3} W_X\ \phi_1(x)\ dx = \int_0^{\sqrt{34}} 2647.059\left(1 - \frac{X}{L_3}\right) dx = 7717.437\ Kg.$$

$$V_C = \int_0^{L_3} W_Y\ \phi_2(x) dx = \int_0^{\sqrt{34}} 4411.765\left(1 - \frac{3X^2}{L_3^2} + \frac{2X^3}{L_3^3}\right) dx = 12862.395\ Kg.$$

$$M_c = \int_0^{L_3} W_Y \phi_3(x) dx = \int_0^{\sqrt{34}} 4411.765\left(X - \frac{2X^2}{L_3} + \frac{X^3}{L_3^2}\right) dx = 12500.001\ Kg.m$$

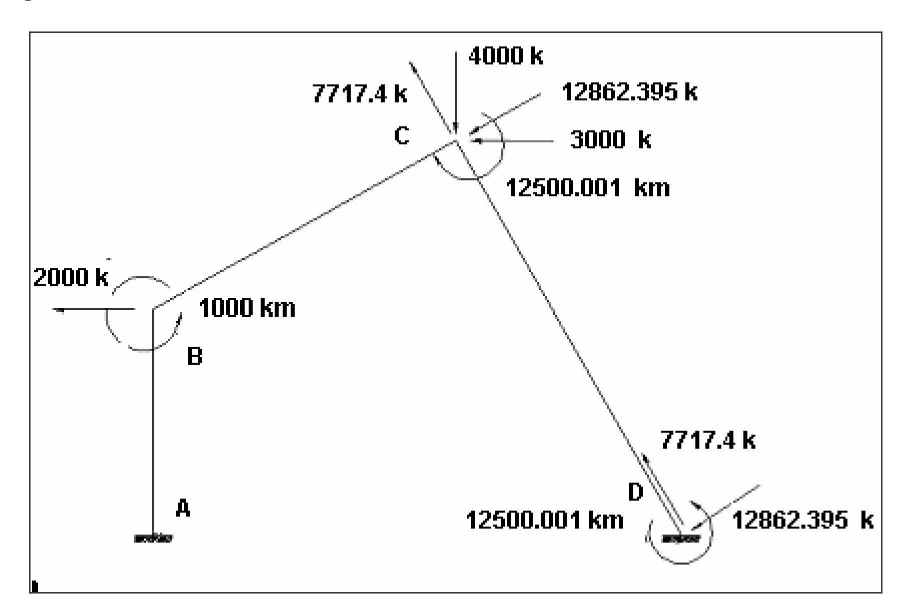


$$N_D = \int_0^{L_3} W_X \ \phi_4(x)\ dx = \int_0^{\sqrt{34}} 2647.059\left(\frac{X}{L_3}\right) dx = 7717.437\ Kg.$$

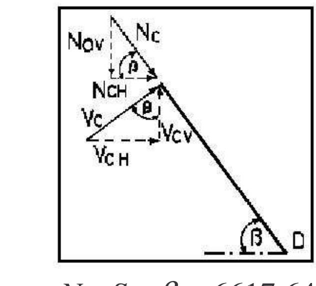
$$V_C = \int_0^{L_3} W_Y \ \phi_5(x) dx = \int_0^{\sqrt{34}} 4411.765\left(\frac{3X^2}{L_3^2} - \frac{2X^3}{L_3^3}\right) dx = 12862.395\ Kg.$$

$$M_c = \int_0^{L_3} W_Y \phi_6(x) dx = \int_0^{\sqrt{34}} 4411.765\left(-\frac{X^2}{L_3} + \frac{X^3}{L_3^2}\right) dx = -12500.001\ Kg.m$$

En la estructura estas fuerzas actúan con sentido contrario. Por lo tanto el nuevo estado de cargas es el siguiente:



Es conveniente tener solo fuerzas horizontales y verticales en el nudo C para esto se deben descomponer N_C y V_C.



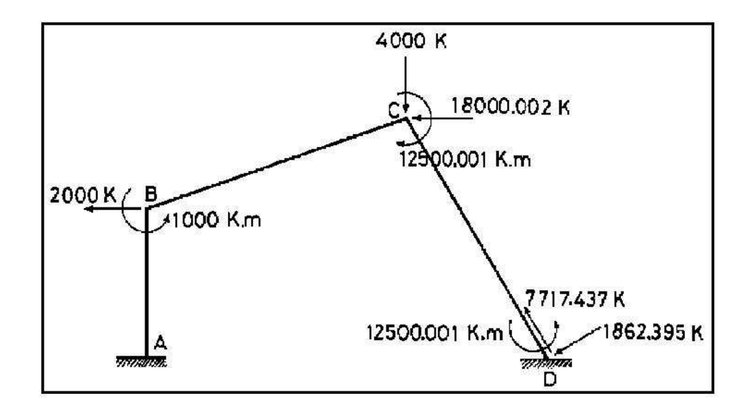
$$N_{CV} = N_C\ Sen\beta = 6617.648\ (\downarrow)$$
$$N_{CH} = N_C\ Cos\beta = 3970.589\ (\rightarrow)$$
$$V_{CH} = V_C\ Sen\beta = 11029.413\ (\rightarrow)$$
$$V_{CV} = V_C\ Cos\beta = 6617.648\ (\uparrow)$$

Por lo tanto, la fuerza horizontal que actúa en la Junta C, vale:

$$18000.002\ Kg = 3000 + 3970.589 + 11029.413 \quad (\leftarrow)$$

Y la fuerza vertical, vale:

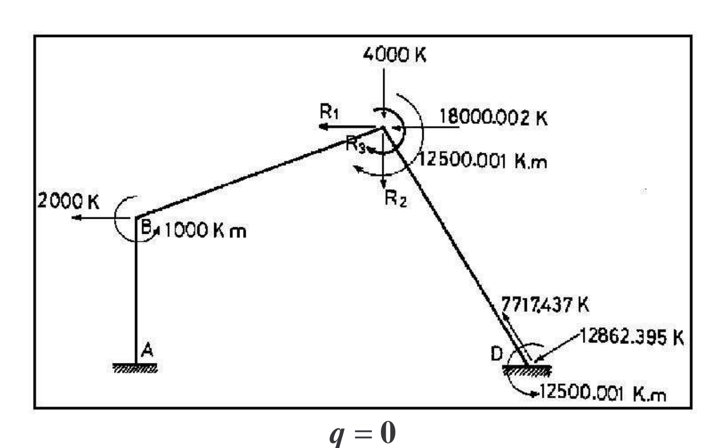
$$4000\ Kg = 4000 + 6617.648 - 6617.648 \quad (\downarrow)$$



Al tener únicamente fuerzas y momentos en las juntas, la solución del problema se simplifica notablemente.

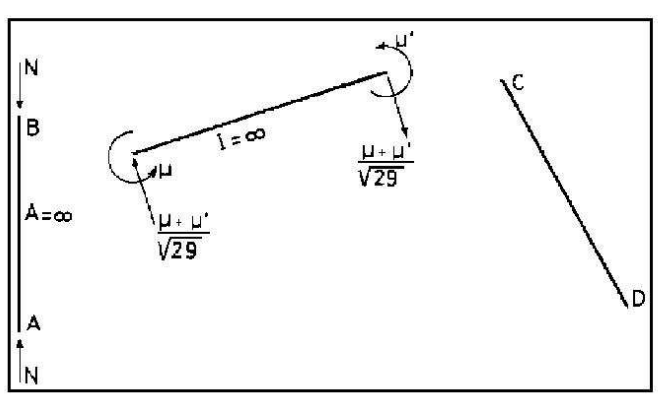
- **SISTEMA DE COORDENADAS A**

- **Problema Primario**



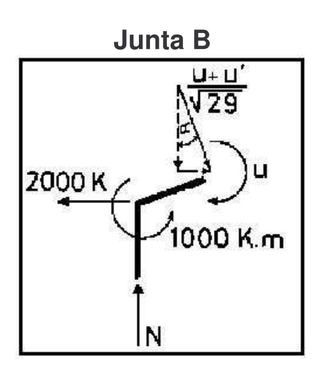
$$q = 0$$

- **Equilibrio de Elementos**



- **Equilibrio de Juntas**

Junta B

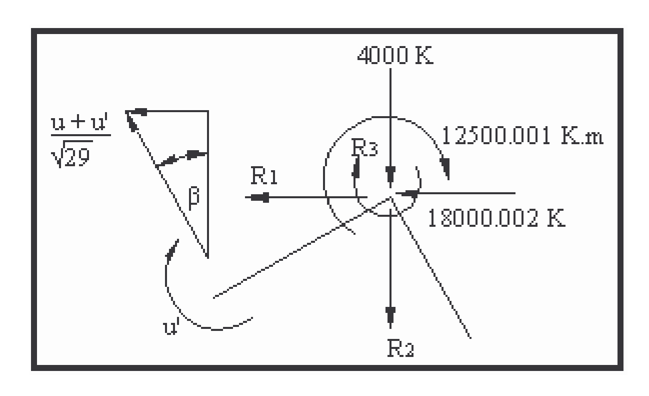


$$\sum F_X = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{(\mu + \mu^{'})}{\sqrt{29}} \frac{2}{\sqrt{29}} - 2000 = 0$$

$$\sum F_Y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad N - \frac{(\mu + \mu^{'})}{\sqrt{29}} \frac{5}{\sqrt{29}} = 0$$

$$\sum M = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mu - 1000 = 0$$

Junta C



$$\sum F_X = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 18000.002 + R_1 + \frac{(\mu + \mu^{'})}{\sqrt{29}} \frac{2}{\sqrt{29}} = 0$$

$$\sum F_Y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{(\mu + \mu^{'})}{\sqrt{29}} \frac{5}{\sqrt{29}} - 4000 - R_2 = 0$$

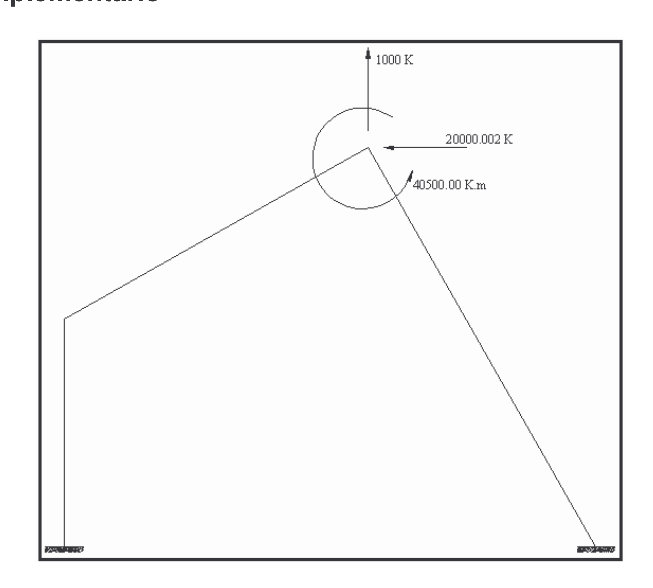
$$\sum M = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 12500.001 + R_3 + \mu^{'} = 0$$

Al resolver el sistema de ecuaciones se obtiene:

$$\mu = 1000\ Kg.m. \qquad \mu^{'} = 28000\ Kg.m. \qquad N = 5000\ Kg.$$

$$R_1 = -20000.002\ Kg. \qquad R_2 = 1000\ Kg. \qquad R_3 = -40500.01$$

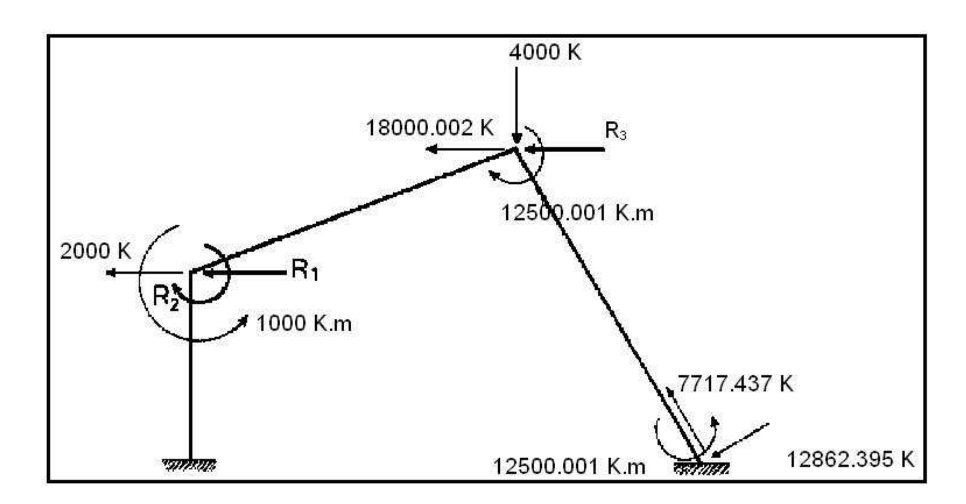
- **Problema Complementario**



- **Vector de Cargas Generalizadas Q**

$$Q = \begin{bmatrix} -20000.002 \\ 1000.000 \\ -40500.001 \end{bmatrix}$$

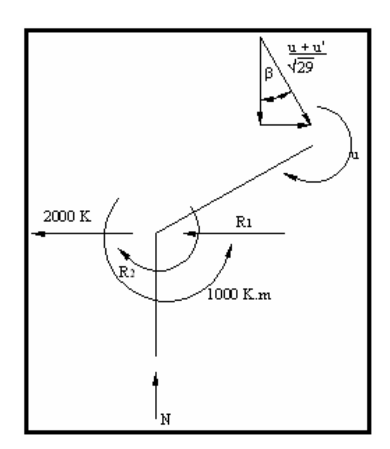
- **SISTEMA DE COORDENADAS B**
- **Problema Primario**



El equilibrio de los elementos es igual al anterior por lo que se omite su presentación.

- **Equilibrio de Juntas**

Junta B

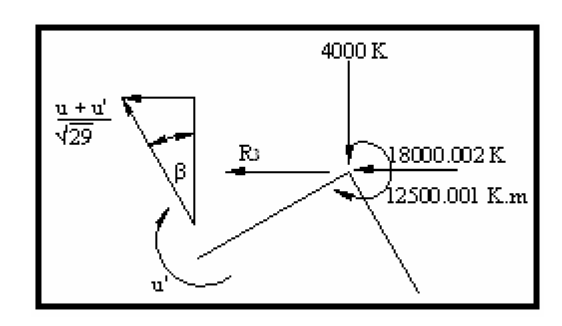


$$\sum F_X = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{(\mu + \mu')}{\sqrt{29}} \frac{2}{\sqrt{29}} - 2000 - R_1 = 0$$

$$\sum F_Y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad N - \frac{(\mu + \mu')}{\sqrt{29}} \frac{5}{\sqrt{29}} = 0$$

$$\sum M = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R_2 + \mu - 1000 = 0$$

Junta C



$$\sum F_X = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{(\mu + \mu')}{\sqrt{29}} \frac{2}{\sqrt{29}} + R_3 + 18000.002 = 0$$

$$\sum F_Y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{(\mu + \mu')}{\sqrt{29}} \frac{5}{\sqrt{29}} - 4000 = 0$$

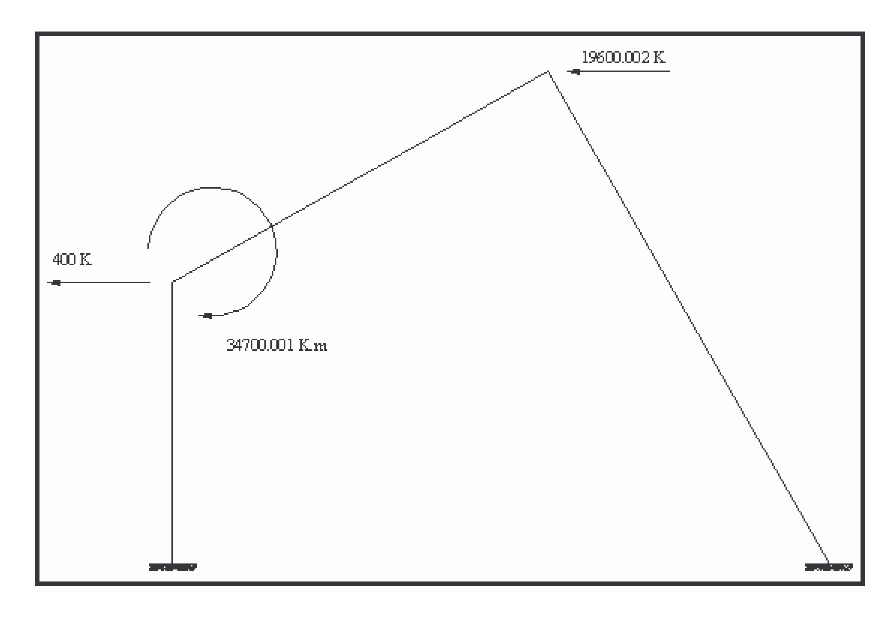
$$\sum M = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 12500.001 + \mu' = 0$$

La solución de las ecuaciones reporta:

$\mu = 35700.001\ Kg.m.$ $\qquad \mu' = -12500.001\ Kg.m.$ $\qquad N = 4000.000\ Kg.$

$R_1 = -400.000\ Kg$ $\qquad R_2 = -34700.001\ Kg.m.$ $\qquad R_3 = -19600.002\ Kg.$

- **Problema Complementario**



- **Vector de Cargas Generalizadas Q**

$$Q = \begin{bmatrix} -400.000 \\ -34700.001 \\ -19600.002 \end{bmatrix}$$

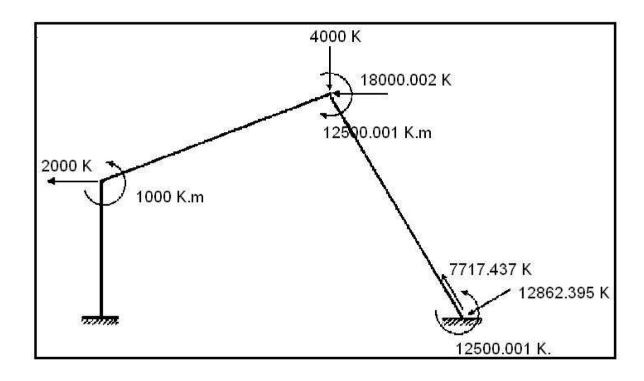
Nótese que se han obtenido dos vectores de cargas generalizados diferentes. Esto se debe a que se trabaja con dos sistemas de coordenadas generalizadas diferentes. Pero la solución final total del ejercicio es la misma.

- **EJERCICIO N.- 11**

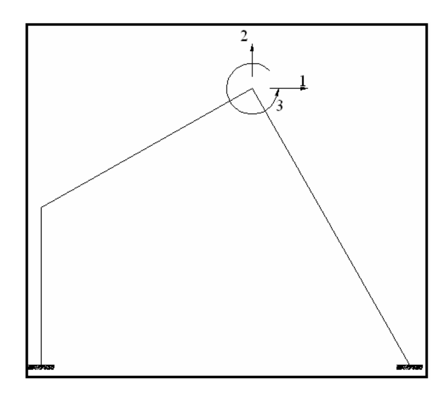
Resolver el ejercicio N.- 10 para los dos sistemas de coordenadas $Q-q$ pero mediante trabajos virtuales.

- **SOLUCIÓN**

Las cargas que actúan en la estructura son:

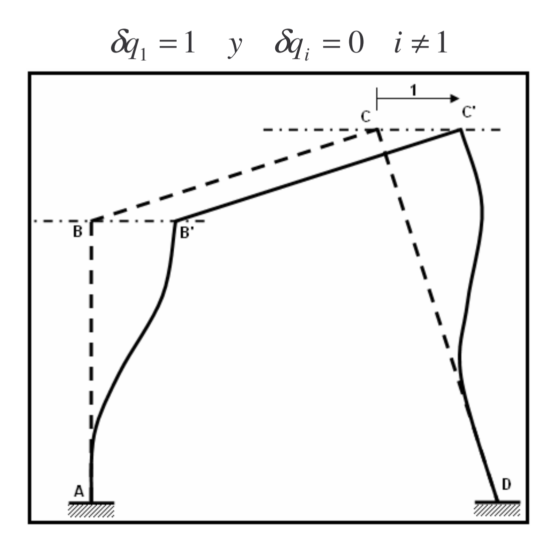


- **SISTEMA DE COORDENADAS A**



- **Cálculo de Q_1**

$$\delta q_1 = 1 \quad y \quad \delta q_i = 0 \quad i \neq 1$$

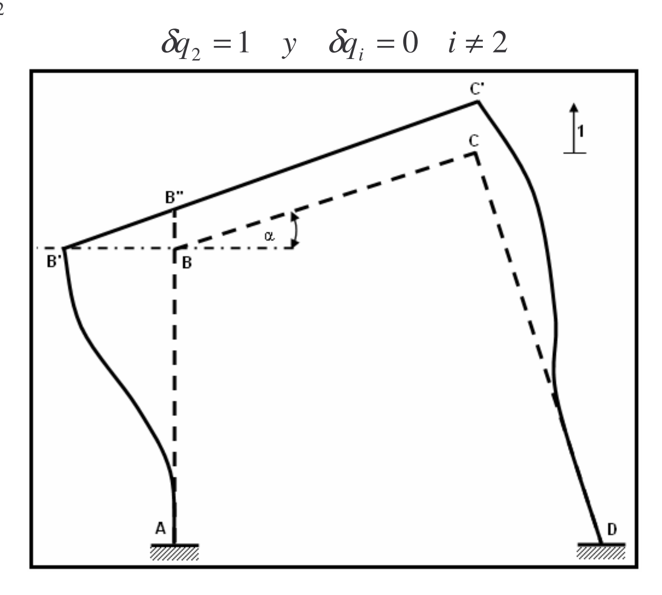


Debido a que el elemento BD es transversalmente rígido se cumple: BB' = C' = 1

$$Q_1 = -2000 * 1 - 18000.002 * 1 = -20000.002 \ Kg.$$

- **Cálculo de** Q_2

$$\delta q_2 = 1 \quad y \quad \delta q_i = 0 \quad i \neq 2$$



Del gráfico se observa que CC' = BB'' = 1. En consecuencia en el triangulo BB'B'' se tiene:

$$BB' = Cotg \ \alpha = \frac{5}{2}$$

Luego:

$$Q_2 = 2000 * \frac{5}{2} - 4000 * 1 = 1000 \ Kg$$

- **Cálculo de** Q_3

$$\delta q_3 = 1 \quad y \quad \delta q_i = 0 \quad i \neq 3$$

Por construcción se tiene B'B'' = L_2 = $\sqrt{29}$. Por lo tanto en el triángulo BB'B'' se tiene:

$$Sen\alpha = \frac{B'B''}{BB'} \qquad \Rightarrow \qquad BB' = Cosc\alpha \ B'B'' = \frac{\sqrt{29}}{2}\sqrt{29} = \frac{29}{2}$$

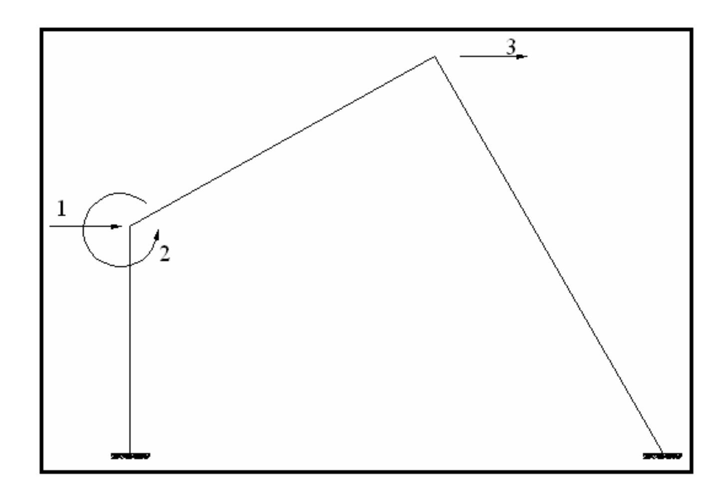
Luego:

$$Q_3 = -2000 * \frac{29}{2} + 1000 * 1 - 12500.001 * 1 = -40500.001 \; Kg.m.$$

- **Vector de Cargas Generalizadas $\boldsymbol{Q}$**

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} -20000.002 \\ 1000.000 \\ -40500.001 \end{bmatrix}$$

- **SISTEMA DE COORDENADAS B**



- **Cálculo de Q_1**

$$\delta q_1 = 1 \quad y \quad \delta q_i = 0 \quad i \neq 1$$

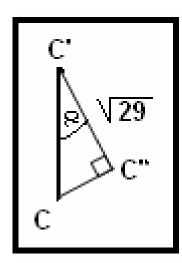
En el triangulo BB'B'' se tiene: B'B'' = $tg\alpha$ = 2/5. Pero B'B'' = CC' debido a que BC es paralelo a B'C'. Por consiguiente.

$$Q_1 = -2000 * 1 + 4000 * \frac{2}{5} = -400 \; kg.$$

- **Cálculo de** Q_2

$$\delta q_2 = 1 \quad y \quad \delta q_i = 0 \quad i \neq 2$$

En el diagrama elemental se tiene C'C'' = L_2 = $\sqrt{29}$. Por otra parte en el triángulo CC'C'' se tiene:



$$Cos\alpha = \frac{\sqrt{29}}{CC'} \qquad \Rightarrow CC' = \frac{\sqrt{29}}{5}\sqrt{29} = \frac{29}{5}$$

De donde:

$$Q_2 = 1000 * 1 - 12500.001 * 1 - 4000 * \frac{29}{5} = 34700.001 \ Kg.m.$$

- **Cálculo de** Q_3

$$\delta q_3 = 1 \quad y \quad \delta q_i = 0 \quad i \neq 3$$

En el triángulo CC'C'' se observa que C'C'' = $tg\alpha$ = 2/5. Luego el valor de Q_3 resulta.

$$Q_3 = -4000\,\frac{2}{5} - 18000.002 * 1 = -19600.002\ Kg.$$

- **Vector de Cargas Generalizadas Q**

$$Q = \begin{bmatrix} -400.000 \\ -34700.001 \\ -19600.002 \end{bmatrix}$$

- **EJERCICIO N.- 12**

Determinar el vector de cargas generalizadas Q para la armadura plana de la figura 4.10, por medio de trabajos virtuales. Todos los elementos son transversalmente rígidos.

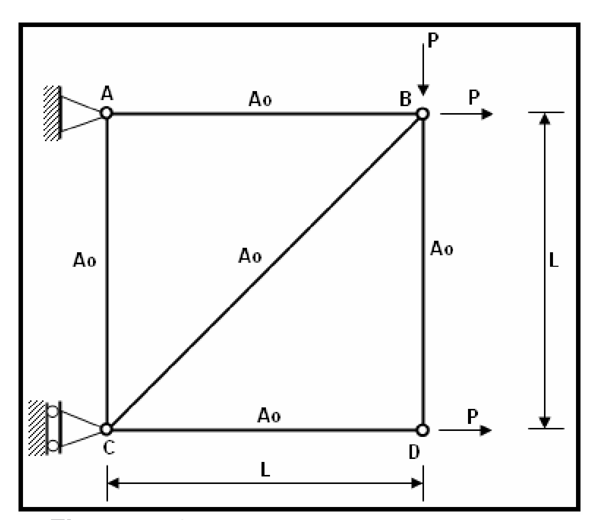
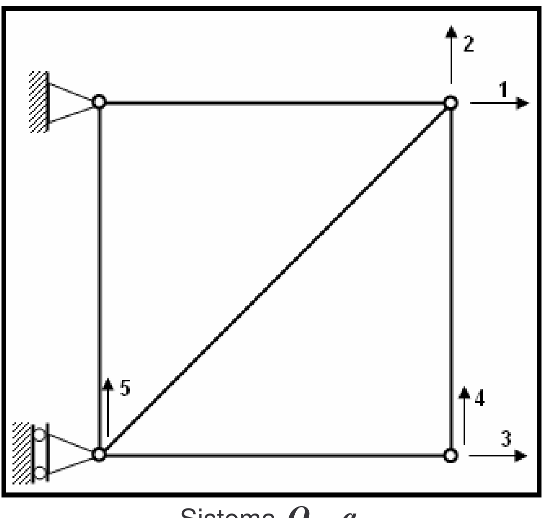


Figura 4.10 Armadura Plana del ejercicio 12.

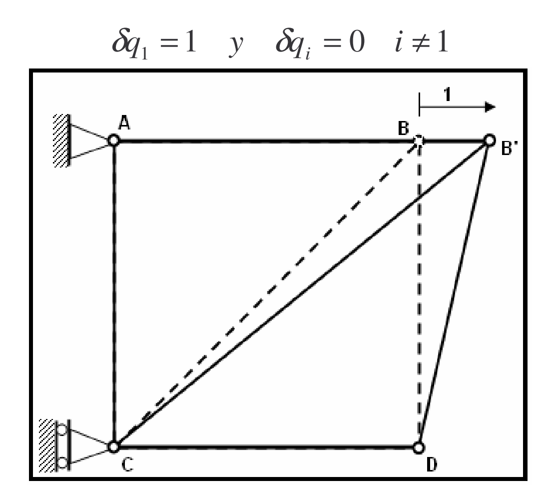
- **SOLUCIÓN**



Sistema $Q - q$

- **Cálculo de** Q_1

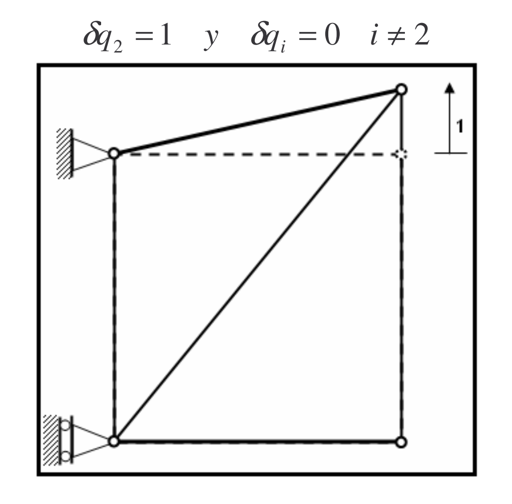
$$\delta q_1 = 1 \quad y \quad \delta q_i = 0 \quad i \neq 1$$



$$Q_1 = P * 1 = P$$

- **Cálculo de** Q_2

$$\delta q_2 = 1 \quad y \quad \delta q_i = 0 \quad i \neq 2$$



$$Q_2 = -P * 1 = -P$$

- **Cálculo de** Q_3

$$\delta q_3 = 1 \quad y \quad \delta q_i = 0 \quad i \neq 3$$

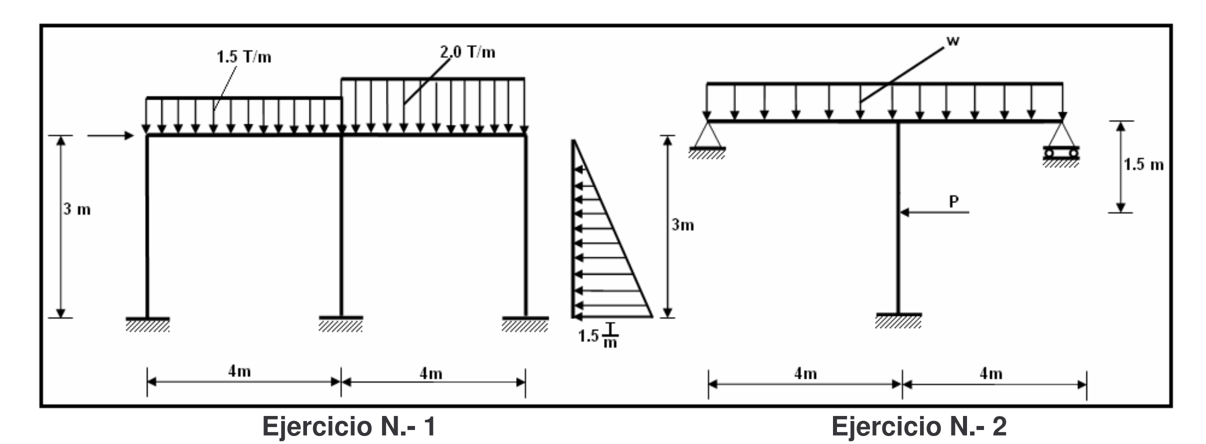
$$Q_3 = P * 1 = P$$

Se deja al lector el cálculo de Q_4 y Q_5.

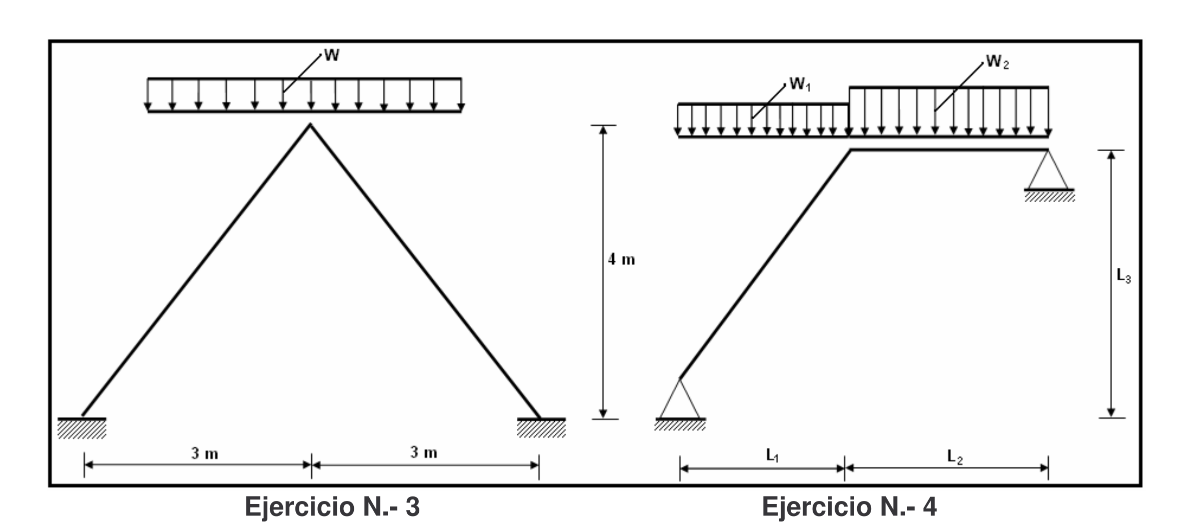
4.4 EJERCICIOS PROPUESTOS

En las siguientes estructuras con elementos totalmente flexibles, se pide:

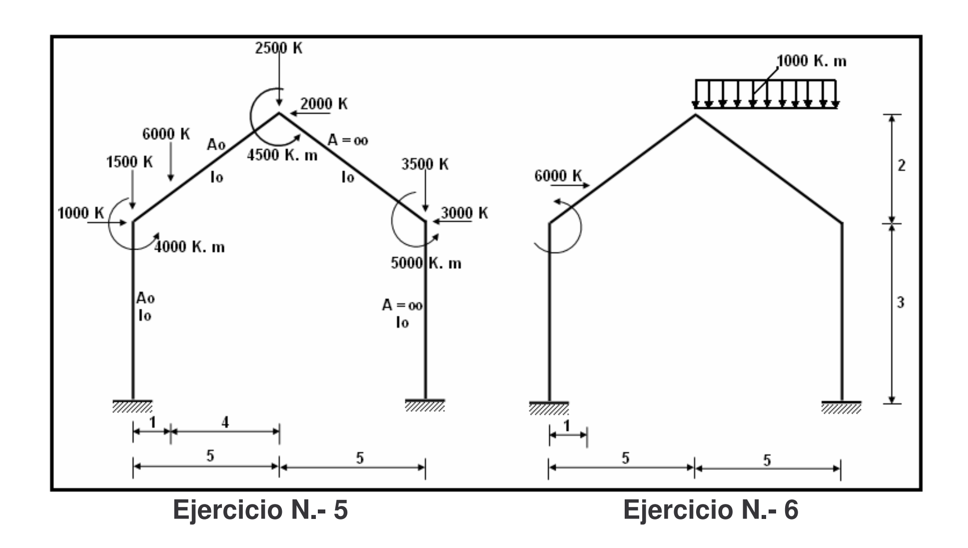
a) Seleccionar el sistema de coordenadas $Q-q$.
b) Obtener el vector de cargas generalizadas mediante trabajos virtuales.
c) Resolver el problema primario.
d) Indicar cual es el problema complementario.



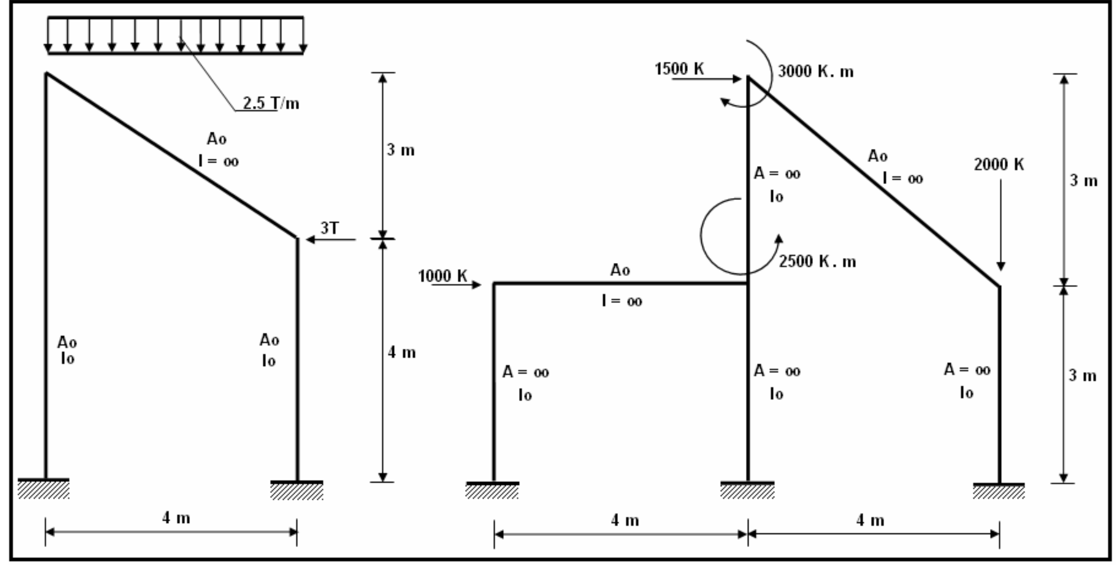
Ejercicio N.- 1 **Ejercicio N.- 2**



Ejercicio N.- 3 **Ejercicio N.- 4**

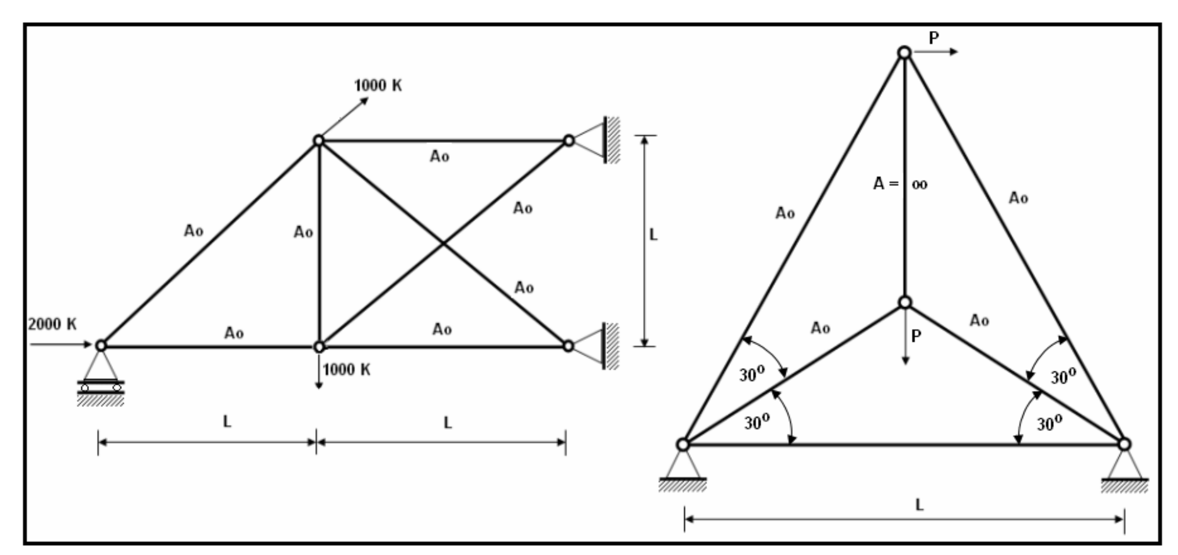


Ejercicio N.- 5 **Ejercicio N.- 6**



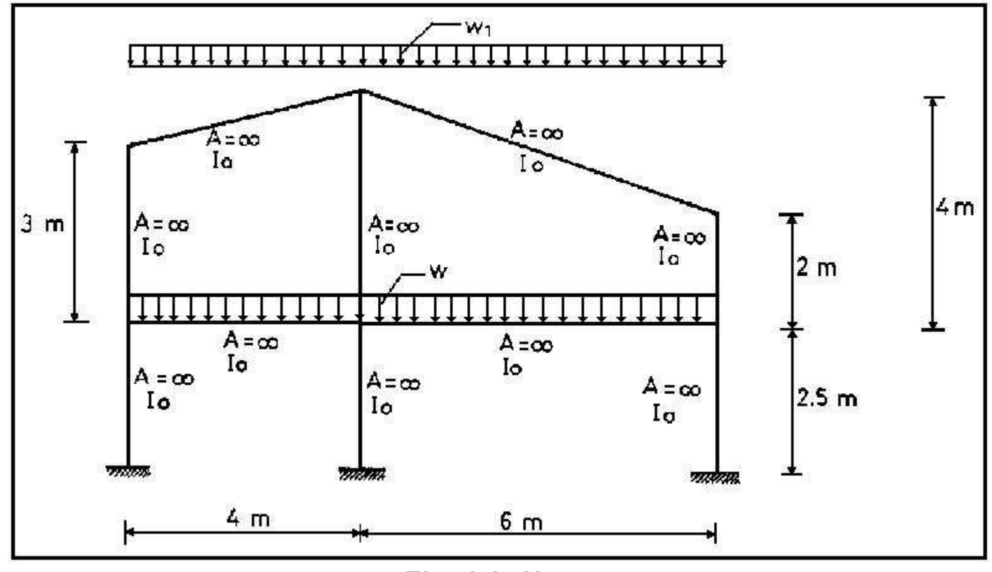
Ejercicio N.- 7

Ejercicio N.- 8



Ejercicio N.- 9

Ejercicio N.- 10



Ejercicio N.- 11

CAPITULO 5

RELACIÓN ENTRE DOS SISTEMAS DE COORDENADAS

RESUMEN

Se presenta la transformación de coordenadas desde el punto de vista estructural, no matemático, para relacionar dos sistemas de coordenadas generalizadas o no generalizadas. Por otra parte se indican aplicaciones únicamente aplicaciones para el análisis estático de estructuras no para el análisis dinámico.

En el apartado 5.2 se calcula la matriz $\boldsymbol{T}$ que relaciona la geometría entre dos sistemas de coordenadas; en el apartado 5.3 se determina la matriz $\boldsymbol{T}_1$ que relaciona la estática entre dos sistemas y en el apartado 5.4 se presentan conceptos generales para relacionar coordenadas no generalizadas. Posteriormente se presenta una aplicación muy importante orientada a la programación del vector de cargas generalizadas $\boldsymbol{Q}$ en pórticos planos con cargas en los nudos y en los elementos.

En el transcurso del capítulo se resuelven 10 ejemplos los mismos que sirven para aclarar la teoría que se ha presentado tanto en éste capítulo como en los anteriores, se recomienda el estudio con detenimiento de los ejemplos 8 y 9.

5. 1 CAMBIO DE COORDENADAS

Uno de los principales capítulos del Análisis Matricial de Estructuras y porque no decirlo de la Dinámica de Estructuras es el estudio de la *Matriz de Transformación de Coordenadas* o también llamada *Matriz de Paso*, que permite pasar de un determinado sistema de coordenadas $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{q}$ a otro $\boldsymbol{Q}^* - \boldsymbol{q}^*$, cuando se lo requiere. En efecto es estática se puede empezar a resolver un problema con un determinado sistema de coordenadas, se puede calcular la matriz de rigidez $\boldsymbol{K}$ el vector de cargas generalizadas $\boldsymbol{Q}$ de una determinada estructura más por alguna razón se decide cambiar el sistema de coordenadas generalizadas. En este caso quedan dos alternativas a saber: la primera desechar el trabajo realizado y empezar de nuevo y la segunda alternativa que es la más óptima, por

medio de la matriz de paso $\boldsymbol{T}$ continuar con la solución del problema aprovechando el trabajo realizado y calcular $\boldsymbol{K}^*$ y $\boldsymbol{M}^*$ mediante simples operaciones matriciales.

Por otra parte la matriz de transformación de coordenadas $\boldsymbol{T}$ sirve para determinar la matriz de rigidez de un elemento en coordenadas globales a partir de la matriz de rigidez de un elemento en coordenadas locales, dichas coordenadas se indican en la figura 5.1. En general se puede determinar la matriz de rigidez en un elemento en un sistema de coordenadas a partir de otro conocido.

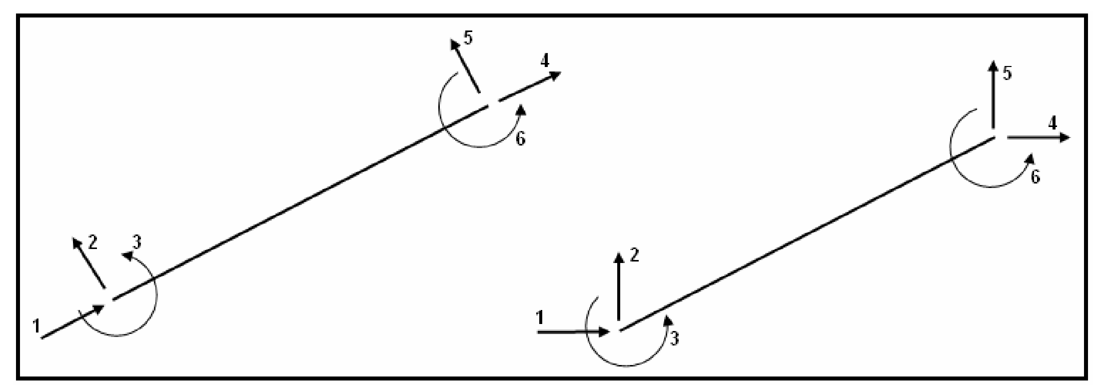


Figura 5.1 Coordenadas Locales y Globales de un elemento.

En Dinámica de Estructuras se puede ver a la matriz de transformación de coordenadas como aquella matriz que permite pasar de un determinado sistema de coordenadas en el cual el sistema de ecuaciones diferenciales está acoplado a otro sistema de coordenadas en el cual el sistema de ecuaciones diferenciales está desacoplado, siendo fácil la solución matemática en este último sistema de coordenadas. Todo esto siempre y cuando las matrices sean diagonalizables.

En fin es extenso el campo de aplicación de la matriz de transformación de coordenadas y tan fácil su cálculo como se lo verá posteriormente. Como se indicó el cambio de coordenadas se lo va a estudiar desde dos puntos de vista: Geométrico y Estático.

5.2 PUNTO DE VISTA GEOMÉTRICO

5.2.1 Relación entre dos sistemas de coordenadas generalizadas

Al sistema de coordenadas generalizadas $\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{q}$ se va a denominar "sistema original" o "sistema viejo" y al sistema de coordenadas $\boldsymbol{Q}^*-\boldsymbol{q}^*$ se denomina "sistema nuevo". En éste apartado se estudia la relación que existe entre $\boldsymbol{q}$ y $\boldsymbol{q}^*$. Nótese que ambas son coordenadas generalizadas.

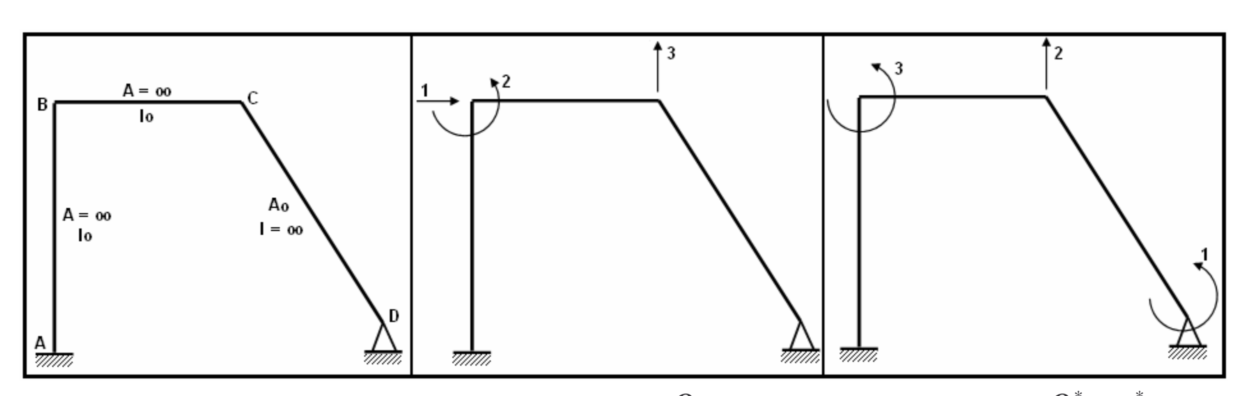


Figura 5.2.1 **Figura 5.2.2** $\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{q}$ **Figura 5.2.3** $\boldsymbol{Q}^*-\boldsymbol{q}^*$

El pórtico plano de la figura 5.2.1 tiene tres grados de libertad, pudiendo ser el sistema $\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{q}$ el indicado en la figura 5.2.2 y el sistema $\boldsymbol{Q}^{*}-\boldsymbol{q}^{*}$ el presentado en la figura 5.2.3.

Siempre cualquier transformación se realiza de la siguiente manera: expresar el sistema de coordenadas viejo en función del sistema de coordenadas nuevo. En este caso, se define una relación entre los sistemas de coordenadas generalizadas, de la siguiente forma:

$$\bar{\boldsymbol{q}} = \bar{\boldsymbol{T}} \cdot \bar{\boldsymbol{q}}^{*} \qquad (5.1)$$

donde $\boldsymbol{T}$ es la matriz de transformación de coordenadas.

En consecuencia, se establece una relación geométrica entre dos sistemas de coordenadas. En este caso la matriz $\bar{\boldsymbol{T}}$ es cuadrada porque los dos sistemas son coordenadas generalizadas. En forma general se tiene:

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ .. \\ .. \\ q_i \\ .. \\ .. \\ .. \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & \dots & \dots & T_{1n} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & \dots & \dots & T_{2n} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & \dots & \dots & T_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_{i1} & T_{i2} & T_{i3} & \dots & \dots & T_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_{n1} & T_{n2} & T_{n3} & \dots & \dots & T_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1^{*} \\ q_2^{*} \\ q_3^{*} \\ \dots \\ \dots \\ q_i^{*} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ q_n^{*} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, para un término cualquiera q_i, se tiene:

$$\boldsymbol{q_i} = \boldsymbol{T}_{i1}\boldsymbol{q}_1^{*} + \boldsymbol{T}_{i2}\boldsymbol{q}_2^{*} + \boldsymbol{T}_{i3}\boldsymbol{q}_3^{*} + \dots + \boldsymbol{T_{in}}\boldsymbol{q_n}^{*} \qquad (5.2)$$

¿Cómo calcular T_{i1}? De la ecuación (5.2), se observa que para calcular T_{i1}, se hará: $q_1^{*} = 1$ y $q_i^{*} = 0$ para $i \neq 1$ entonces se tiene: $q_i = T_{i1}$, resultando que el valor de T_{i1} es el correspondiente valor de q_i.

En general un término cualquiera T_{ij} es el valor de q_i correspondiente a la deformación elemental $q_j^{*} = 1$ y las demás nulas.

- **EJEMPLO N.- 1**

Calcular la matriz $\bar{\boldsymbol{T}}$, que relaciona el vector de coordenadas $\boldsymbol{q}$ de la figura 5.2.2, con el vector de coordenadas $\boldsymbol{q}^{*}$ de la figura 5.2.3.

- **SOLUCIÓN**

Para obtener los elementos de la primera columna de la matriz de transformación, se dibuja la deformada elemental $q_1^* = 1$ y $q_i^* = 0$ para $i \neq 1$. Esto se presenta en la figura 5.2.4, se deja al estudiante la explicación de la deformada respectiva.

$q_1^* = 1$ **y** $q_i^* = 0$ **para** $i \neq 1$

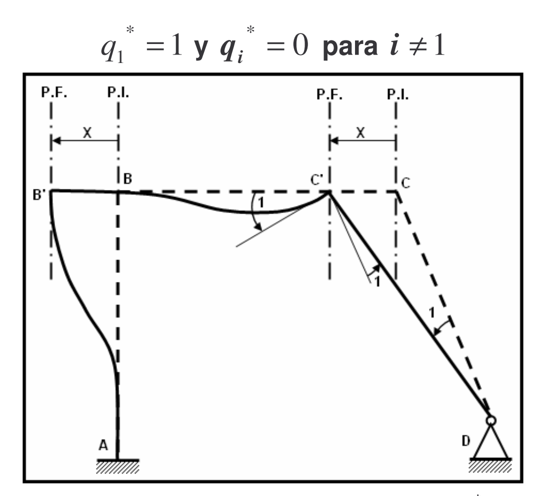


Figura 5.2.4 Diagrama elemental q_1^*

Al medir los desplazamientos en el sistema de coordenadas q , se encuentra:

$$T_{11} = -x = q_1$$
$$T_{21} = 0 = q_2$$
$$T_{31} = 0 = q_3$$

Para obtener los términos de la segunda columna de $\overline{T}$ se construye la deformada elemental q_2^*.

$q_2^* = 1$ **y** $q_i^* = 0$ **para** $i \neq 2$

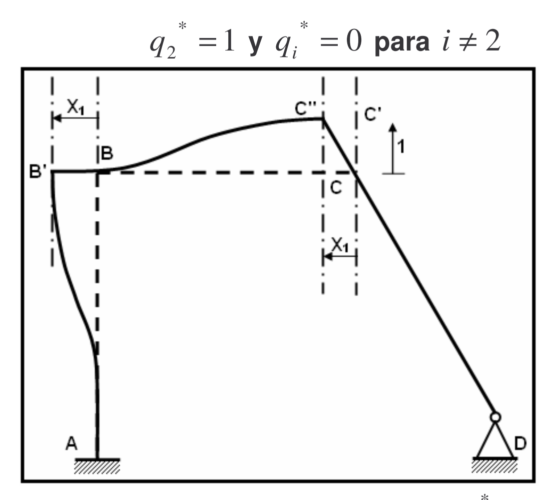


Figura 5.2.5 Diagrama elemental q_2^*

El nudo B se desplaza horizontalmente hacia la izquierda x_1, por lo tanto: $T_{12} = -x_1 = q_1$. No rota el nudo B, esto implica que $T_{22} = 0 = q_2$. Finalmente el nudo C se desplaza verticalmente la unidad, de donde $T_{32} = 1 = q_3$.

La última columna de la matriz $\overline{T}$, se obtendrá del diagrama elemental q_3

$q_3^* = 1$ y $q_i^* = 0$ para $i \neq 3$

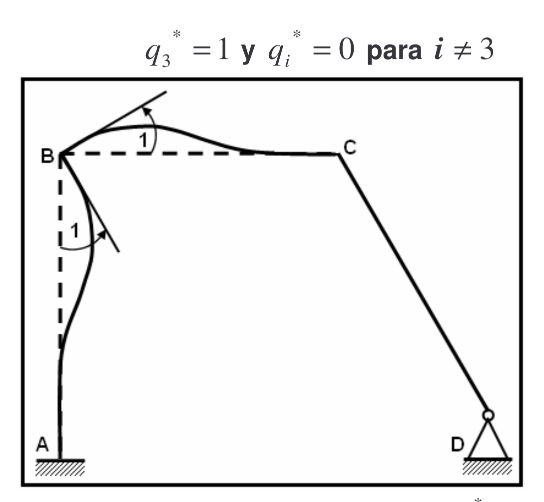


Figura 5.2.6 Diagrama elemental q_3^*

De donde:

$$T_{13} = 0 = q_1$$
$$T_{23} = 1 = q_2$$
$$T_{33} = 0 = q_3$$

Por lo tanto, la matriz de transformación $\overline{T}$ es:

$$\overline{T} = \begin{bmatrix} -x & -x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

El cálculo de x y x_1 se realiza empleando Geometría.

5.2.2 Relación entre dos sistemas de cargas

Se desea saber qué relación existe entre $\overline{Q}^*$ y $\overline{Q}$. Dado que $\overline{q} = \overline{T} \cdot \overline{q}^*$. Para encontrar esta relación se da un desplazamiento virtual cualquiera a la estructura; por ejemplo, con relación al pórtico de la figura 5.2.1, en la figura 5.2.7, se presenta el diagrama virtual. Este es producido por un sistema de cargas que actúa sobre el pórtico.

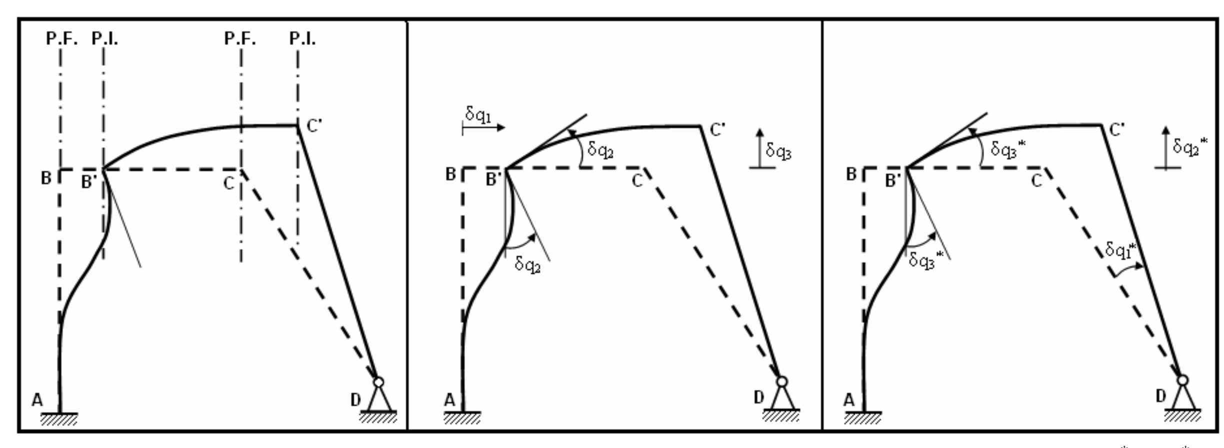


Figura 5.2.7 Diagrama virtual **Figura 5.2.8** Sistema $Q - q$ **Figura 5.2.9** Sistema $Q^* - q^*$

Los desplazamientos virtuales se pueden medir en cualquiera de los dos sistemas de coordenadas. El "sistema viejo", figura 5.2.8 o el "sistema nuevo", figura 5.2.9. La relación que existe entre estos dos sistemas de coordenadas es la siguiente:

$$\delta\overline{\boldsymbol{q}} = \overline{\boldsymbol{T}} \cdot \delta\overline{\boldsymbol{q}}^{*} \qquad (5.3.1)$$

El trabajo virtual ($\boldsymbol{TV}_1$) de las cargas que actúan sobre el pórtico de la figura 5.2.1, en los desplazamientos virtuales de la estructura de la figura 5.2.8, es:

$$TV_1 = Q_1 \cdot \delta q_1 + Q_2 \cdot \delta q_2 + Q_3 \cdot \delta q_3 \qquad (5.3.2)$$

En forma matricial, la ecuación (5.3.2) queda:

$$TV_1 = \begin{bmatrix} \delta q_1 & \delta q_2 & \delta q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix}$$

De donde:

$$\boldsymbol{TV}_1 = \delta\overline{\boldsymbol{q}}^{\boldsymbol{t}}\,\overline{\boldsymbol{Q}} \qquad (5.3.3)$$

El trabajo virtual calculado $\boldsymbol{TV}_1$, debe ser exactamente igual al trabajo virtual $\boldsymbol{TV}_2$ producido por el sistema de cargas que gravitan en el pórtico de la figura 5.2.1 en los desplazamientos del marco de la figura 5.2.9. En virtud de que el trabajo virtual no depende del sistema de coordenadas, puesto que la solución es única.

$$TV_2 = \begin{bmatrix} \delta q_1^{*} & \delta q_2^{*} & \delta q_3^{*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^{*} \\ Q_2^{*} \\ Q_3^{*} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{TV}_2 = \delta\overline{\boldsymbol{q}}^{*\boldsymbol{t}}\,\overline{\boldsymbol{Q}}^{*} \qquad (5.3.4)$$

Como:

$$\boldsymbol{TV}_1 = \boldsymbol{TV}_2$$

$$\delta\overline{\boldsymbol{q}}^{\boldsymbol{t}}\,\overline{\boldsymbol{Q}} = \delta\overline{\boldsymbol{q}}^{*\boldsymbol{t}}\,\overline{\boldsymbol{Q}}^{*}$$

Al sustituir (5.3.1) en esta última ecuación, se tiene:

$$\left(\overline{\boldsymbol{T}} \cdot \delta\overline{\boldsymbol{q}}^{*}\right)^{\boldsymbol{t}}\overline{\boldsymbol{Q}} = \delta\overline{\boldsymbol{q}}^{*\boldsymbol{t}}\,\overline{\boldsymbol{Q}}^{*}$$

$$\delta\overline{\boldsymbol{q}}^{*\boldsymbol{t}}\,\overline{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{t}}\,\overline{\boldsymbol{Q}} = \delta\overline{\boldsymbol{q}}^{*\boldsymbol{t}}\,\overline{\boldsymbol{Q}}^{*}$$

Se recuerda que en Álgebra Matricial, de la igualdad:

$$\overline{\boldsymbol{A}} \cdot \overline{\boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{A}} \cdot \overline{\boldsymbol{C}}$$

No siempre se puede concluir que: $\overline{\boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{C}}$

En el problema, el vector $\delta\boldsymbol{q}^{*}$ no es una constante fija, sino que puede adoptar cualquier valor por el mismo hecho de ser virtual. Por lo tanto, se concluye que:

$$\overline{T}^{\,t}\overline{Q} = \overline{Q}^{*}$$

Lo demostrado, a partir de la figura 5.2.1, puede generalizarse. En resumen, se tiene:

Si	$\overline{q} = \overline{T}\,\overline{q}^{*}$	entonces	$\overline{Q}^{*} = \overline{T}^{\,t}\overline{Q}$

Una vez que se conoce el vector de cargas generalizadas Q, para un determinado sistema de coordenadas de una estructura, el mismo que ha sido obtenido aplicando el problema primario y complementario, o mediante trabajos virtuales, como se presentó en el capítulo 4, se puede encontrar el vector de cargas generalizadas para un nuevo sistema de coordenadas mediante la ecuación (5.3.6), debiendo calcular únicamente la matriz T.

5.3 PUNTO DE VISTA ESTÁTICO

5.3.1 Relación entre dos sistemas de cargas

El pórtico de la figura 5.3.1 tiene tres grados de libertad y su sistema de coordenadas $Q-q$ es el mostrado en la figura 5.3.2, y en la figura 5.3.3 se presenta el sistema $Q^{*}-q^{*}$.

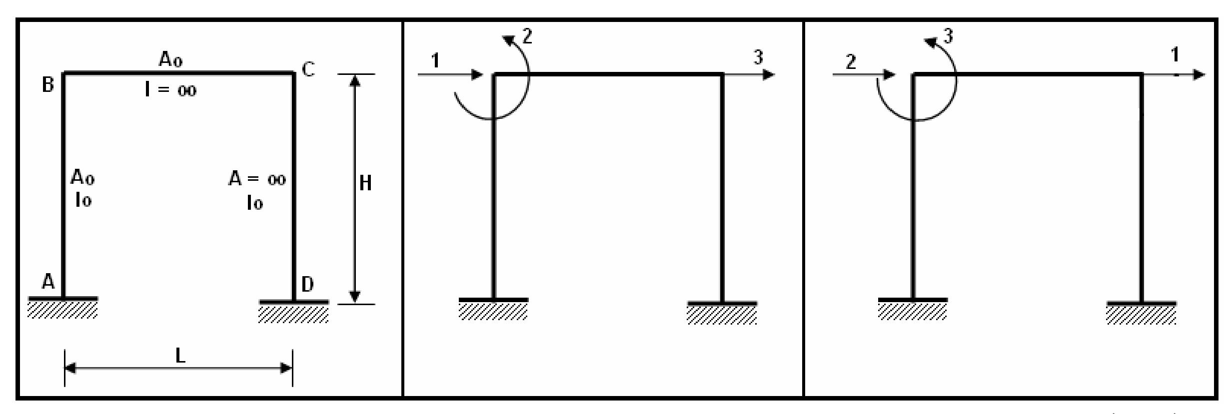


Figura 5.3.1 **Figura 5.3.2** Sistema $Q-q$ **Figura 5.3.3** Sistema $Q^{*}-q^{*}$

Se define, ahora, una relación entre los dos sistemas de cargas, de la siguiente manera:

$$\overline{Q} = \overline{T}_1 \cdot \overline{Q}^{*} \tag{5.4}$$

$\overline{T}_1$ Matriz de transformación, de orden $(n \times n)$.

Al desarrollar la ecuación matricial (5.4), para un sistema de n grados de libertad, se tiene:

$$
\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ .. \\ .. \\ Q_i \\ .. \\ .. \\ .. \\ Q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{111} & T_{112} & T_{113} & \dots & \dots & T_{11n} \\ T_{121} & T_{122} & T_{123} & \dots & \dots & T_{12n} \\ T_{131} & T_{132} & T_{133} & \dots & \dots & T_{13n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_{1i1} & T_{1i2} & T_{1i3} & \dots & \dots & T_{1in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_{1n1} & T_{1n2} & T_{1n3} & \dots & \dots & T_{1nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^* \\ Q_2^* \\ Q_3^* \\ \dots \\ \dots \\ Q_i^* \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ Q_n^* \end{bmatrix}
$$

Para un término cualquiera Q_i, se tiene:

$$
Q_i = T_{1i1}Q_1^* + T_{1i2}Q_2^* + T_{1i3}Q_3^* + \dots + T_{1in}Q_n^* \tag{5.5}
$$

Para calcular $\boldsymbol{T_{1i1}}$, se hará $\boldsymbol{Q_1}^* = 1$ y $\boldsymbol{Q_i}^* = 0$ para $\boldsymbol{i} \neq 0$, en consecuencia es el valor de $\boldsymbol{Q_i}$, correspondiente al estado de cargas indicado.

Un término $\boldsymbol{T_{1ij}}$, será el valor de $\boldsymbol{Q_i}$ correspondiente al estado de cargas $\boldsymbol{Q_j}^* = 1$ y $\boldsymbol{Q_i}^* = 0$, $\boldsymbol{i \neq j}$.

- **EJEMPLO N.- 2**

Calcular la matriz $\boldsymbol{\overline{T}_1}$, de la estructura de la figura 5.3.1, si el sistema $\boldsymbol{Q - q}$ es el indicado en la figura 5.3.2 y el sistema $\boldsymbol{Q^* - q^*}$, el indicado en la figura 5.3.3.

- **SOLUCIÓN**

La primera columna de la matriz $\boldsymbol{\overline{T}_1}$ se obtiene del estado de carga Q_1^* igual a uno y las demás cargas nulas, como se indica en la figura 5.3.4. Para este estado de carga, se debe hallar el vector de cargas generalizadas $\boldsymbol{\overline{Q}}$. El mismo, se puede calcular de dos maneras, a saber. Por trabajos virtuales o mediante el problema primario y complementario.

$\boldsymbol{Q_1}^* = 1$ y $\boldsymbol{Q_j}^* = 0$ para $\boldsymbol{i} \neq 1$

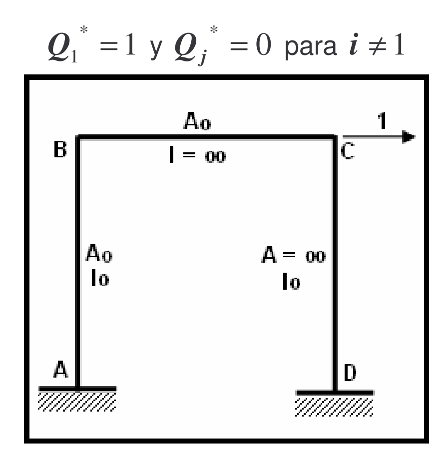


Figura 5.3.4 Estado de carga elemental $\boldsymbol{Q_1}^*$

Se procede a calcular los elementos de la primera columna de la matriz $\overline{\boldsymbol{T}}_1$, por trabajos virtuales. En el sistema de coordenadas de la figura 5.3.2, se tiene:

$$\delta q_1 = 1 \text{ y } \delta q_i = 0 \text{ para } i \neq 1$$

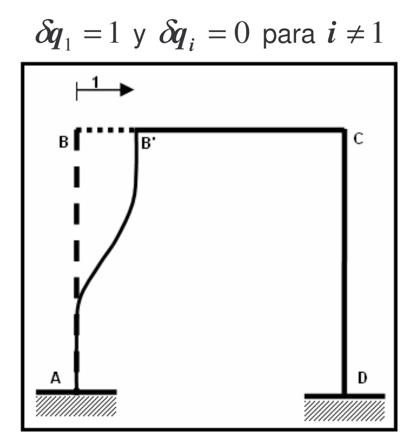


Figura 5.3.5 Deformada elemental, del desplazamiento virtual q_1

$$Q_1 = T_{111} = 0$$

$\boldsymbol{T}_{121}$ es el trabajo virtual de la carga concentrada unitaria que actúa sobre el pórtico de la figura 5.3.4, en el diagrama elemental $\delta q_2 = 1$ y $\delta q_i = 0$ para $i \neq 2$, de la figura 5.3.6.

$$\delta q_2 = 1 \text{ y } \delta q_i = 0 \text{ para } i \neq 2$$

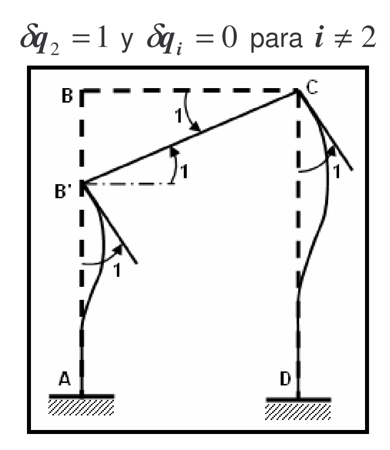


Figura 5.3.6 Deformada elemental, del desplazamiento virtual q_2

$$Q_2 = T_{121} = 0$$

El último término de la columna de la matriz $\boldsymbol{T}_1$, será:

$$\delta q_3 = 1 \text{ y } \delta q_i = 0 \text{ para } i \neq 3$$

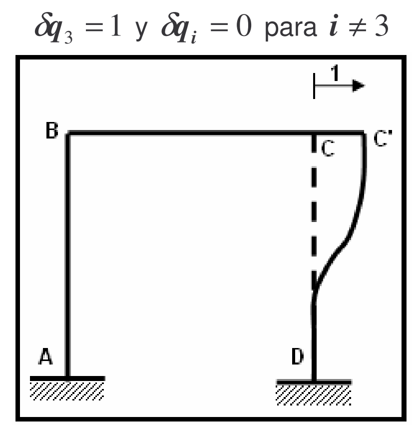


Figura 5.3.7 Deformada elemental, del desplazamiento virtual q_3

$$Q_3 = T_{131} = 1$$

Los términos de la segunda columna de la matriz $\boldsymbol{T}_1$, se obtendrán a través del problema primario y complementario, esto se hace por didáctica únicamente, se pudo obtener por trabajos virtuales. El estado de cargas, ahora es:

$$\boldsymbol{Q}_2^{\ *} = 1 \text{ y } \boldsymbol{Q}_j^{\ *} = 0 \text{ para } \boldsymbol{i} \neq 2$$

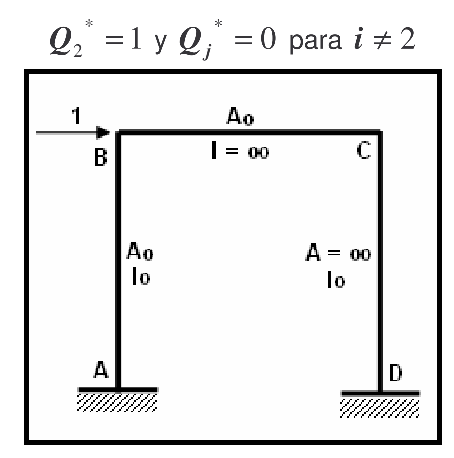


Figura 5.3.8 Estado de carga elemental $\boldsymbol{Q}_2^{\ *}$

En resumen, se desea obtener el vector de cargas generalizadas $\boldsymbol{Q}$ para el estado de cargas de la figura 5.3.8. El problema primario corresponde a tener $\bar{\boldsymbol{q}} = 0$ en la figura 5.3.2, este se muestra en la figura 5.3.9.

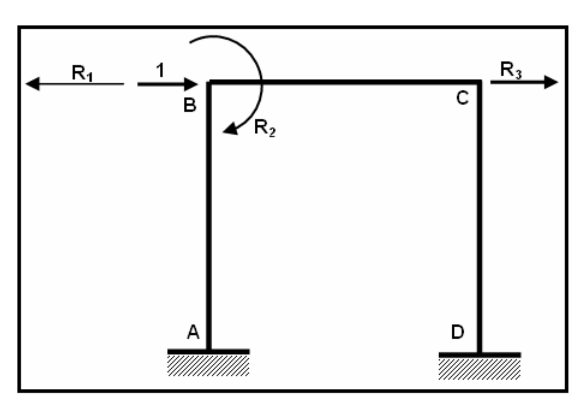
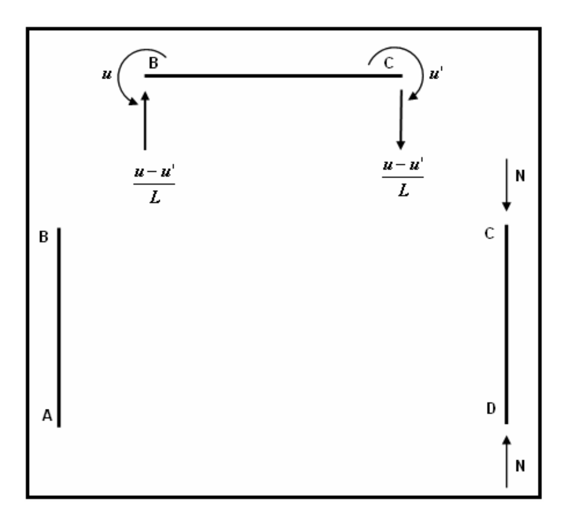


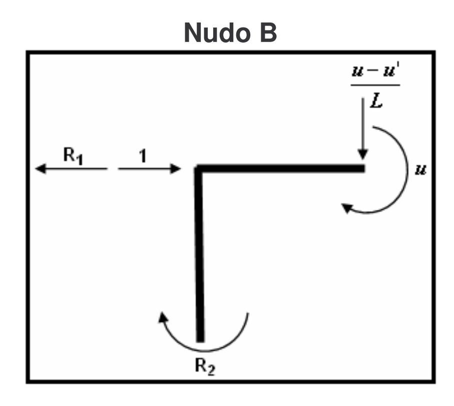
Figura 5.3.9 Problema primario

- **Equilibrio de miembros**



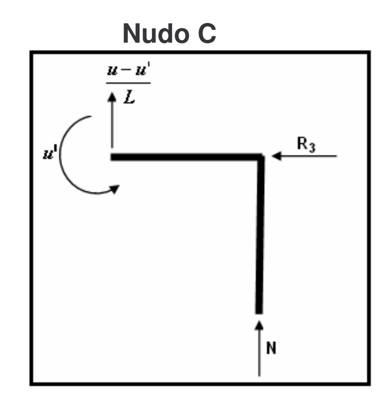
- **Equilibrio de nudos**

Nudo B



$$\rightarrow +$$
$$\sum Fx = 0 \qquad \Rightarrow \quad R_1 = 1$$
$$\sum M = 0 \qquad \Rightarrow \quad R_2 + \mu = 0$$
$$+\uparrow \sum Fy = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = \mu'$$

Nudo C



$$\rightarrow +$$
$$\sum Fx = 0 \qquad \Rightarrow \quad R_3 = 0$$
$$+\uparrow \sum Fy = 0 \quad \Rightarrow \quad N + \frac{\mu + \mu'}{L} = 0$$
$$\sum M = 0 \qquad \Rightarrow \quad \mu' = 0$$

Al resolver el sistema de ecuaciones, se tiene que todo vale cero a excepción de R_1 que es igual a uno. El problema complementario es muy sencillo, razón por la cual se escribe directamente la respuesta.

$$Q_1 = 1 = T_{112}$$
$$Q_2 = 0 = T_{122}$$
$$Q_3 = 0 = T_{132}$$

La última columna de la matriz $\boldsymbol{T}_1$ se deja a que el estudiante calcule, su resultado es:

$$T_{113} = 0$$
$$T_{123} = 0$$
$$T_{133} = 0$$

Por consiguiente, la matriz $\overline{T}_1$ es:

$$\overline{T}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5.3.2 Relación entre dos sistemas de desplazamientos

Dada la relación: $\overline{Q} = \overline{T}_1 \overline{Q}^*$, se desea saber qué relación existe entre q y q^*.

En este caso, sobre la estructura actúa un sistema de fuerzas virtuales arbitrarias y se calculan los trabajos virtuales en los desplazamientos reales.

Para el ejercicio de la figura 5.3.1, se tendrá, por ejemplo, las fuerzas virtuales mostradas en la figura 5.3.10.

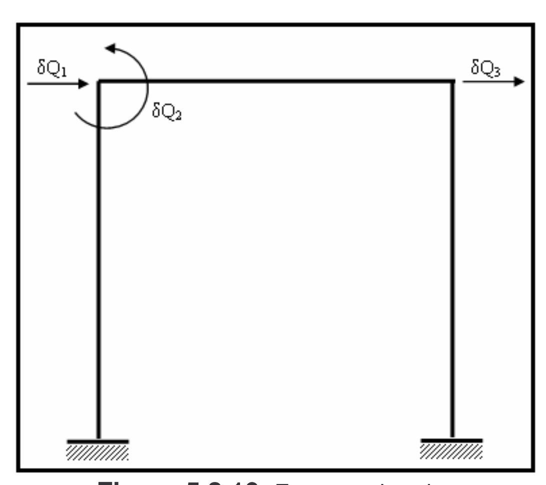


Figura 5.3.10 Fuerzas virtuales

Al calcular el trabajo virtual TV_1 de las fuerzas virtuales, figura 5.3.10, en los desplazamientos reales medidos en el sistema q que se indican en la figura 5.3.2, se tiene:

$$TV_1 = \delta Q_1 \ q_1 + \delta Q_2 \ q_2 + \delta Q_3 \ q_3 \qquad (5.6.1)$$

De donde:

$$TV_1 = \begin{bmatrix} \delta Q_1 & \delta Q_2 & \delta Q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

$$TV_1 = \delta \overline{Q}^t \overline{q} \qquad (5.6.2)$$

De igual forma, al calcular el trabajo virtual TV_2 de las fuerzas virtuales de la figura 5.3.10, en los desplazamientos reales medidos en las coordenadas q^* indicadas en la figura 5.3.3, se encuentra:

$$TV_2 = \delta Q^{*t} q^* \qquad (5.6.3)$$

Por lo indicado en el apartado 5.2.2 de este capítulo, se tiene:

$$TV_1 = TV_2$$

$$\delta\overline{Q}^t \overline{q} = \delta\overline{Q}^{*t} \overline{q}^* \qquad (5.6.4)$$

Se sabe:

$$\delta\overline{Q} = \overline{T}_1 \delta\overline{Q}^* \qquad (5.6.5)$$

Al reemplazar (5.6.5) en (5.6.4) se encuentra:

$$\left(\overline{T}_1 \delta\overline{Q}^*\right)^t \overline{q} = \overline{Q}^{*t} \overline{q}\,*$$

$$\delta\overline{Q}^{*t} \overline{T}_1^t \overline{q} = \delta\overline{Q}^{*t} \overline{q}^*$$

Como $\delta\overline{Q}^*$ es un sistema de cargas virtuales arbitrario y la igualdad anterior se verifica siempre, entonces se tiene:

$$\overline{T}_1^t \overline{q} = \overline{q}^* \qquad (5.6.6)$$

Resumen general:

Si	$\overline{Q} = \overline{T}_1 \overline{Q}^*$	entonces	$\overline{q}^* = \overline{T}_1^t \overline{q}$

5.3.3 Relación entre $\overline{T}$ y $\overline{T}_1$

En el numeral 5.2.1 de este capítulo se analizó la matriz $\overline{T}$ que relaciona: $\overline{q} = \overline{T}\overline{q}^*$, y en el numeral 5.3.1 se estudió la matriz $\overline{T}_1$, teniéndose: $\overline{Q} = \overline{T}_1 \overline{Q}^*$. Se desea encontrar ahora qué relación existe entre las matrices $\overline{T}$ y $\overline{T}_1$.

Si: $\overline{Q} = \overline{T}_1 \overline{Q}^*$ se tiene que $\overline{q}^* = \overline{T}_1^t \overline{q}$, sustituyendo este valor en la relación: $\overline{q} = \overline{T}\overline{q}^*$, se tiene:

$$\overline{q} = \overline{T}\left(\overline{T}_1^t \overline{q}\right)$$

Por ser $\overline{q}$ un vector general, se cumple:

$$\overline{T} = \left(\overline{T}_1^t\right)^{-1} \qquad (5.7)$$

Se deja al estudiante que demuestre la siguiente relación que también existe entre $\overline{T}$ y $\overline{T}_1$.

$$\overline{T}^t = \overline{T}^{-1} \qquad (5.8)$$

La transpuesta de la matriz $\overline{T}$ es igual a la matriz inversa de $\overline{T}_1$.

5.4 RELACIÓN ENTRE SISTEMAS DE COORDENADAS NO GENERALIZADAS

5.4.1 Relación $\overline{q}_{ng} = \overline{T}\overline{q}$

Para la estructura de la figura 5.4.1, cuyos elementos son totalmente flexibles, se han elegido dos sistemas de coordenadas, los mismos que se indican en la figura 5.4.2 y 5.4.3. El primer sistema de coordenadas q es generalizado ya que éste tiene coordenadas que son independientes. En cambio q_{ng} **no es generalizado** ya que este tiene coordenadas que son dependientes.

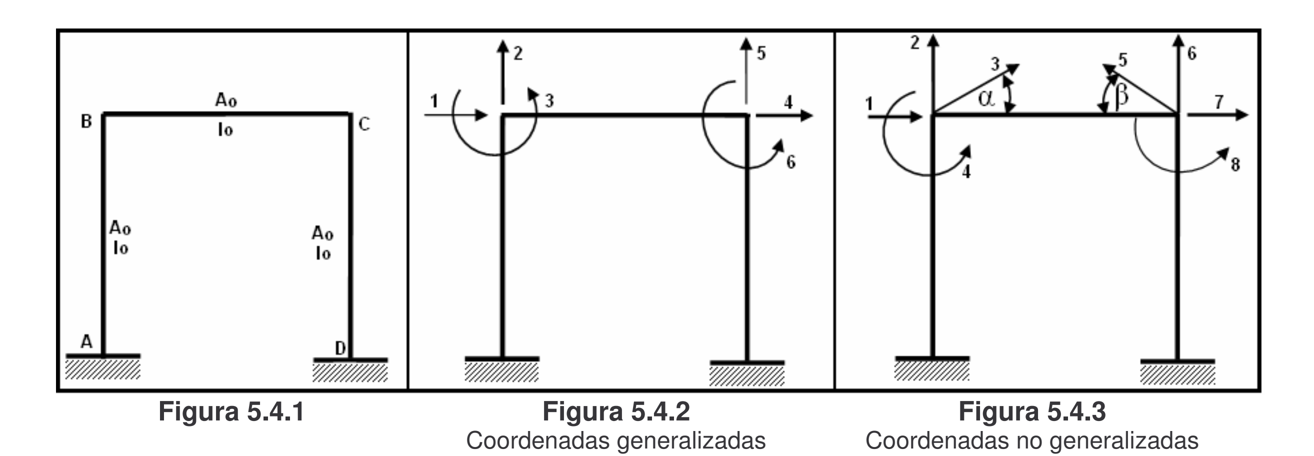


Figura 5.4.1 **Figura 5.4.2** Coordenadas generalizadas **Figura 5.4.3** Coordenadas no generalizadas

La relación entre los dos sistemas de coordenadas se define de la siguiente manera:

$$q_{ng} = T\ q \tag{9.9}$$

donde T es la matriz de transformación de coordenadas, es este caso no es cuadrada es de orden (n x m) siendo n el número de coordenadas del sistema no generalizado q_{ng} y m es el número de coordenadas del sistema generalizado q. Para el ejemplo que se está analizando en la figura 5.4.1, la matriz T tendrá 8 filas y 6 columnas.

Por un procedimiento similar a los realizados anteriormente se puede demostrar fácilmente que un término cualquiera T_{ij} **será el valor de la componente q_{ing} medido en el sistema de coordenadas no generalizado, correspondiente al diagrama elemental $q_j = 1$ y demás coordenadas nulas**, diagrama realizado en el sistema de coordenadas generalizadas.

Para el sistema de coordenadas presentado en la figura 5.4.2 y 5.4.3, no se puede escribir: $q = T\ q_{ng}$, puesto que no existen condiciones de restricción entre las coordenadas q. Por lo tanto la relación inversa será valida si los dos sistemas de coordenadas son generalizados.

5.4.2 Relación $Q = T^t\ Q_{ng}$

Dada la relación: $q_{ng} = T\ q$, se demuestra por medio de trabajos virtuales que $Q = T^t\ Q_{ng}$. Esta ecuación indica que si se conoce los valores de Q_{ng} se podrá determinar cuanto vale Q por

medio de la matriz T pero en general no se podrá determinar los valores de Q_{ng} conocido los valores de Q .

En resumen para calcular Q_{ng} a partir de Q se procederá de la siguiente manera:

1) Calcular la matriz T por geometría, utilizando la ecuación (9.9).

2) Obtener T^t .

3) Calcular $\left(T^t\right)^{-1}$. Esto será posible si T^t es una matriz singular, caso contrario no se puede resolver el problema.

4) Calcular $Q_{ng} = \left(T^t\right)^{-1} Q$

5.5 CALCULO DEL VECTOR Q POR MEDIO DE LA MATRIZ T

5.5.1 Matriz T_{2-3}

Como se verá en el capítulo 12, se denomina matriz T_{2-3} a la matriz que relaciona los sistemas de coordenadas del elemento de la figura 5.1. Esta matriz permite pasar de coordenadas locales a coordenadas globales de un elemento. Por didáctica se presenta nuevamente estos dos sistemas de coordenadas en las figuras 5.5.2 y 5.5.3.

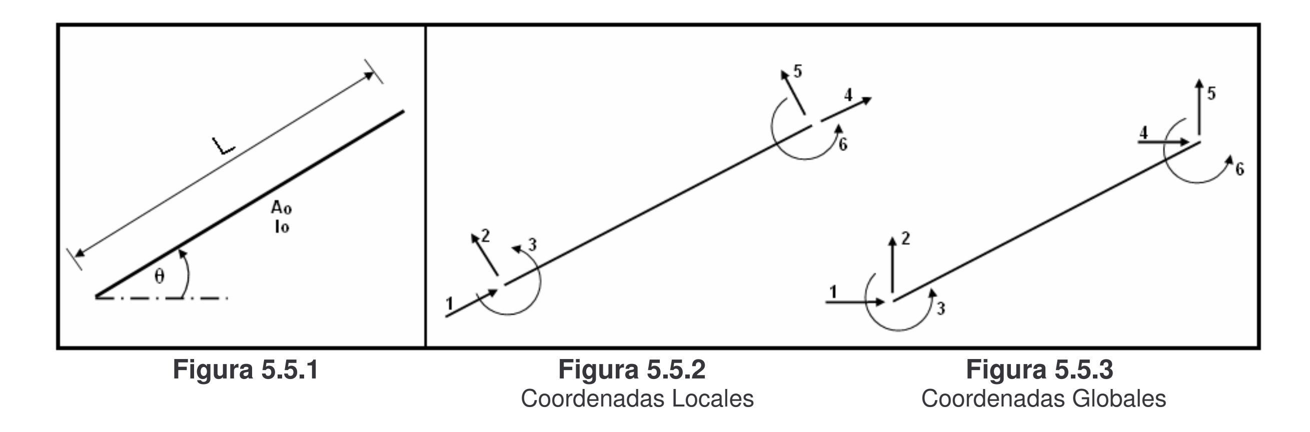


Figura 5.5.1 **Figura 5.5.2** Coordenadas Locales **Figura 5.5.3** Coordenadas Globales

En la figura 5.5.1 se presenta un elemento inclinado que forma un ángulo α con la horizontal y que tiene una longitud L. Nótese que el ángulo θ se mide a partir del eje horizontal X. Para una viga horizontal el valor de $\theta = 0$, para una columna vertical se tiene $\theta = 90$. Para calcular la matriz T_{2-3} se construirá las deformadas elementales en el sistema de coordenadas globales y se medirá en el sistema de coordenadas locales.

$$q = T_{2-3}\ q^*$$

- **Primera columna de** $\boldsymbol{T}_{2-3}$

$$q_1^* = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad para \quad i \neq 1$$

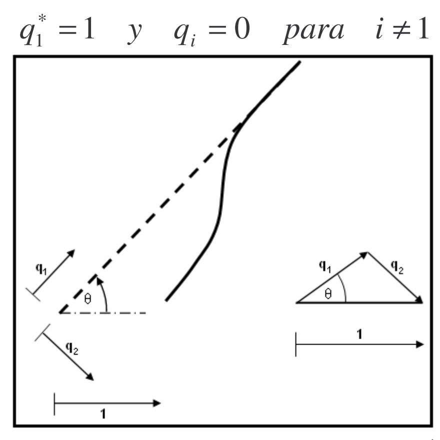


Figura 5.5.4 Deformada elemental q_1^*

$$q_1 = \cos\theta \qquad\qquad q_2 = -sen\theta \qquad\qquad q_3 = q_4 = q_5 = q_6 = 0$$

- **Segunda columna de** $\boldsymbol{T}_{2-3}$

$$q_2^* = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad para \quad i \neq 2$$

Figura 5.5.5 Deformada elemental q_2^*

$$q_1 = sen\theta \qquad\qquad q_2 = \cos\theta \qquad\qquad q_3 = q_4 = q_5 = q_6 = 0$$

- **Tercera columna de** $\boldsymbol{T}_{2-3}$

$$q_3^* = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad para \quad i \neq 3$$

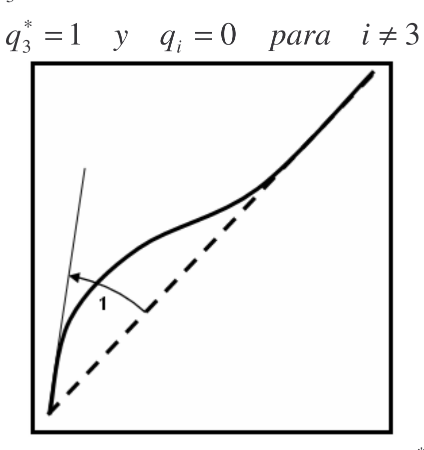


Figura 5.5.6 Deformada elemental q_3^*

$$q_1 = 1 \qquad\qquad q_1 = q_2 = q_4 = q_5 = q_6 = 0$$

Se deja al lector el cálculo de las restantes columnas de la matriz $\boldsymbol{T}_{2-3}$. El resultado final se indica a continuación.

$$\boldsymbol{T}_{2-3} = \begin{bmatrix} \cos\theta & sen\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -sen\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & sen\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -sen\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (9.10)$$

Es muy importante la matriz $\boldsymbol{T}_{2-3}$ en la programación de pórticos planos. A ésta matriz también se la conoce como matriz de rotación. Una aplicación inmediata de lo estudiado en el presente capítulo es la siguiente:

$$\text{Si } \boldsymbol{q} = \boldsymbol{T}_{2-3}\, \boldsymbol{q}^{*} \text{ Entonces } \boldsymbol{Q}^{*} = \boldsymbol{T}_{2-3}^{t}\, \boldsymbol{Q} \qquad (9.11)$$

Sea $\boldsymbol{Q}_2$ el vector de cargas de empotramiento de un elemento en coordenadas locales y $\boldsymbol{Q}_3$ el vector de cargas de empotramiento de un elemento en coordenadas globales. Con esta nomenclatura la ecuación (9.11) se transforma en:

$$\boldsymbol{Q}_3 = \boldsymbol{T}_{2-3}^{t}\, \boldsymbol{Q}_2 \qquad (9.12)$$

5.5.2 Cálculo de $\boldsymbol{Q}$ orientado al ordenador

En base a la teoría expuesta en el capítulo 4 y en éste capítulo. El algoritmo para calcular el vector de cargas generalizadas $\boldsymbol{Q}$, orientado al uso del ordenador es el siguiente.

5.5.2.1 Caso de cargas en las juntas

Cuando las cargas actúan únicamente en las juntas, el cálculo de $\boldsymbol{Q}$ es directo, solamente se identifican los grados de libertad en los cuales actúan las cargas.

El usuario de un programa de computación deberá indicar la junta cargada y después la fuerza horizontal, la fuerza vertical y el momento que en ella actúan, considerando positivos si la fuerza horizontal es hacia la derecha, la vertical hacia arriba y el momento antihorario.

En base a la identificación de la junta cargada se obtienen los respectivos grados de libertad.

- **EJEMPLO N.- 3**

Calcular el vector de cargas generalizadas $\boldsymbol{Q}$ para el marco plano de la figura 5.6.1 cuyos elementos se consideran totalmente flexibles. En la figura 5.6.2 se presenta el respectivo sistema de coordenadas generalizadas. Únicamente actúan una fuerza horizontal hacia la derecha de 4 T, y un momento en sentido horario de 6 T m. En la figura 5.6.1 se han numerado los elementos esto sirve para el siguiente ejemplo. En la figura 5.6.3 se indica la numeración de los nudos.

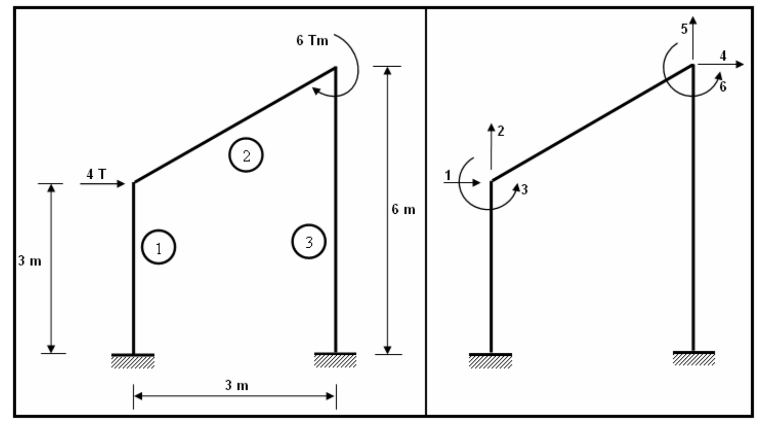


Figura 5.6.1 Datos de la carga **Figura 5.6.2** Sistema $Q - q$

- **SOLUCIÓN**

La fuerza horizontal de 4 T está aplicada en el grado de libertad 1 y el momento de 6 T.m. en el grado de libertad 6. Por lo tanto únicamente estos grados de libertad del vector Q tendrán valores diferentes de cero el uno será positivo por que está en el mismo sentido del sistema $Q - q$ y el segundo negativo por que es horario.

$$Q = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow & \textit{Posición} & 1 \\ \leftarrow & \textit{Posición} & 2 \\ \leftarrow & \textit{Posición} & 3 \\ \leftarrow & \textit{Posición} & 4 \\ \leftarrow & \textit{Posición} & 5 \\ \leftarrow & \textit{Posición} & 6 \end{matrix}$$

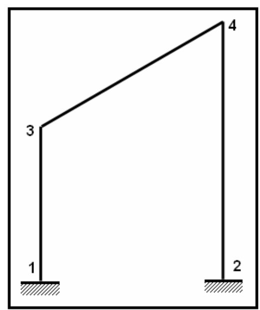


Figura 5.6.3 Numeración de los nudos.

Uno de los primeros datos de un programa de computación que resuelve estructuras es el número de nudos. En el ejemplo que se ha desarrollado son 4. Como es pórtico plano cada nudo tendrá tres grados de libertad. Con relación a la figura 5.6.3 se aprecia que los nudos 1 y 2 son empotramientos en consecuencia no existe grados de libertad en esos nudos. Con esta información el programa genera un arreglo que se ha llamado **CG** (Coordenadas Generalizadas) que tendrá n filas y 3 columnas. Siendo n el número de nudos. Para el ejemplo este arreglo es:

- **Arreglo CG**

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow & \textit{Nudo}\ 1 \\ \leftarrow & \textit{Nudo}\ 2 \\ \leftarrow & \textit{Nudo}\ 3 \\ \leftarrow & \textit{Nudo}\ 4 \end{matrix}$$

En un programa el usuario identifica la junta cargada, en este caso la número 3. El programa va al arreglo **CG** a la tercera fila y encuentra la identificación de los grados de libertad, la primera será para la fuerza horizontal, la segunda para la vertical y la tercera para el momento. En el ejemplo la única que tiene valor es la fuerza horizontal que vale 4 T. El programa toma este valor y lo ubica en la posición 1 del vector de cargas generalizadas $\boldsymbol{Q}$.

Luego el usuario del programa indica la otra junta cargada que en este caso es la 4, con esta información se va a la cuarta fila del arreglo **CG** y como solo actúa un momento de - 6 Tm. Este dato lo ubica en la posición 6.

Por otra parte el usuario del programa debe identificar a cada uno de los elementos y para cada uno de ellos debe indicar el nudo inicial y final del elemento. Para el ejemplo esta información se indica en la Tabla 5.1

Tabla 5.1 Nudo Inicial y Final de cada elemento

Elemento	Nudo Inicial	Nudo Final
1	1	3
2	3	4
3	2	4

En base a la información de la tabla 5.1, que el usuario da como dato y en base al arreglo **CG**, se obtiene el arreglo **VC** (Vector de Colocación). Para pórticos planos este arreglo tiene m filas y 6 columnas, siendo m el número de elementos del pórtico. En las tres primeras columnas van los grados de libertad del Nudo Inicial y en las tres siguientes columnas van los grados de libertad del nudo final.

A manera de ejemplo la primera fila del arreglo VC corresponde al elemento 1, con el dato del nudo inicial igual a 1 se obtiene del arreglo **CG** los valores 0 0 0 y con la identificación del nudo final 3 del arreglo **CG** se encuentra 1 2 3. Lo propio se hace para los restantes elementos.

- **Arreglo VC**

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow & \textbf{\textit{Elemento}}\ 1 \\ \leftarrow & \textbf{\textit{Elemento}}\ 2 \\ \leftarrow & \textbf{\textit{Elemento}}\ 3 \end{matrix}$$

El arreglo **VC** sirve para encontrar el vector de cargas generalizadas cuando se tienen cargas en los elementos.

Nótese que se está resolviendo un pórtico no ortogonal. La única condición que se ha puesto es que todos los elementos sean totalmente flexibles. Se puede programar para pórticos con todos los elementos axialmente rígidos pero para empezar se hace el caso más fácil que es todos los elementos son completamente flexibles.

5.5.2.2 Caso de cargas en los elementos

Se define el vector de colocación de un elemento i como $\boldsymbol{VC}^{(i)}$, a un vector de 6 elementos que contiene los grados de libertad del nudo inicial y del nudo final de un elemento, en coordenadas globales. Para los elementos de la figura 5.6.1 los vectores de colocación son las filas del arreglo **VC** indicado que se repite a continuación.

$$\boldsymbol{VC}^{(1)} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3]$$
$$\boldsymbol{VC}^{(2)} = [1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6]$$
$$\boldsymbol{VC}^{(3)} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 4 \quad 5 \quad 6]$$

El procedimiento de cálculo del vector de cargas generalizadas $\boldsymbol{Q}$, cuando existen cargas en los elementos, es el siguiente:

1) Encontrar el vector de empotramiento perfecto de cargas, en coordenadas locales $\boldsymbol{Q}_2$ de cada uno de los elementos cargados.

2) Obtener la matriz $\boldsymbol{T}_{2-3}$ de cada uno de los elementos cargados.

3) Calcular el vector de empotramiento perfecto en coordenadas globales $\boldsymbol{Q}_3$ y cambiarle de signo para tener cargas en las juntas.

$$\boldsymbol{Q}_3 = \boldsymbol{T}_{2-3}^{t} \quad \boldsymbol{Q}_2$$

4) Mediante el vector de colocación correspondiente al elemento cargado se realiza el ensamblaje del vector $\boldsymbol{Q}$. Si ha una determinada posición del vector $\boldsymbol{Q}$ llegan varios aportes estos se van sumando.

- **EJEMPLO N.- 4**

Calcular el vector $\boldsymbol{Q}$ de la estructura de la figura 5.7.1, cuyos elementos son totalmente flexibles. Calcular por medio de la matriz $\boldsymbol{T}_{2-3}$ es decir aplicando un procedimiento orientado al uso del ordenador.

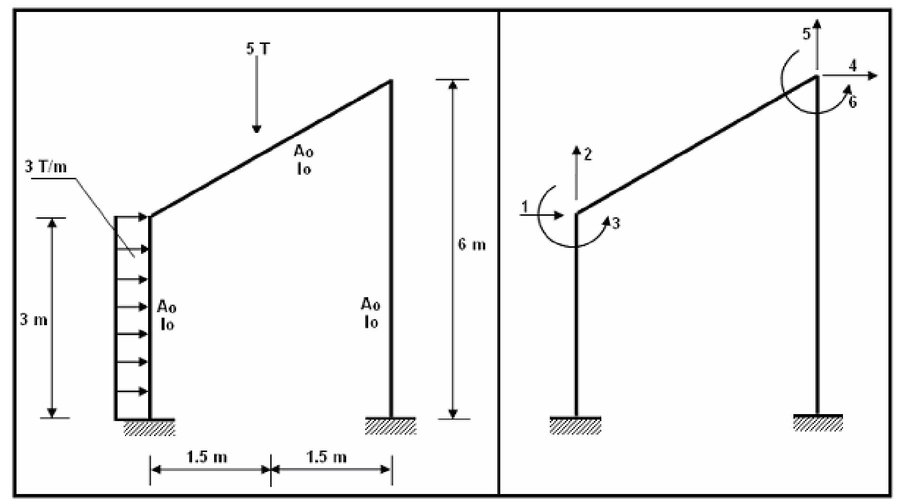
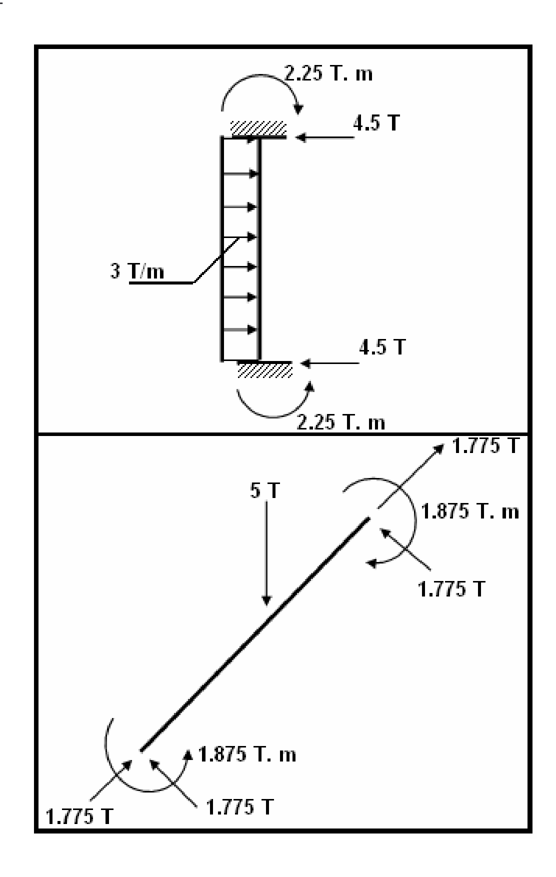


Figura 5.7.1 Datos de ejemplo 4. **Figura 5.7.2** Coordenadas generalizadas.

- **SOLUCIÓN**

i) Vector de empotramiento perfecto en coordenadas locales $\boldsymbol{Q}_2$. Se indica el vector transpuesto para ahorrar espacio en la escritura.

$$Q_2^{t\,(1)} = [0.00 \quad 4.50 \quad 2.25 \quad 0.00 \quad 4.50 \quad -2.25]$$
$$Q_2^{t\,(2)} = [1.775 \quad 1.775 \quad 1.875 \quad 1.775 \quad 1.775 \quad -1.875]$$



ii) Matriz T_{2-3} de elementos cargados

- **Elemento 1** $\theta = 90^o$

$$T_{2-3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Elemento 2** $\theta = 45^o$

$$T_{2-3} = \begin{bmatrix} 0.707 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.707 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.707 & 0.707 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.707 & 0.707 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

iii) Vector $\boldsymbol{Q}_3$

$$\boldsymbol{Q}_3 = \boldsymbol{T}^{t}_{2-3} \quad \boldsymbol{Q}_2$$

$$\boldsymbol{Q}_3^{(1)} = -\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.00 \\ 4.50 \\ 2.25 \\ 0.00 \\ 4.50 \\ -2.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.50 \\ 0.00 \\ -2.25 \\ 4.50 \\ 0.00 \\ 2.25 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q}_3^{(2)} = -\begin{bmatrix} 0.707 & -0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.707 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.707 & -0.707 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.707 & 0.707 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.775 \\ 1.775 \\ 1.875 \\ 1.775 \\ 1.775 \\ -1.875 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.000 \\ -2.500 \\ -1.875 \\ 0.000 \\ -2.500 \\ 1.875 \end{bmatrix}$$

iv) Ensamblaje de $\boldsymbol{Q}$

$$\boldsymbol{VC}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{VC}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q}_3^{(1)} = \begin{bmatrix} 4.50 \\ 0.00 \\ -2.25 \\ 4.50 \\ 0.00 \\ 2.25 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \textit{Posición} & 0 \\ \textit{Posición} & 0 \\ \textit{Posición} & 0 \\ \textit{Posición} & 1 \\ \textit{Posición} & 2 \\ \textit{Posición} & 3 \end{matrix}$$

$$\boldsymbol{Q}_3^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.000 \\ -2.500 \\ -1.875 \\ 0.000 \\ -2.500 \\ 1.875 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \textit{Posición} & 1 \\ \textit{Posición} & 2 \\ \textit{Posición} & 3 \\ \textit{Posición} & 4 \\ \textit{Posición} & 5 \\ \textit{Posición} & 6 \end{matrix}$$

El $\boldsymbol{VC}$ indica la posición a la cual va el término de $\boldsymbol{Q}_3$ dentro del vector $\boldsymbol{Q}$. Si la posición es 0 simplemente no contribuye y se pasa al siguiente. El vector resultante es:

$$Q = \begin{bmatrix} 4.5 + 0.0 \\ 0.0 - 2.5 \\ 2.25 - 1.875 \\ 0.0 \\ -2.5 \\ 1.875 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.500 \\ -2.500 \\ 0.375 \\ 0.000 \\ -2.500 \\ 1.875 \end{bmatrix}$$

5.6 EJERCICIOS RESUELTOS

- **EJEMPLO N.- 5**

Para la estructura de la figura 5.8.1 se presentan dos sistemas de coordenadas generalizadas en las figura 5.8.2 y 5.8.3. Se pide calcular la matriz $\boldsymbol{T}$ de transformación de coordenadas tal que $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{T}\ \boldsymbol{q}^*$

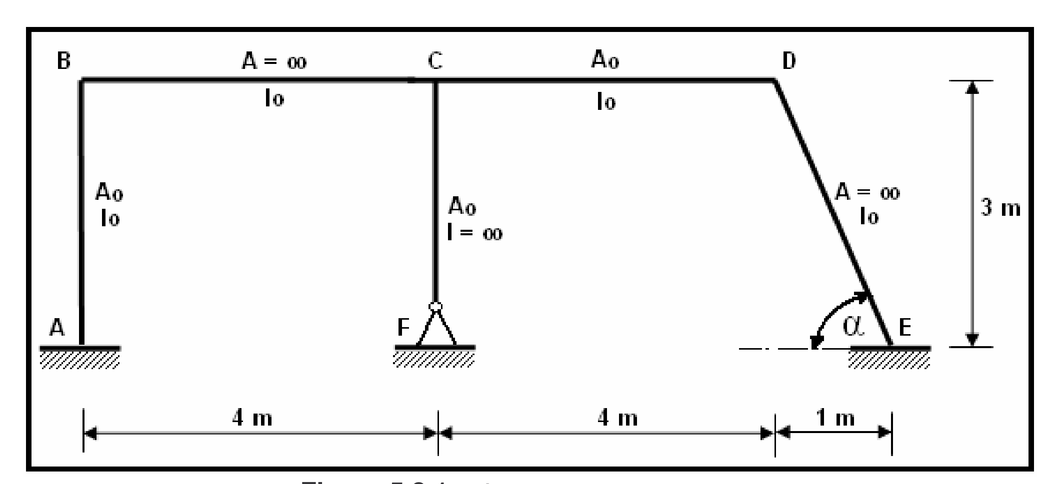


Figura 5.8.1 Pórtico plano del ejemplo 5.

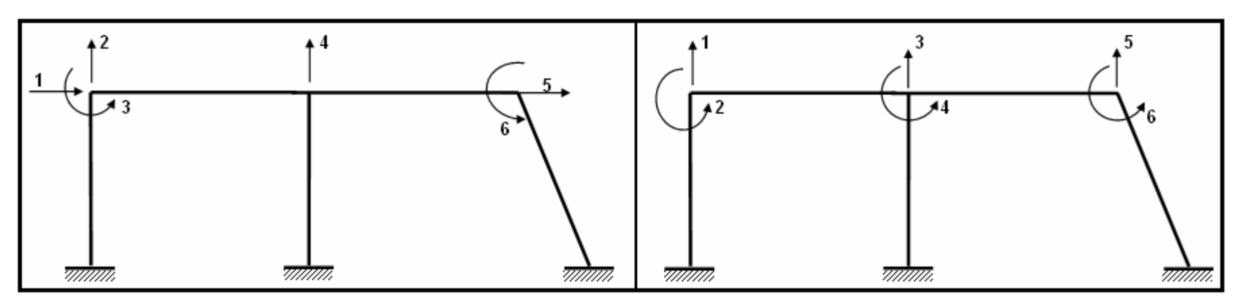


Figura 5.8.2 Sistema de coordenadas $Q - q$ **Figura 5.8.3** Sistema de coordenadas $Q^* - q^*$

- **SOLUCIÓN**

  - Primera columna de $\boldsymbol{T}$

$$q_1^* = 1 \qquad y \qquad q_i = 0 \qquad para \quad i \neq 1$$

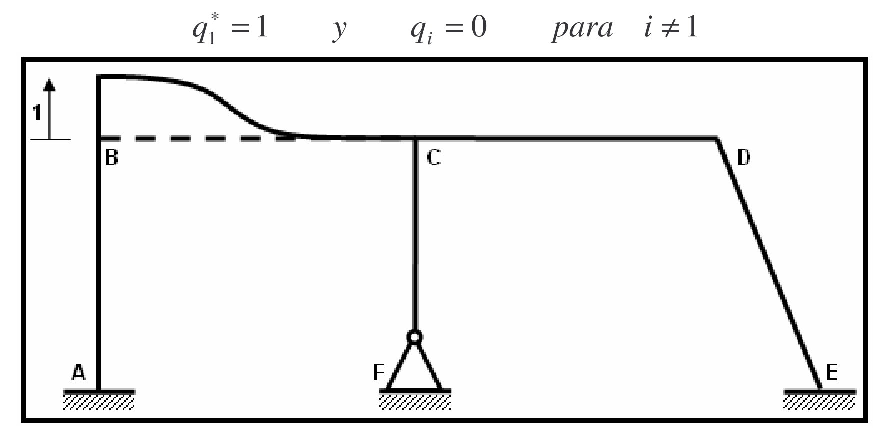


Figura 5.8.4 Deformada elemental q_1^*

$$q_1 = 0 \qquad\qquad q_2 = 1 \qquad\qquad q_3 = q_4 = q_5 = q_6 = 0$$

  - Segunda columna de $\boldsymbol{T}$

$$q_2^* = 1 \qquad y \qquad q_i = 0 \qquad para \quad i \neq 2$$

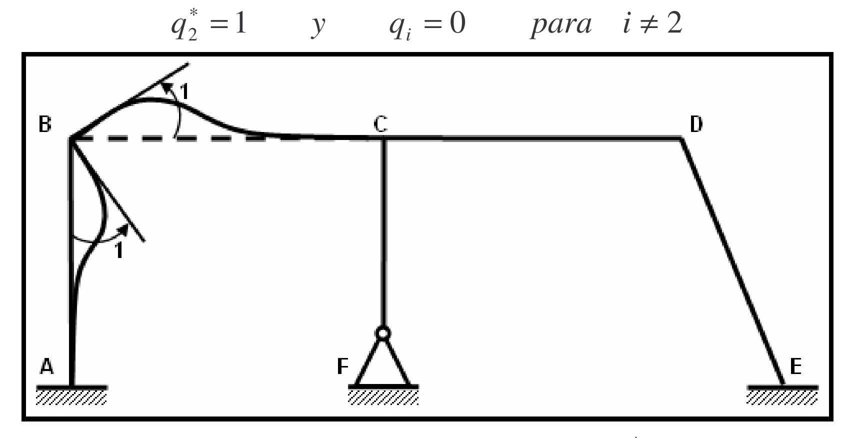


Figura 5.8.5 Deformada elemental q_2^*

$$q_1 = q_2 = 0 \qquad\qquad q_3 = 1 \qquad\qquad q_4 = q_5 = q_6 = 0$$

  - Tercera columna de $\boldsymbol{T}$

$$q_3^* = 1 \qquad y \qquad q_i = 0 \qquad para \quad i \neq 3$$

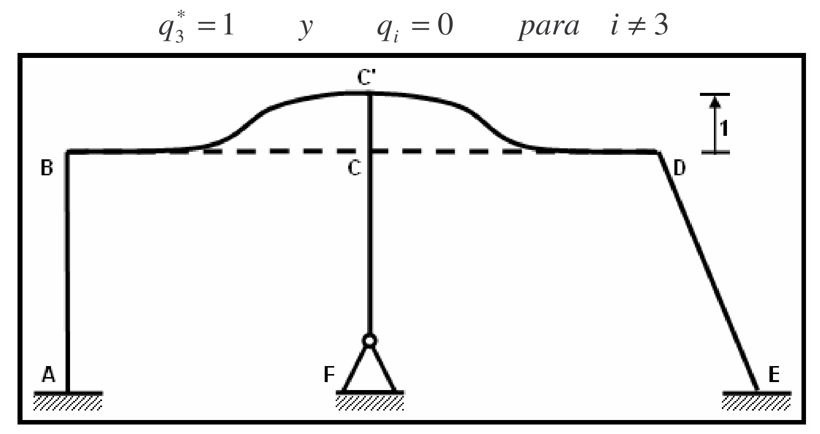


Figura 5.8.6 Deformada elemental q_3^*

$$q_1 = q_2 = q_3 = 0 \qquad\qquad q_4 = 1 \qquad\qquad q_5 = q_6 = 0$$

- Cuarta columna de $\boldsymbol{T}$

$$q_4^* = 1 \qquad y \qquad q_i = 0 \qquad para \quad i \neq 4$$

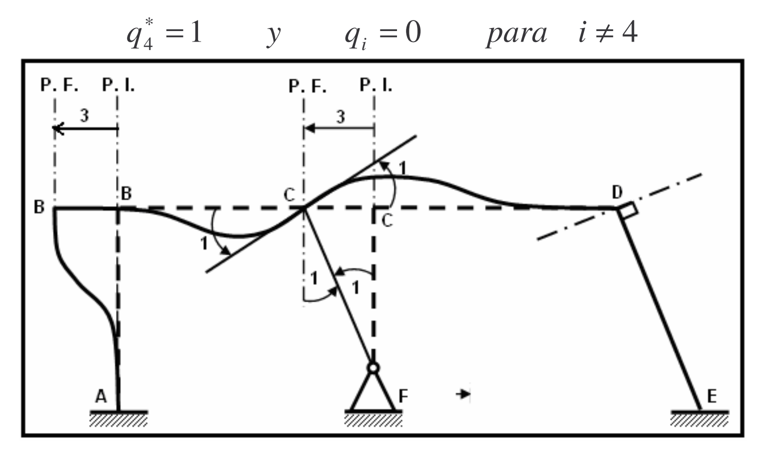


Figura 5.8.7 Deformada elemental q_4^*

$$q_1 = -3 \qquad\qquad q_2 = q_3 = q_4 = q_5 = q_6 = 0$$

- Quinta columna de $\boldsymbol{T}$

$$q_5^* = 1 \qquad y \qquad q_i = 0 \qquad para \quad i \neq 5$$

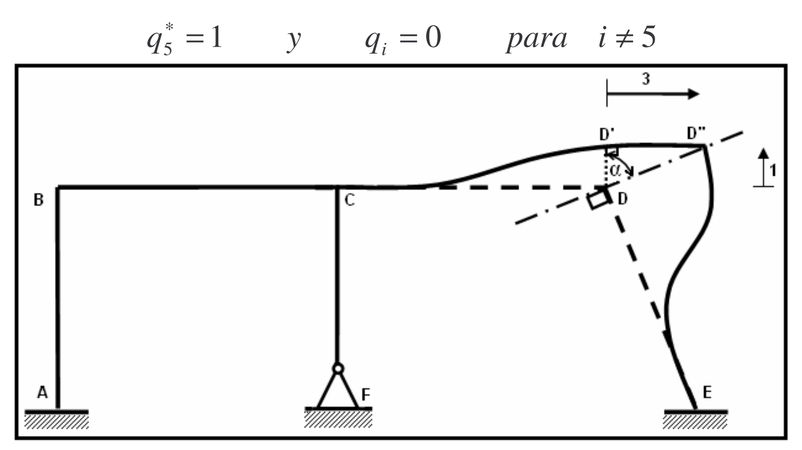


Figura 5.8.8 Deformada elemental q_5^*

$$q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 0 \qquad\qquad q_5 = 3 \qquad\qquad q_6 = 0$$

- Sexta columna de $\boldsymbol{T}$

$$q_6^* = 1 \qquad y \qquad q_i = 0 \qquad para \quad i \neq 6$$

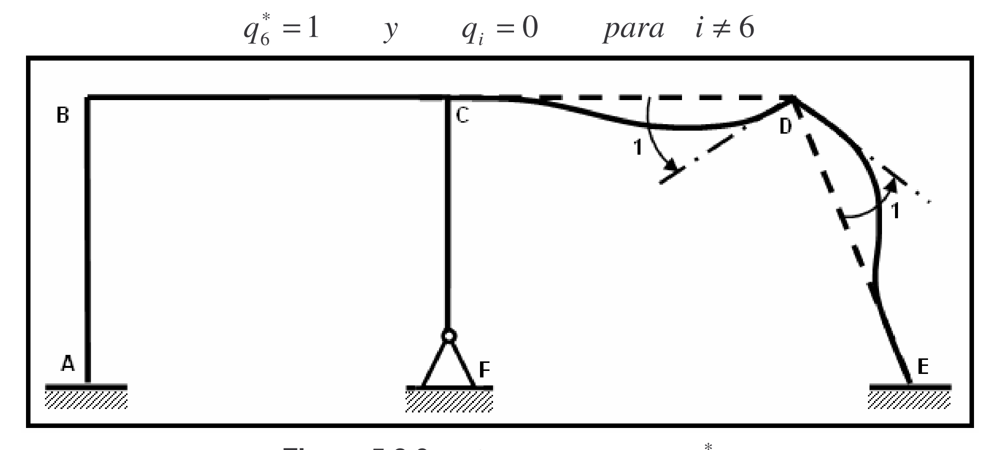


Figura 5.8.9 Deformada elemental q_6^*

$$q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q_5 = 0 \qquad\qquad q_6 = 1$$

- Matriz $\boldsymbol{T}$

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **EJEMPLO N.- 6**

En el pórtico plano que se presenta en la figura 5.9.1 se han seleccionado los sistemas de coordenadas generalizadas de las figuras 5.9.2 y 5.9.3. Encontrar la matriz de transformación de coordenadas $\boldsymbol{T}$, tal que: $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{T}\ \boldsymbol{q}^*$.

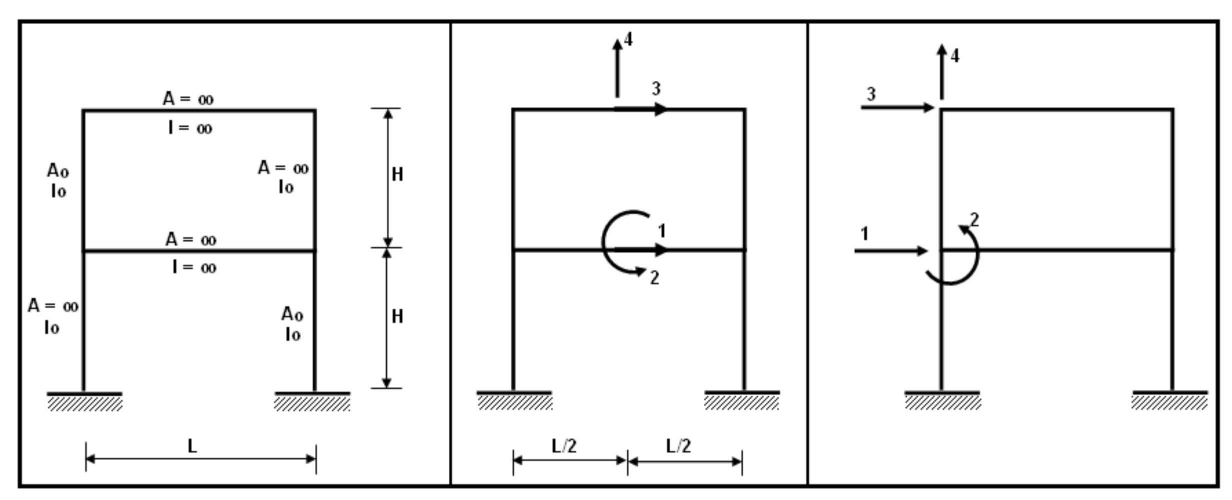


Figura 5.9.1 Ejemplo 6. **Figura 5.9.2** $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{q}$ **Figura 5.9.3** $\boldsymbol{Q}^* - \boldsymbol{q}^*$

- **SOLUCIÓN**

  - Primera columna de $\boldsymbol{T}$

$$q_1^* = 1 \qquad y \qquad q_i = 0 \qquad para \quad i \neq 1$$

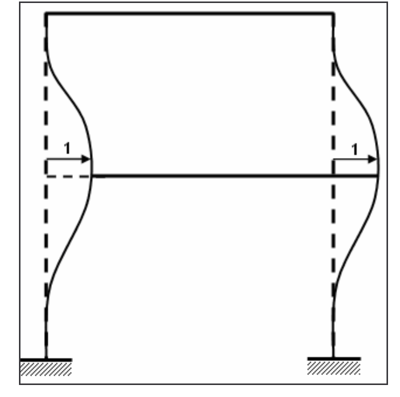


Figura 5.9.4 Deformada elemental q_1^*

$$q_1 = 1 \qquad\qquad q_2 = q_3 = q_4 = 0$$

- Segunda columna de $\boldsymbol{T}$

$$q_2^* = 1 \qquad y \qquad q_i = 0 \qquad para \quad i \neq 2$$

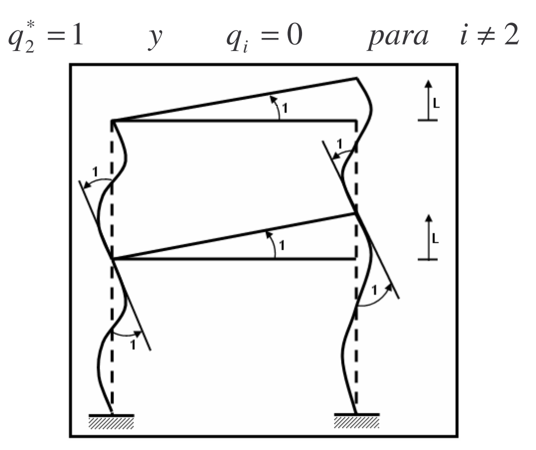


Figura 5.9.5 Deformada elemental q_2^*

$$q_1 = 0 \qquad q_2 = 1 \qquad q_3 = 0 \qquad q_4 = \frac{L}{2}$$

- Tercera columna de $\boldsymbol{T}$

$$q_3^* = 1 \qquad y \qquad q_i = 0 \qquad para \quad i \neq 3$$

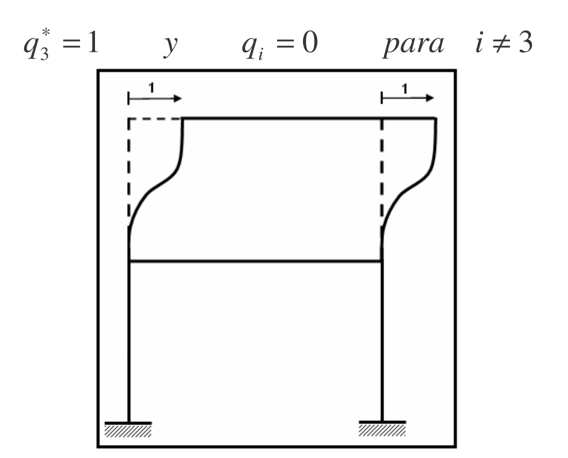


Figura 5.9.6 Deformada elemental q_3^*

$$q_1 = q_2 = 0 \qquad q_3 = 1 \qquad q_4 = 0$$

- Cuarta columna de $\boldsymbol{T}$

$$q_4^* = 1 \qquad y \qquad q_i = 0 \qquad para \quad i \neq 4$$

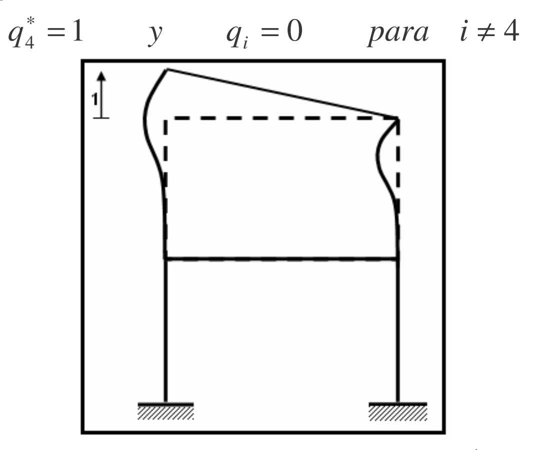


Figura 5.9.7 Deformada elemental q_4^*

$$q_1 = q_2 = q_3 = 0 \qquad q_4 = \frac{1}{2}$$

- Matriz $\boldsymbol{T}$

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\boldsymbol{L}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

- **EJEMPLO N.- 7**

En relación con la estructura y sistemas de coordenadas del ejemplo 5, calcular la matriz $\boldsymbol{T}_1$, tal que: $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{T}_1\ \boldsymbol{Q}^*$.

- **SOLUCIÓN**

  - Primera columna de $\boldsymbol{T}_1$

$$Q_1 = 1 \qquad y \qquad Q_i = 0 \qquad para \quad i \neq 1$$

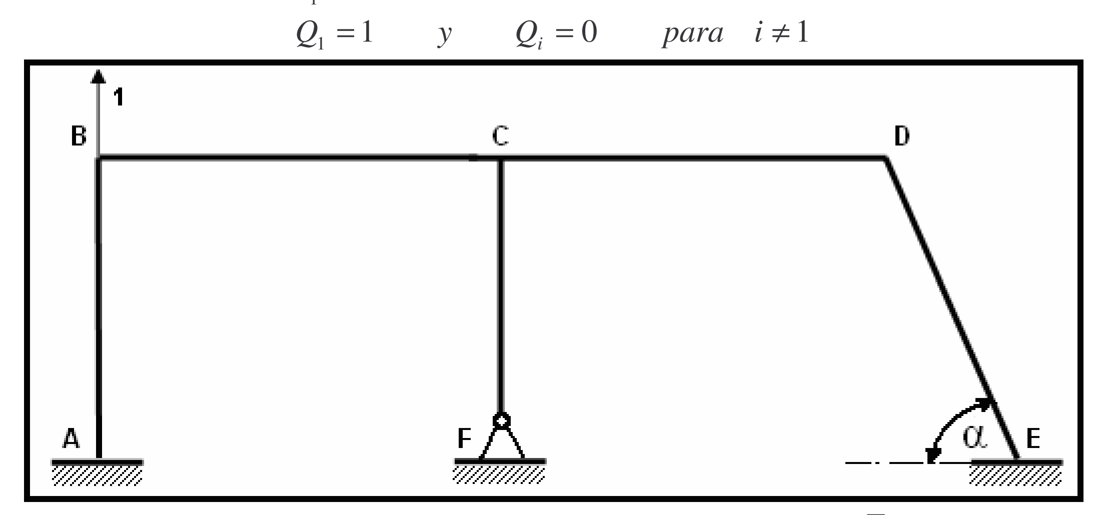


Figura 5.10.1 Estado de carga para la primera columna de $\boldsymbol{T}_1$.

Se va a calcular la primera columna de la matriz $\boldsymbol{T}_1$ por medio del problema primario y complementario.

- **Problema Primario**

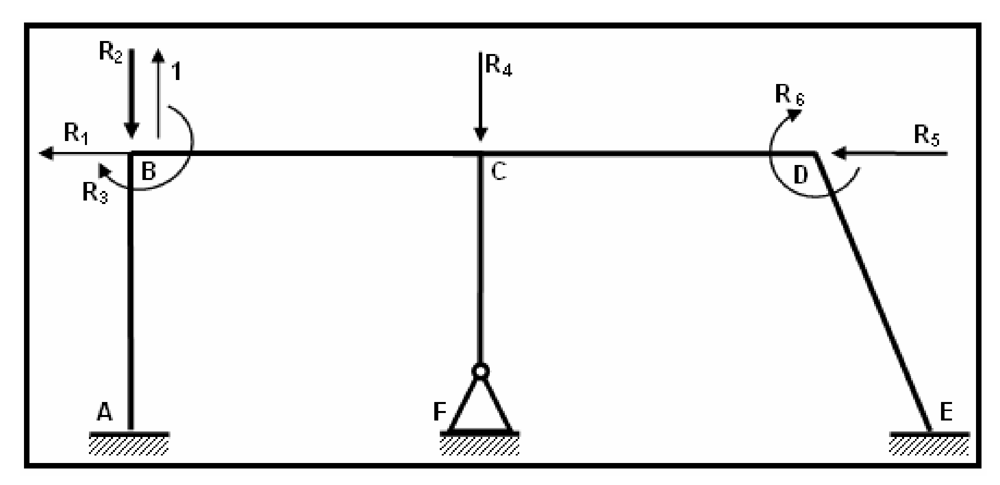
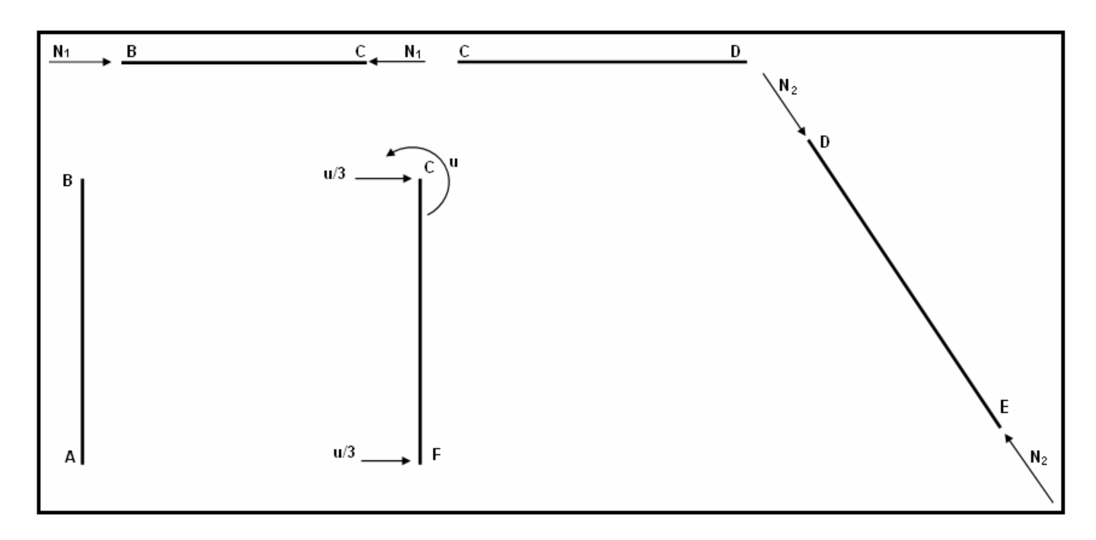


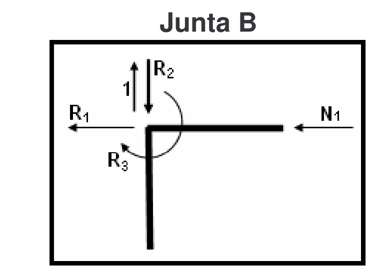
Figura 5.10.2 Problema Primario para la primera columna de $\boldsymbol{T}_1$.

- **Equilibrio de Elementos**



- **Equilibrio de Juntas**

Junta B

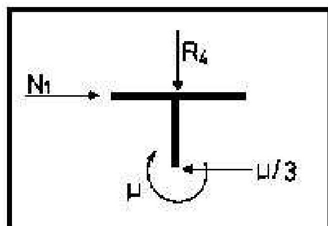


$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad -N_1 - R_1 = 0$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - R_2 = 0$$

$$\sum M = 0 \quad \Rightarrow \quad R_3 = 0$$

Junta C

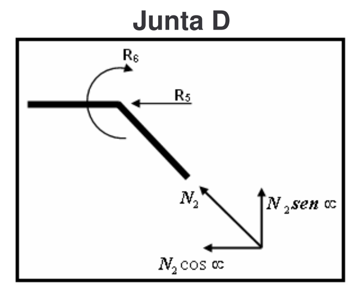


$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 - \frac{\mu}{3} = 0$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad -R_4 = 0$$

$$\sum M = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = 0$$

Junta D

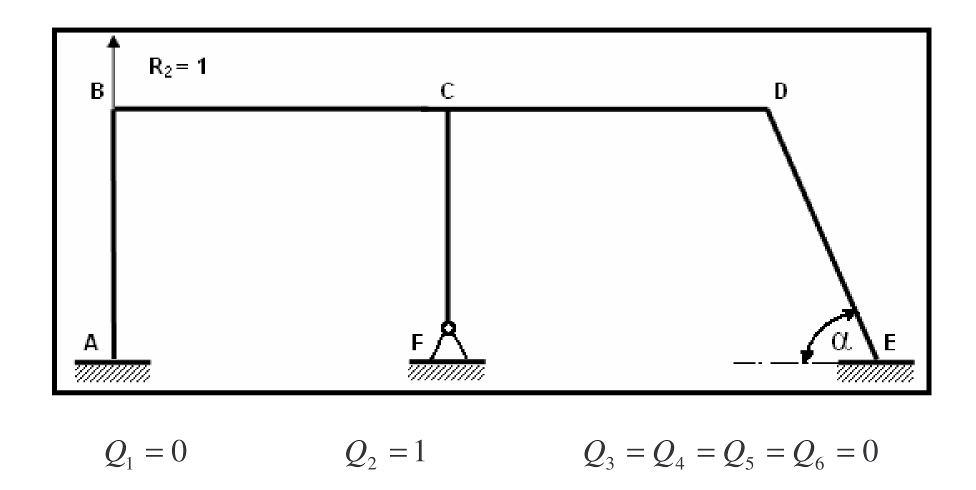


$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad R_5 + N_2 \cos\alpha = 0$$
$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad N_2\, sen\alpha = 0$$
$$\sum M = 0 \quad \Rightarrow \quad R_6 = 0$$

La solución del sistema de ecuaciones reporta:

$$R_1 = 0 \qquad R_2 = 1 \qquad R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = 0 \qquad N_1 = N_2 = \mu = 0$$

- **Problema Complementario**



$$Q_1 = 0 \qquad Q_2 = 1 \qquad Q_3 = Q_4 = Q_5 = Q_6 = 0$$

Por un procedimiento parecido se obtendrán las diferentes columnas de la matriz $\boldsymbol{T}_1$. Como se conoce el vector $\boldsymbol{Q}$ también se puede obtener por medio de trabajos virtuales. Se deja al estudiante que obtenga las demás columnas de la matriz $\boldsymbol{T}_1$, en especial la cuarta y quinta columna.

- Matriz $\boldsymbol{T}_1$

$$\boldsymbol{T}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **EJEMPLO N.- 8**

1. Seleccionar un sistema de coordenadas generalizadas $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{q}$ apropiado.
2. Encontrar el valor de $\boldsymbol{Q}$ que corresponde a la carga mostrada por trabajos virtuales y por medio del problema primario y complementario.
3. Encontrar la expresión de la elástica horizontal y vertical del elemento BC en términos de las coordenadas q_i y de las funciones de forma.
4. Se efectúa una transformación de coordenadas $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{T}\, \boldsymbol{q}^*$. Donde $\boldsymbol{T}$ es:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dibujar la deformada elemental $q_2^* = 1$ y las demás coordenadas nulas.

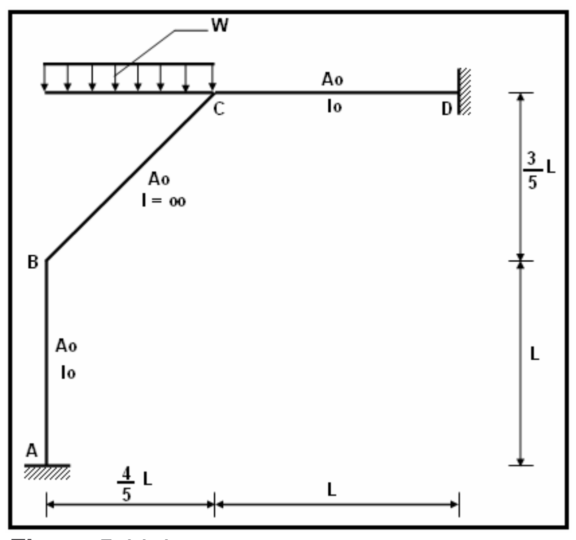


Figura 5.11.1 Estructura de los ejemplos 8, 9 y 10.

- **SOLUCIÓN**

Para seleccionar el sistema de coordenadas $Q-q$ apropiado se debe dibujar una deformada general. Conviene aplicar las fórmulas indicadas en el capítulo 1 para tener idea de los grados de libertad, se recuerda que el elemento $I = \infty$ disminuye en 2 grados de libertad.

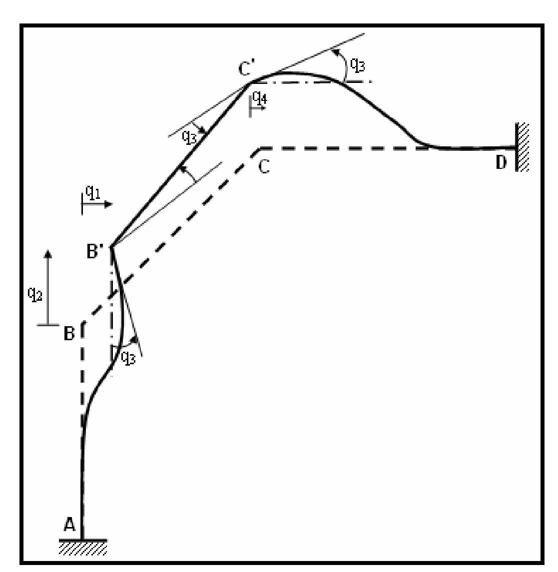


Figura 5.11.2 Deformada general

En base a la deformada general se encuentra el sistema de coordenadas $Q-q$ indicado en la figura 5.11.3.

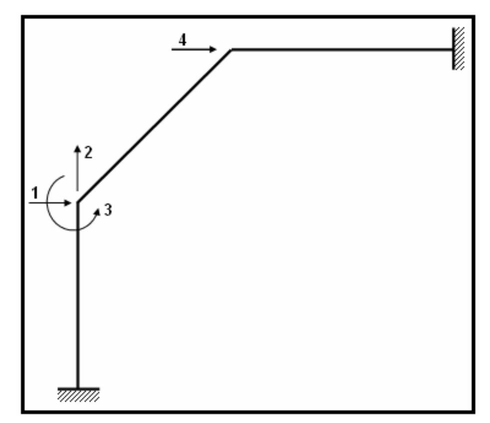
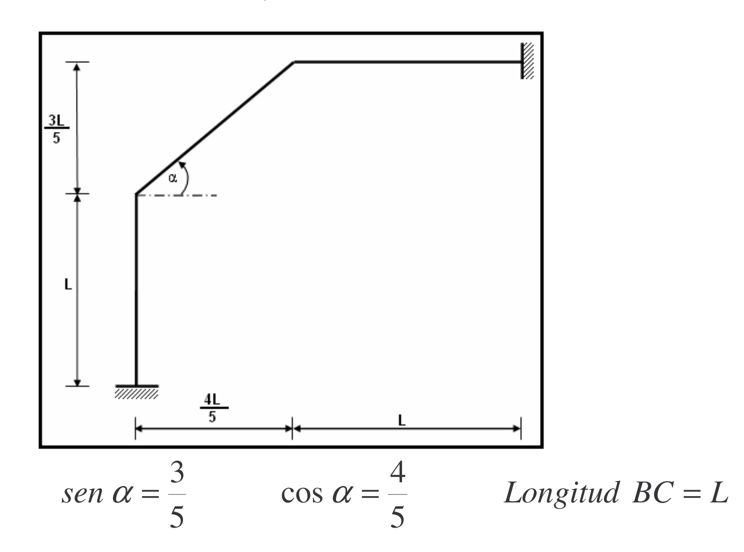


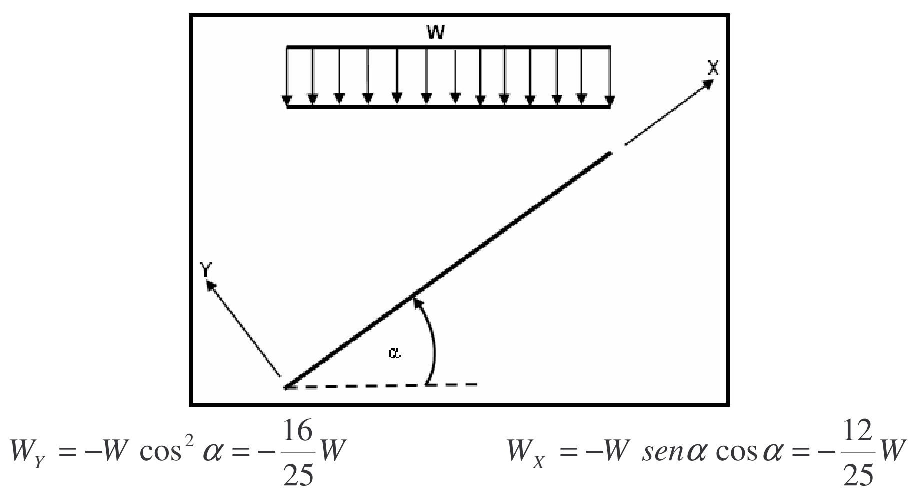
Figura 5.11.3 Sistema de coordenadas $Q - q$

Antes de encontrar el vector de cargas Q conviene encontrar algunos parámetros geométricos que se necesitan en la solución del problema.



$$tg\ \alpha = \frac{3}{4} \qquad sen\ \alpha = \frac{3}{5} \qquad \cos\alpha = \frac{4}{5} \qquad Longitud\ BC = L$$

La carga vertical debe ser descompuesta en una vertical y una horizontal distribuidas.



$$W_Y = -W\ \cos^2\alpha = -\frac{16}{25}W \qquad W_X = -W\ sen\alpha\cos\alpha = -\frac{12}{25}W$$

Se va a calcular el vector Q aplicando trabajos virtuales. Para ello es necesario tener en cuenta que el elemento BC es transversalmente rígido. En consecuencia las ordenadas de la elástica de éste elemento, son:

$$u(x) = u_1\ \phi_1(x) + u_2\ \phi_4(x)$$

$$v(x) = v_1 + \theta_1\ X$$

- **Cálculo de** Q_1

$$\delta q_1 = 1 \quad y \quad \delta q_i = 0 \quad i \neq 1$$

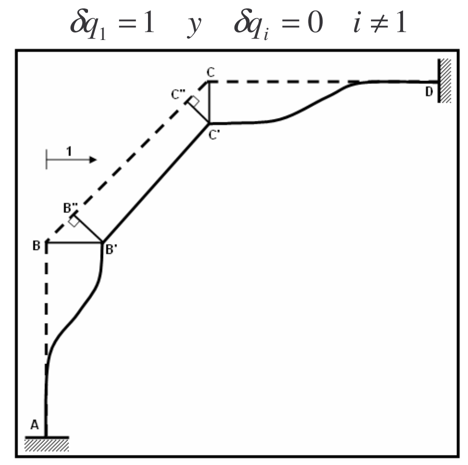
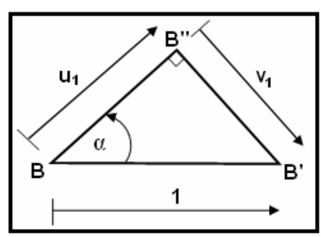
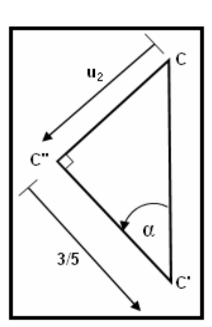


Figura 5.11.4 Deformada elemental $\delta q_1 = 1$



En el triángulo BB'B'' se tiene: $u_1 = \cos\alpha = 4/5$ $\quad v_1 = -sen\alpha = -3/5$
En la figura 5.11.4 se observa que B'B'' es igual a C'C'' y es igual a 3/5.



En el triángulo CC'C'' se tiene: $u_2 = -3/5\ tg\ \alpha = -9/20$. En resumen para el elemento BC se tiene:

$$u_1 = \frac{4}{5} \qquad u_2 = -\frac{9}{20}$$

$$v_1 = -\frac{3}{5} \qquad v_2 = -\frac{3}{5}$$

$$\theta_1 = 0 \qquad \theta_2 = 0$$

$$Q_1 = \int_0^L W_X\ u(x)\ dx + \int_0^L W_Y\ v(x)\ dx$$

$$Q_1 = \int_0^L -\frac{12}{25} W\left[u_1(x)\ \phi_1(x) + u_2(x)\phi_4(x)\right] dx + \int_0^L -\frac{16}{25} W\left[v_1 + \theta_1\ X\right]$$

$$Q_1 = -\frac{12}{25} W \int_0^L \left[\frac{4}{5}\left(1 - \frac{X}{L}\right) - \frac{9}{20}\frac{X}{L}\right] dx - \frac{16}{25} W \int_0^L \left[-\frac{3}{5}\right] dx = \frac{3}{10} WL$$

- **Cálculo de** Q_2

$$\delta q_2 = 1 \quad y \quad \delta q_i = 0 \quad i \neq 2$$

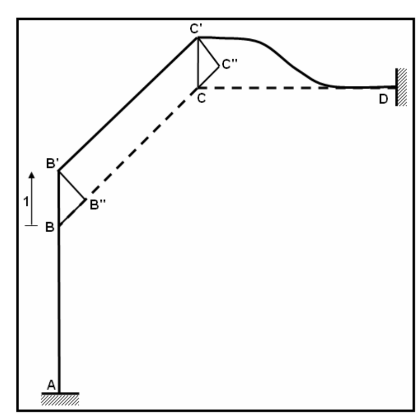
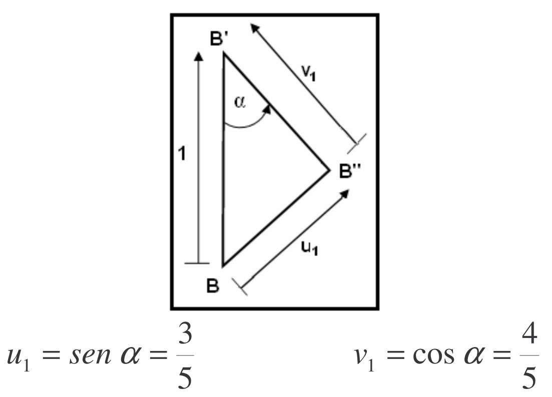


Figura 5.11.5 Deformada elemental $\delta q_2 = 1$

En la figura 5.11.5 se aprecia que el triángulo rectángulo BB'B'' es igual al triángulo CC'C''.



$$u_1 = sen\ \alpha = \frac{3}{5} \qquad v_1 = \cos\ \alpha = \frac{4}{5}$$

Por lo tanto para el elemento inclinado BC se tiene:

$$u_1 = \frac{3}{5} \qquad u_2 = \frac{3}{5}$$

$$v_1 = \frac{4}{5} \qquad v_2 = \frac{4}{5}$$

$$\theta_1 = 0 \qquad \theta_2 = 0$$

$$Q_2 = \int_0^L W_X\ u(x)\ dx + \int_0^L W_Y\ v(x)\ dx$$

$$Q_2 = \int_0^L -\frac{12}{25} W\left[u_1(x)\ \phi_1(x) + u_2(x)\phi_4(x)\right] dx + \int_0^L -\frac{16}{25} W\left[v_1 + \theta_1\ X\right]$$

$$Q_2 = -\frac{12}{25} W \int_0^L \left[\frac{3}{5}\left(1 - \frac{X}{L}\right) + \frac{3}{5}\frac{X}{L}\right] dx - \frac{16}{25} W \int_0^L \left[\frac{4}{5}\right] dx = -\frac{4}{5} WL$$

- **Cálculo de** Q_3

En la deformada elemental δq_3 que se indica en la figura 5.11.6 se debe aplicar el artificio para elementos $I = \infty$ con el cual se obtiene que C'C'' es igual a longitud del elemento L.

$$\delta q_3 = 1 \quad y \quad \delta q_i = 0 \quad i \neq 3$$

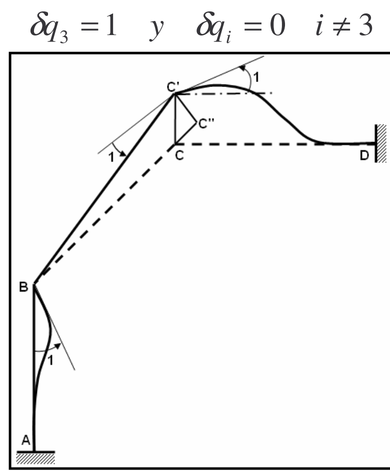
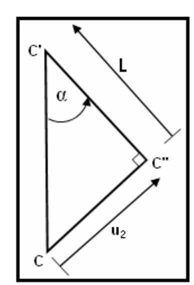


Figura 5.11.6 Deformada elemental $\delta q_3 = 1$



En el triángulo CC'C'' se tiene que: $u_2 = L\, tg\alpha = \frac{3}{4} L$. Para el elemento BC se tiene:

$$u_1 = 0 \qquad v_1 = 0 \qquad \theta_1 = 1$$

$$u_2 = \frac{3}{4} L \qquad v_2 = L \qquad \theta_2 = 1$$

$$Q_3 = \int_0^L W_X \; u(x)\, dx + \int_0^L W_Y \; v(x)\, dx = \int_0^L -\frac{12}{25} W\left[u_1(x)\; \phi_1(x) + u_2(x)\phi_4(x)\right] dx + \int_0^L -\frac{16}{25} W\left[v_1 + \theta_1 \; X\right]$$

$$Q_3 = -\frac{12}{25} W \int_0^L \left[\frac{3}{4} L \frac{X}{L}\right] dx - \frac{16}{25} W \int_0^L [X]\, dx = -\frac{9}{25} W \left|\frac{X^2}{2}\right|_0^L - \frac{16}{25} W \left|\frac{X^2}{2}\right|_0^L$$

$$Q_3 = -\frac{9}{50} WL^2 - \frac{16}{50} WL^2 = -\frac{WL^2}{2}$$

- **Cálculo de** Q_4

$$\delta q_4 = 1 \quad y \quad \delta q_i = 0 \quad i \neq 4$$

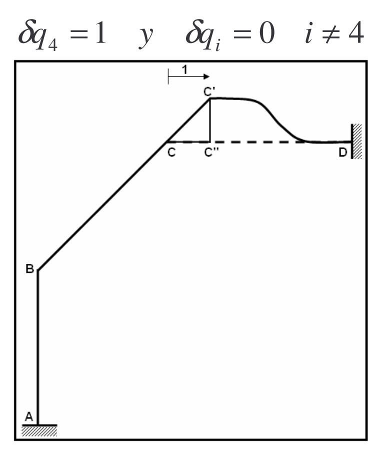
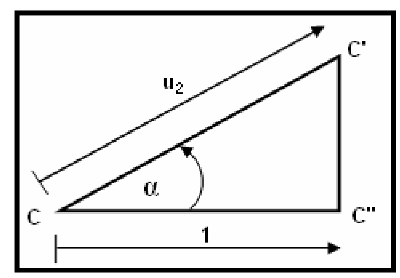


Figura 5.11.7 Deformada elemental δq_4

En el triángulo CC'C'' de la figura 5.11.7 se tiene que: $u_2 = \sec \alpha = \frac{5}{4}$



En consecuencia las coordenadas del elemento BC, son:

$$u_1 = v_1 = \theta_1 = 0 \qquad u_2 = 5/4 \qquad v_2 = \theta_2 = 0$$

$$Q_4 = \int_0^L W_X \; u(x)\; dx + \int_0^L W_Y \; v(x)\; dx = \int_0^L -\frac{12}{25} W \left[u_1(x)\; \phi_1(x) + u_2(x)\phi_4(x) \right] dx + \int_0^L -\frac{16}{25} W \left[v_1 + \theta_1 \; X \right]$$

$$Q_4 = -\frac{12}{25} W \int_0^L \left[\frac{5}{4} \frac{X}{L} \right] dx = -\frac{3}{5} W \left| \frac{X^2}{2L} \right|_0^L = -\frac{3}{10} WL$$

$$\boldsymbol{Q} = \frac{WL}{10} \begin{bmatrix} 3 \\ -8 \\ -5L \\ -3 \end{bmatrix}$$

Una vez que se ha terminado el cálculo del vector de cargas $\boldsymbol{Q}$ por trabajos virtuales se procede a su cálculo por medio del problema primario y complementario. En la figura 5.11.8 se indica el problema primario.

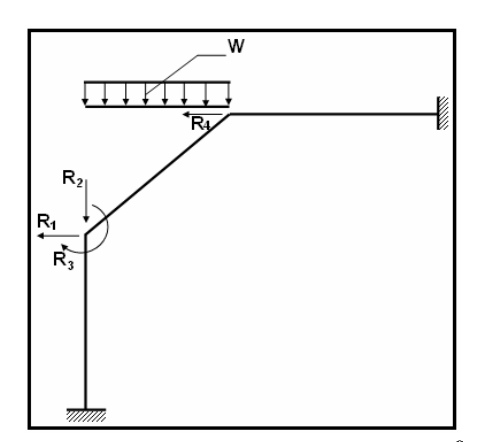
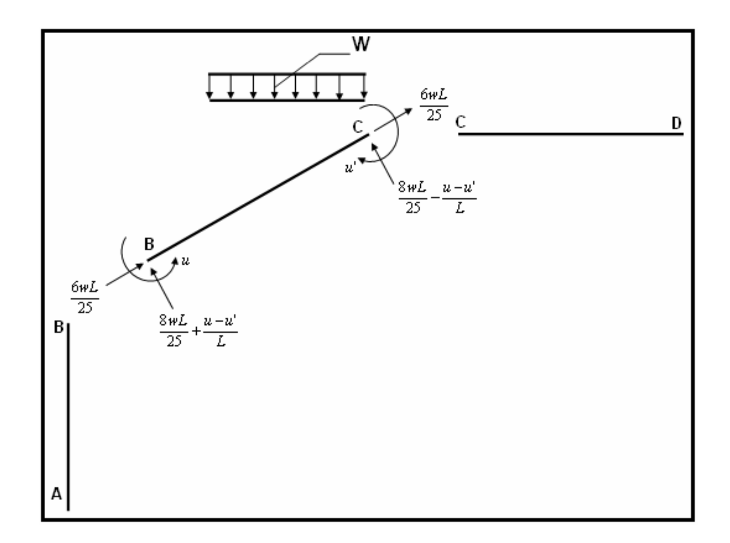


Figura 5.11.8 Problema Primario $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$

- **Equilibrio de elementos**

$$N_B = \int_0^L W_X \; \phi_1(x)\; dx = \int_0^L \frac{12}{25} W \left(1 - \frac{X}{L} \right) dx = \frac{12}{25} W \left| X - \frac{X^2}{2L} \right|_0^L = \frac{6}{25} WL$$

$$N_C = \int_0^L W_X \; \phi_4(x)\; dx = \int_0^L \frac{12}{25} W \frac{X}{L} dx = \frac{12}{25} W \left| \frac{X^2}{2L} \right|_0^L = \frac{6}{25} WL$$

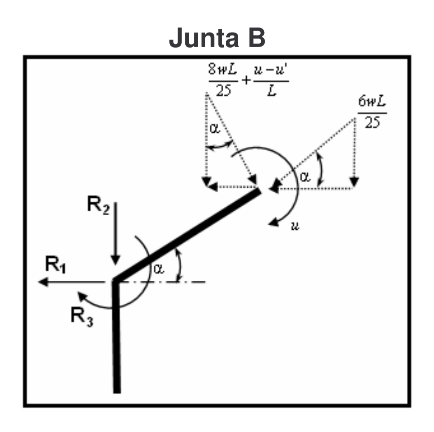


El cortante V_B se puede encontrar integrando entre 0 y L la carga W_Y multiplicando por la función de forma $\phi_2(x)$ y para el cortante V_C multiplicando dicha carga por $\phi_5(x)$ e integrando. Otra forma de hacerlo es la siguiente:

$$V_B = V_c = \frac{W_Y * L}{2} = \frac{16}{25} W \frac{L}{2} = \frac{8}{25} WL$$

- **Equilibrio de Juntas**

Junta B

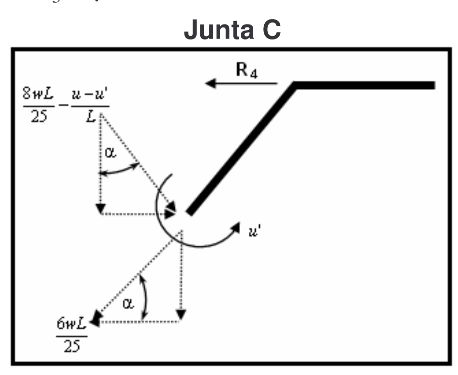


$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{8}{25} WL + \frac{\mu - \mu'}{L} \right) sen\alpha - \frac{6}{25} WL \cos\alpha - R_1 = 0$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{8}{25} WL + \frac{\mu - \mu'}{L} \right) \cos\alpha + \frac{6}{25} WL\, sen\alpha + R_2 = 0$$

$$\sum M = 0 \quad \Rightarrow \quad R_3 + \mu = 0$$

Junta C



$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{8}{25} WL - \frac{\mu - \mu^{'}}{L} \right) sen\alpha - \frac{6}{25} WL \cos\alpha - R_4 = 0$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{8}{25} WL - \frac{\mu - \mu^{'}}{L} \right) \cos\alpha + \frac{6}{25} WL \, sen\alpha = 0$$

$$\sum M = 0 \quad \Rightarrow \quad -\mu^{'} = 0$$

Al reemplazar $sen\,\alpha = 3/5$, $\cos\alpha = 4/5$ y resolver el sistema de ecuaciones se obtiene:

$$R_1 = \frac{3}{10} WL \qquad\qquad R_2 = -\frac{4}{5} WL$$

$$R_3 = -\frac{WL^2}{2} \qquad\qquad R_4 = -\frac{3}{10} WL$$

$$\mu = \frac{WL^2}{2} \qquad\qquad \mu^{'} = 0$$

El problema complementario se indica en la figura 5.11.9

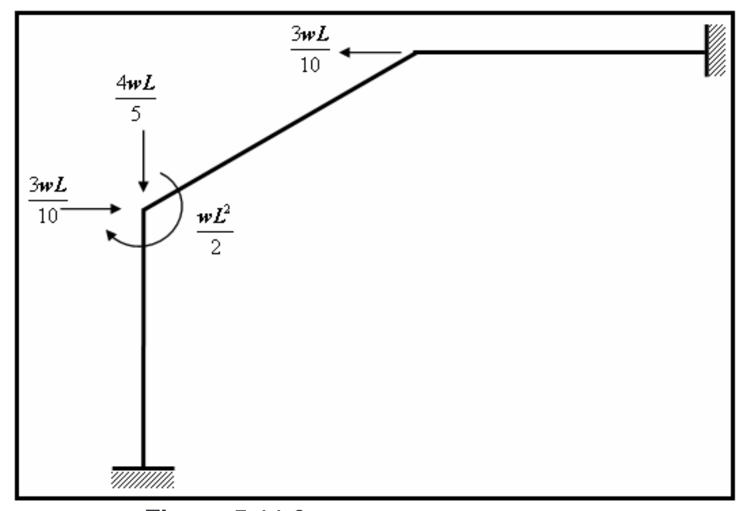


Figura 5.11.9 Problema complementario.

$$\boldsymbol{Q} = \frac{WL}{10} \begin{bmatrix} 3 \\ -8 \\ -5L \\ -3 \end{bmatrix}$$

Para el cálculo de las ordenadas de la elástica del elemento BC en términos de las coordenadas q_i y de las funciones de forma ϕ es necesario encontrar el desplazamiento vertical del nudo C, que se ha denominado q_5 .

El valor de q_5 se halla en cada uno de los diagramas de deformación elementales que se han dibujado en las figuras 5.11.4 a 5.11.7 pero en estos diagramas en lugar de considerar deformación unitaria considerar la deformación de la coordenada para la cual se obtiene el diagrama elemental. Con esta consideración en la figura 5.11.4 se tendría que:

$$B^{'}B^{"} = q_1 \; sen\alpha = \frac{3}{5} q_1$$

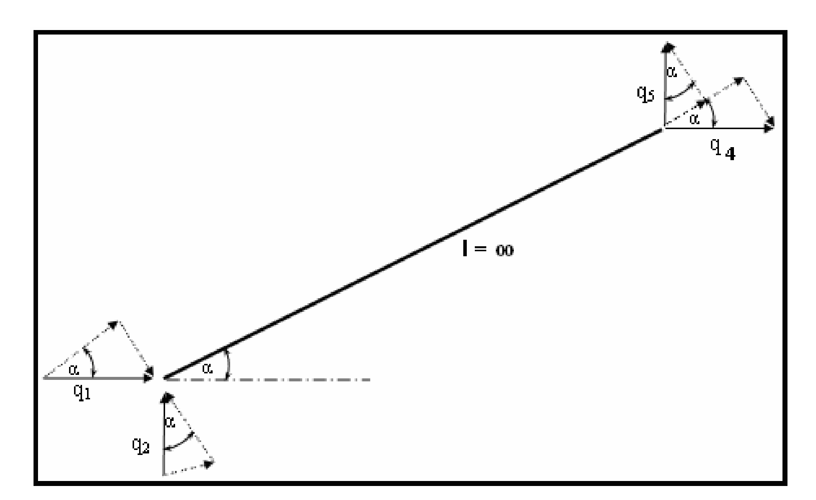
En la figura 5.11.4 se aprecia que B'B'' es igual a C'C''. Luego en el triángulo CC'C'' de la figura 5.11.4 se tiene que la componente de desplazamiento vertical CC' es negativo por que va hacia abajo y vale.

$$CC' = -\frac{\frac{3}{5}q_1}{\cos\alpha} = -\frac{\frac{3}{5}q_1}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}q_1$$

Por lo tanto la contribución de q_1 en el desplazamiento vertical del nudo C que se ha denominado q_5 es $-\frac{3}{4}q_1$ que se lo ha obtenido de la figura 5.11.4. Al proceder de igual manera en la figura 5.11.5 la contribución de q_2 en el desplazamiento vertical de C es igual a q_2. De la figura 5.11.6 se obtiene que el desplazamiento vertical de C sea $\frac{5}{4}L\,q_3$. Finalmente de la figura 5.11.7 se obtiene que el desplazamiento vertical de C sea $\frac{3}{4}q_4$. Al sumar estas contribuciones elementales se halla la componente de desplazamiento vertical del nudo C denominada q_5.

$$q_5 = -\frac{3}{4}q_1 + q_2 + \frac{5}{4}L\,q_3 + \frac{3}{4}q_4$$

Ahora se debe calcular las coordenadas del elemento u_1, u_2, v_1 y θ_1 para encontrar las ordenadas de la elástica de BC.



$$u_1 = q_1\cos\alpha + q_2\,sen\,\alpha = \frac{4}{5}q_1 + \frac{3}{5}q_2$$

$$v_1 = q_2\cos\alpha - q_1\,sen\alpha = \frac{4}{5}q_2 - \frac{3}{5}q_1$$

$$u_2 = q_4\cos\alpha + q_5\,sen\alpha = \frac{4}{5}q_4 + \frac{3}{5}\left(-\frac{3}{4}q_1 + q_2 + \frac{5}{4}L\,q_3 + \frac{3}{4}q_4\right)$$

$$u_2 = -\frac{9}{20}q_1 + \frac{3}{5}q_2 + \frac{3}{4}L\,q_3 + \frac{5}{4}q_4$$

Por ser el elemento transversalmente rígido las ordenadas axial y transversal de la elástica son:

$$u(x) = u_1 \ \phi_1(x) + u_2 \phi_2(x)$$
$$v(x) = v_1 + \theta_1 \ X$$

Reemplazando valores:

$$u(x) = \left(\frac{4}{5} q_1 + \frac{3}{5} q_2 \right) \left(1 - \frac{X}{L} \right) + \left(-\frac{9}{20} q_1 + \frac{3}{5} q_2 + \frac{3}{4} L \ q_3 + \frac{5}{4} q_4 \right) \frac{X}{L}$$
$$u(x) = \frac{4}{5} q_1 + \frac{3}{5} q_2 - \frac{5}{4} q_1 \frac{X}{L} + \frac{3}{L} X \ q_3 + \frac{5}{4} \frac{X}{L} q_4$$
$$v(x) = \left(\frac{4}{5} q_2 - \frac{3}{5} q_1 \right) + q_3 \ X$$

Finalmente para dibujar el estado de desplazamiento $q_2^* = 1$ y las demás coordenadas nulas se debe reemplazar la matriz $\boldsymbol{T}$ en:

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{T} \ \boldsymbol{q}^*$$
$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1^* \\ q_2^* \\ q_3^* \\ q_4^* \end{bmatrix}$$

Al desarrollar el producto matricial $\boldsymbol{T} \ \boldsymbol{q}^*$ e igualar al vector $\boldsymbol{q}$ se tiene.

$$q_1 = q_1^*$$
$$q_2 = q_1^* + q_2^*$$
$$q_3 = q_2^* + 2 \ q_3^*$$
$$q_4 = q_2^* + q_4^*$$

Si remplazamos $q_2^* = 1$ y las demás coordenadas nulas se encuentra:

$$q_1 = 0 \qquad q_2 = 1 \qquad q_3 = 1 \qquad q_4 = 1$$

Por consiguiente el diagrama elemental buscado es:

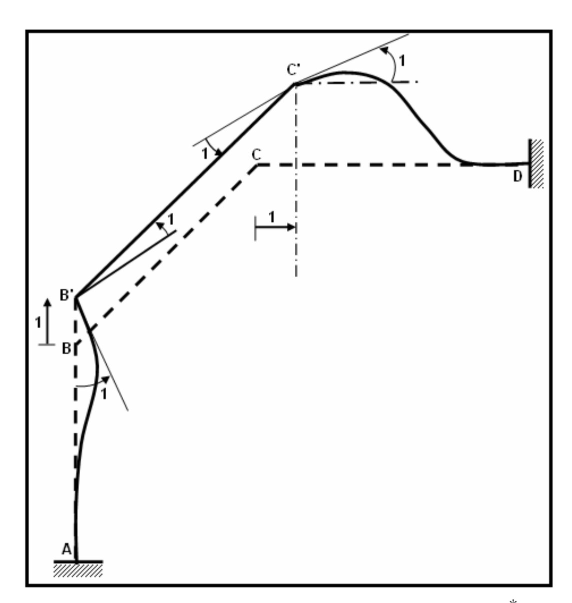


Figura 5.11.10 Deformada elemental q_2^*

- **EJEMPLO N.- 9**

Resolver el ejemplo 8 considerando el sistema de coordenadas indicado en la figura 5.12.1.

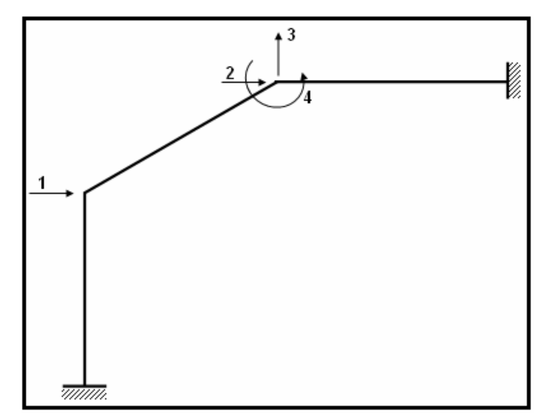


Figura 5.12.1 Nuevo sistema de coordenadas $Q - q$

❖ **Cálculo de Q por trabajos virtuales.**

▪ **Cálculo de Q_1**

$$\delta q_1 = 1 \quad y \quad \delta q_i = 0 \quad i \neq 1$$

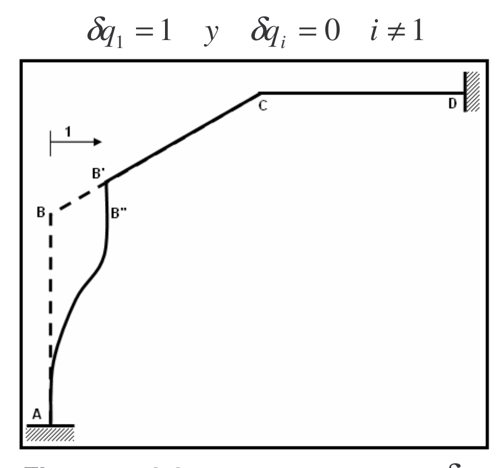


Figura 5.12.2 Deformada elemental δq_1

$$\cos\alpha = \frac{1}{u_1} \qquad u_1 = \frac{5}{4}$$

$$Q_1 = \int_0^L W_X \; u(x) \; dx + \int_0^L W_Y \; v(x) \; dx$$

$$u(x) = \frac{5}{4}\left(1 - \frac{X}{L}\right) \qquad v(x) = 0$$

$$Q_1 = \int_0^L -\frac{12}{25} W * \frac{5}{4}\left(1 - \frac{X}{L}\right) dx = -\frac{3}{5} W \left| X - \frac{X^2}{2L} \right|_0^L = -\frac{3}{5} W * \frac{L}{2} = -\frac{3}{10} WL$$

- **Cálculo de** Q_2

$$\delta q_2 = 1 \quad y \quad \delta q_i = 0 \quad i \neq 2$$

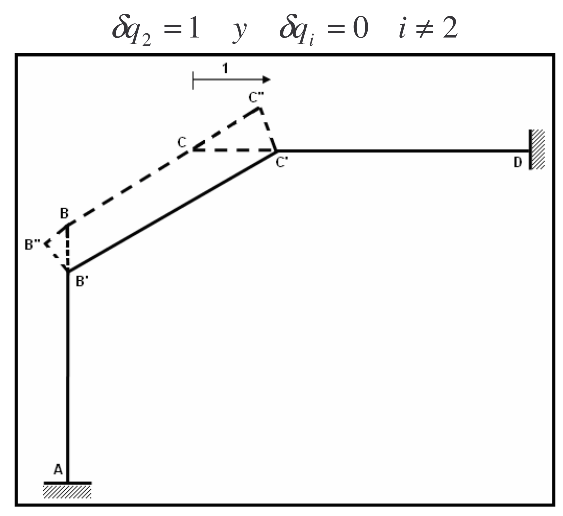
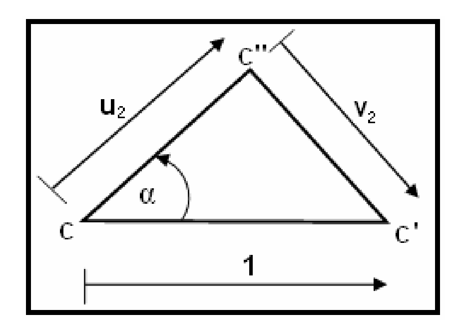


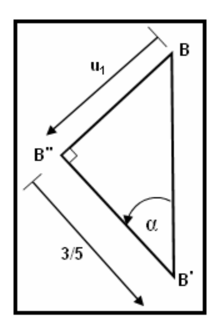
Figura 5.12.3 Deformada elemental δq_2



Triángulo CC'C''

$$u_2 = \cos \alpha = \frac{4}{5} \qquad\qquad v_2 = -sen\alpha = -\frac{3}{5}$$

C''C' es igual a B''B' porque el elemento BC es $I = \infty$



Triángulo BB'B''

$$tg \ \alpha = \frac{u_1}{\frac{3}{5}} \qquad \Rightarrow \qquad u_1 = \frac{9}{20}$$

Pero u_1 es negativo, luego:

$$u_1 = -\frac{9}{20} \qquad v_1 = -\frac{3}{5}$$

$$u(x) = -\frac{9}{20}\left(1 - \frac{X}{L}\right) + \frac{4}{5}\frac{X}{L} = \frac{5}{4}\frac{X}{L} - \frac{9}{20}$$

$$v(x) = -\frac{3}{5}$$

$$Q_2 = \int_0^L W_X\ u(x)\ dx + \int_0^L W_Y\ v(x)\ dx = \int_0^L -\frac{12}{25}W\left(\frac{5X}{4L} - \frac{9}{20}\right)dx + \int_0^L -\frac{16}{25}W\left(-\frac{3}{5}\right)dx$$

$$Q_2 = -\frac{12}{25}W\left|\frac{5X^2}{8L} - \frac{9X}{20}\right|_0^L + \frac{48}{125}W\left|X\right|_0^L = -\frac{12WL}{25}\left(\frac{25-18}{40}\right) + \frac{48WL}{125}$$

$$Q_2 = -\frac{21WL}{250} + \frac{48WL}{125} = WL\left(\frac{-21+96}{250}\right) = \frac{75}{250}WL = \frac{3}{10}WL$$

- **Cálculo de** Q_3

$$\delta q_3 = 1 \quad y \quad \delta q_i = 0 \quad i \neq 3$$

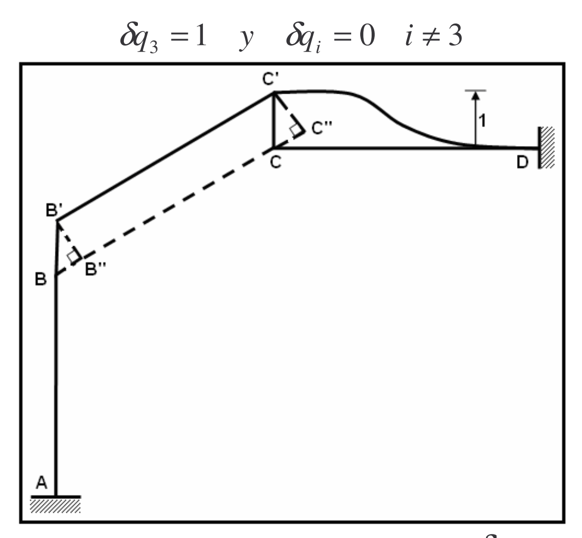
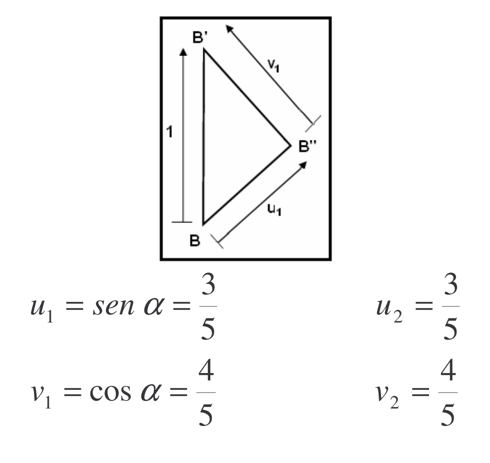


Figura 5.12.4 Deformada elemental δq_3

En la figura 5.12.4 se observa que el triángulo BB'B'' es igual al triángulo CC'C''. En consecuencia $u_1 = u_2$ y $v_1 = v_2$. Nótese que $\theta_1 = \theta_2 = 0$



$$u_1 = sen\ \alpha = \frac{3}{5} \qquad u_2 = \frac{3}{5}$$

$$v_1 = \cos\alpha = \frac{4}{5} \qquad v_2 = \frac{4}{5}$$

$$u(x) = \frac{3}{5}\left(1 - \frac{X}{L}\right) + \frac{3}{5}\frac{X}{L} = \frac{3}{5}$$

$$v(x) = v_1 + \theta_1\ X = \frac{4}{5}$$

$$Q_3 = \int_0^L W_X\ u(x)\ dx + \int_0^L W_Y\ v(x)\ dx = \int_0^L -\frac{12}{25}W\frac{3}{5}\ dx + \int_0^L -\frac{16}{25}W\left(\frac{4}{5}\right)dx$$

$$Q_3 = -\frac{12}{25}W\frac{3}{5}\left|X\right|_0^L - \frac{16}{25}W\frac{4}{5}\left|X\right|_0^L = -\frac{36}{125}WL - \frac{64}{125}WL = -\frac{4}{5}WL$$

- **Cálculo de** Q_4

$$\delta q_4 = 1 \quad y \quad \delta q_i = 0 \quad i \neq 4$$

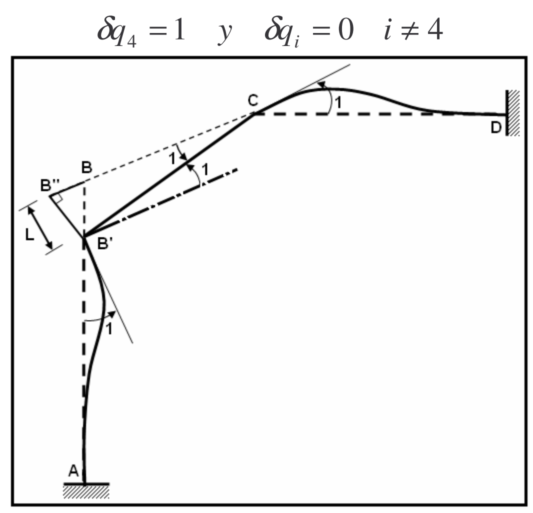
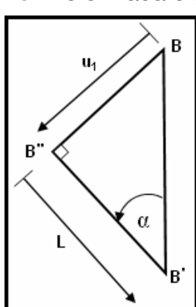


Figura 5.12.5 Deformada elemental δq_4



$$u_1 = -tg\alpha\ L = -\frac{3}{4}L \qquad v_1 = -L \qquad \theta_1 = 1$$

$$u(x) = -\frac{3}{4}L\left(1 - \frac{X}{L}\right) \qquad v(x) = -L + X$$

$$Q_4 = \int_0^L W_X\ u(x)\ dx + \int_0^L W_Y\ v(x)\ dx = \int_0^L -\frac{12}{25}W\left[-\frac{3}{4}L\left(1 - \frac{X}{L}\right)\right]dx + \int_0^L -\frac{16}{25}W(-L + X)\ dx$$

$$Q_4 = \frac{36}{100}WL\left|X - \frac{X^2}{2L}\right|_0^L - \frac{16}{25}W\left|-LX + \frac{X^2}{2}\right|_0^L = \frac{36}{200}WL^2 + \frac{16}{50}WL^2 = \frac{WL^2}{2}$$

$$\boldsymbol{Q} = \frac{WL}{10}\begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ -8 \\ 5L \end{bmatrix}$$

❖ **Cálculo de Q por problema primario y complementario**

▪ **Problema Primario**

En la figura 5.12.6 se presenta el Problema Primario que debe cumplir la condición de que el vector de coordenadas generalizadas $q = \mathbf{0}$. Para ello se necesitan fuerzas de fijación R que son de sentido contrario al de las coordenadas que se quiere que sean nulas.

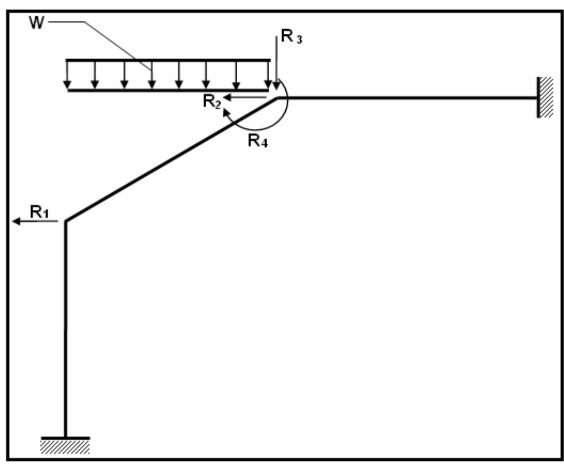
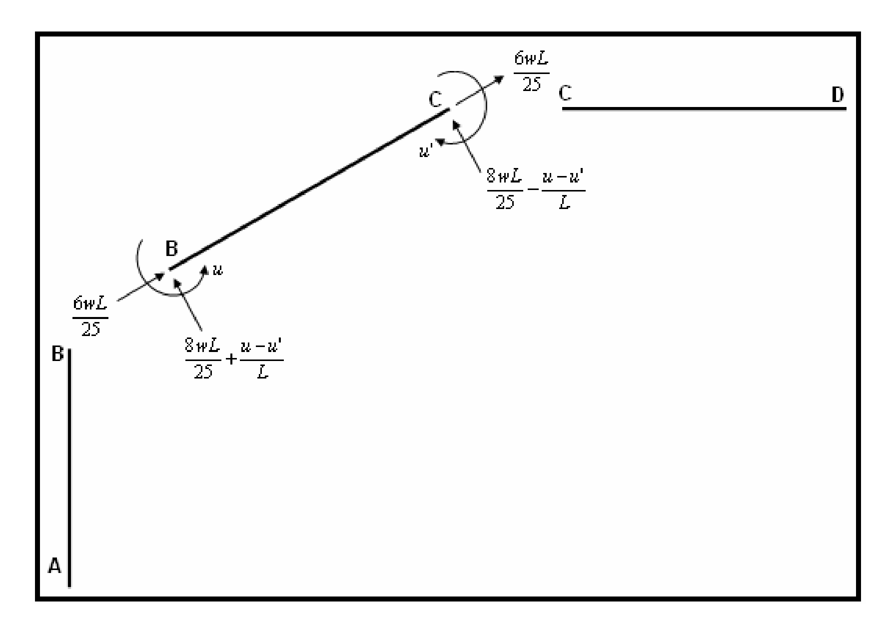


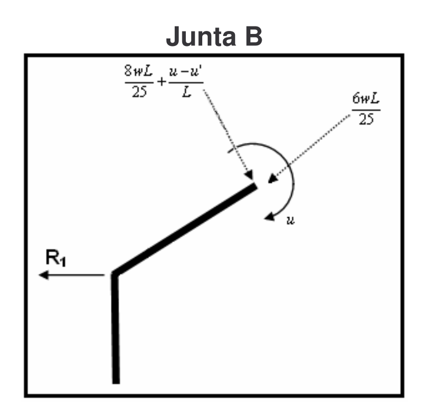
Figura 5.12.6 Problema Primario **q=0**

o **Equilibrio de elementos**



o **Equilibrio de juntas**

Junta B

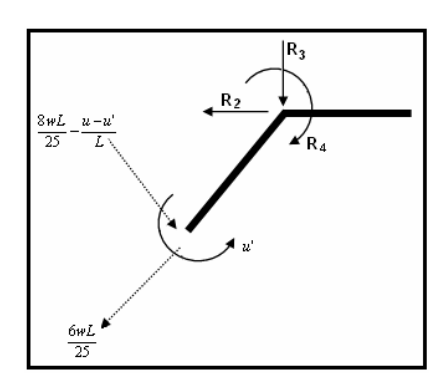


$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{8}{25} WL + \frac{\mu - \mu'}{L} \right) sen\alpha - \frac{6}{25} WL \cos\alpha - R_1 = 0$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{8}{25} WL + \frac{\mu - \mu'}{L} \right) \cos\alpha + \frac{6}{25} WL \; sen\alpha = 0$$

$$\sum M = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = 0$$

Junta C



$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{8}{25} WL - \frac{\mu - \mu'}{L} \right) sen\alpha - \frac{6}{25} WL \cos\alpha - R_2 = 0$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{8}{25} WL - \frac{\mu - \mu'}{L} \right) \cos\alpha + \frac{6}{25} WL \; sen\alpha + R_3 = 0$$

$$\sum M = 0 \quad \Rightarrow \quad R_4 - \mu' = 0$$

De la solución de las ecuaciones se obtiene:

$$R_1 = -\frac{3}{10} WL \qquad R_2 = \frac{3}{10} WL$$

$$R_3 = -\frac{4}{5} WL \qquad R_4 = \frac{WL^2}{2}$$

$$\mu = 0 \qquad \mu' = \frac{WL^2}{2}$$

- **Problema Complementario**

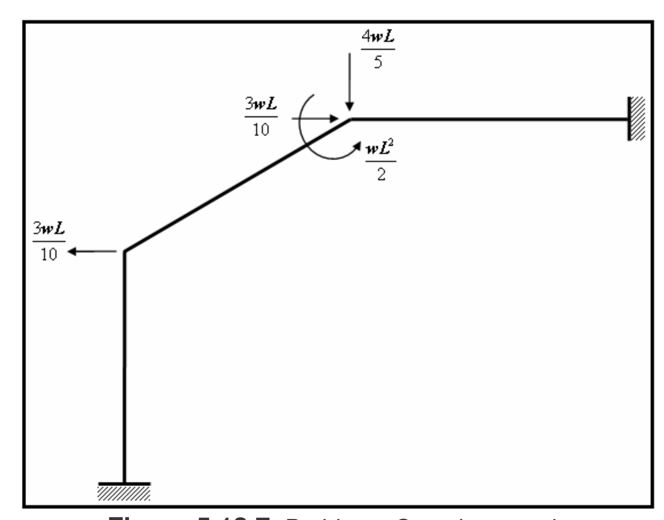
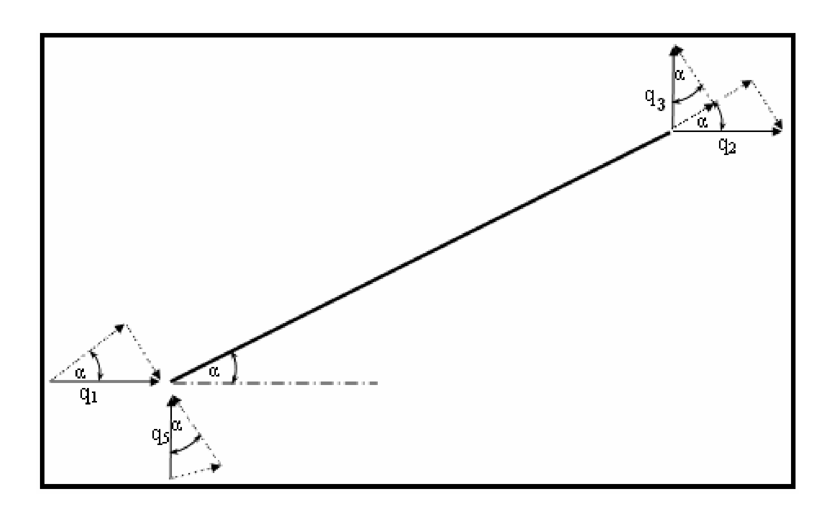


Figura 5.12.7 Problema Complementario

$$\boldsymbol{Q} = \frac{WL}{10}\begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ -8 \\ 5L \end{bmatrix}$$

Para encontrar las expresiones de la elástica $u(x)$ y $v(x)$ del elemento BC. En este caso se necesita conocer el desplazamiento vertical del nudo B. A este desplazamiento se va a denominar q_5. El cálculo se realiza aplicando el principio de superposición en cada una de las deformadas elementales, es así como de la figura 5.12.2 se obtiene que el corrimiento vertical de B vale $\frac{3}{4}q_1$. De la figura 5.12.3 se tiene que el desplazamiento vertical de B es negativo y vale $-\frac{3}{4}q_2$. En la figura 5.12.4 se aprecia que este desplazamiento es igual a q_3. Finalmente en la figura 5.12.5 se halla que el desplazamiento vale $-\frac{5}{4}L\,q_4$. Por lo tanto:

$$q_5 = \frac{3}{4}q_1 - \frac{3}{4}q_2 + q_3 - \frac{5}{4}L\ q_4$$



$$u_1 = q_1 \cos\alpha + q_5 sen\,\alpha = \frac{4}{5}q_1 + \frac{3}{5}q_5$$

$$u_1 = \frac{4}{5}q_1 + \frac{3}{5}\left[\frac{3}{4}q_1 - \frac{3}{4}q_2 + q_3 - \frac{5}{4}L\,q_4\right] = \frac{4}{5}q_1 + \frac{9}{20}q_1 - \frac{9}{20}q_2 + \frac{3}{5}q_3 - \frac{3}{4}L\,q_4$$

$$u_1 = \frac{5}{4}q_1 - \frac{9}{20}q_2 + \frac{3}{5}q_3 - \frac{3}{4}L\,q_4$$

$$v_1 = q_5 \cos\alpha - q_1 sen\,\alpha = \frac{4}{5}q_5 - \frac{3}{5}q_1 = \frac{4}{5}\left[\frac{3}{4}q_1 - \frac{3}{4}q_2 + q_3 - \frac{5}{4}L\,q_4\right] - \frac{3}{5}q_1$$

$$v_1 = -\frac{3}{5}q_2 + \frac{4}{5}q_3 - L\,q_4$$

$$u_2 = q_2 \cos\alpha + q_3 sen\,\alpha = \frac{4}{5}q_2 + \frac{3}{5}q_3$$

Las expresiones de la elástica resultan:

$$u(x)=u_1\phi_1(x)+u_2\phi_4(x)=u_1\left(1-\frac{X}{L}\right)+u_2\,\frac{X}{L}$$

$$u(x)=\left(\frac{5}{4}q_1-\frac{9}{20}q_2+\frac{3}{5}q_3-\frac{3}{4}L\,q_4\right)\left(1-\frac{X}{L}\right)+\left(\frac{4}{5}q_2+\frac{3}{5}q_3\right)\frac{X}{L}$$

$$u(x)=\frac{5}{4}q_1-\frac{9}{20}q_2+\frac{3}{5}q_3-\frac{3}{4}L\,q_4-\frac{5X}{4L}q_1+\frac{9X}{20L}q_2-\frac{3X}{5L}q_3+\frac{3X}{4}\,q_4+\frac{4X}{5L}q_2+\frac{3X}{5L}q_3$$

$$u(x)=\frac{5}{4}q_1-\frac{9}{20}q_2+\frac{3}{5}q_3-\frac{3}{4}L\,q_4-\frac{5X}{4L}q_1+\frac{5X}{4L}q_2+\frac{3X}{4}\,q_4$$

$$v(x)=v_1+\theta_1\;X=-\frac{3}{5}q_2+\frac{4}{5}q_3-L\,q_4+q_4X$$

Ahora se tiene que :

$$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{T}\;\boldsymbol{q}^*$$

$$\begin{bmatrix}q_1\\q_2\\q_3\\q_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&1&2&0\\0&1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1^*\\q_2^*\\q_3^*\\q_4^*\end{bmatrix}$$

Al desarrollar el producto matricial $\boldsymbol{T}\;\boldsymbol{q}^*$ e igualar al vector $\boldsymbol{q}$ se tiene.

$$q_1=q_1^*$$
$$q_2=q_1^*+q_2^*$$
$$q_3=q_2^*+2\,q_3^*$$
$$q_4=q_2^*+q_4^*$$

Si remplazamos $q_2^*=1$ y las demás coordenadas nulas se encuentra:

$$q_1=0 \qquad q_2=1 \qquad q_3=1 \qquad q_4=1$$

Son los mismos valores del ejercicio anterior pero la deformada elemental buscada es diferente ya que las coordenadas son diferentes. Esta deformada se presenta en la figura 5.12.9

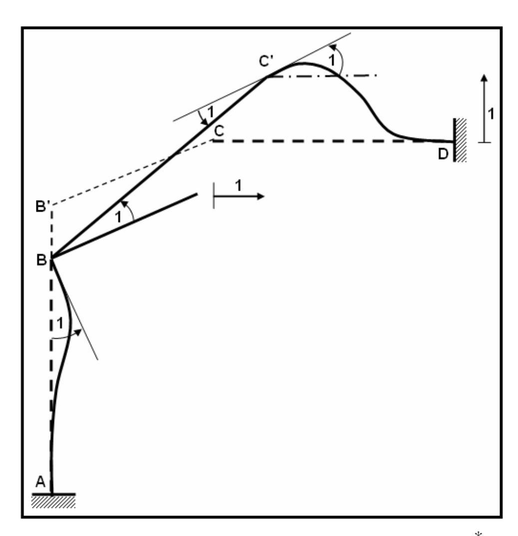


Figura 5.12.9 Deformada elemental q_1^*

- **EJEMPLO N.- 10**

La estructura mostrada en la figura 5.11.1 que se repite en este ejercicio ha sido resuelta en el ejemplo 8 con el sistema de coordenadas $Q-q$ que se indica en la figura 5.11.3 y el vector de cargas generalizadas Q que se obtuvo es el que se indica a continuación. En el ejemplo 9 este ejercicio fue resuelto con el sistema de coordenadas que se va a denominar Q^*-q^*, y que e indica en la figura 5.12.1.

$$Q=\frac{WL}{10}\begin{bmatrix}3\\-8\\-5L\\-3\end{bmatrix}$$

Con esta nueva notación para los sistemas de coordenadas generalizadas se desea encontrar:

a. La matriz de transformación de coordenadas T tal que $q=T\,q^*$.

b. Encontrar el vector de cargas generalizadas Q^*. Empleando la siguiente ecuación $Q^*=T^t\,Q$.

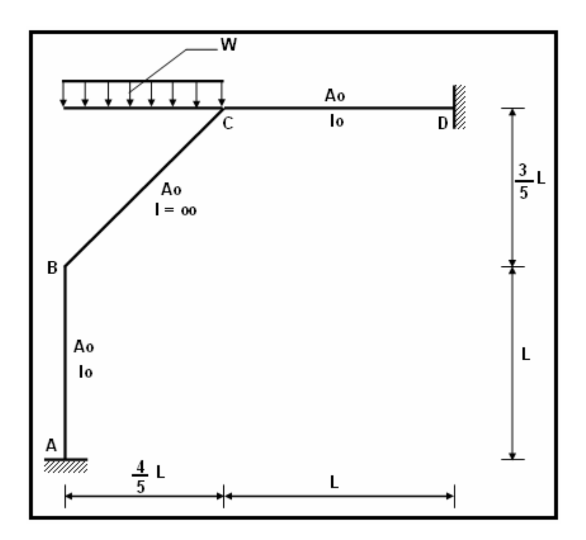


Figura 5.11.1

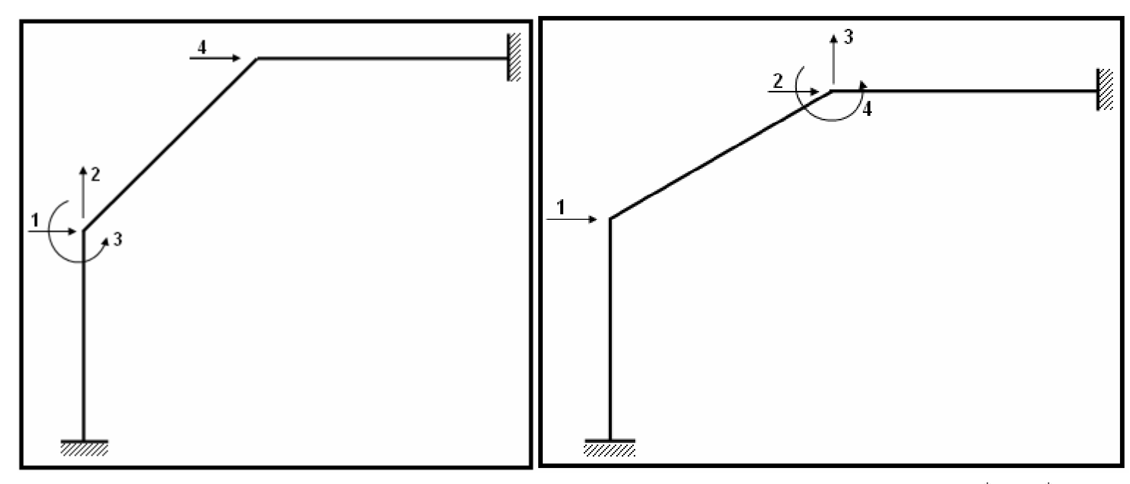


Figura 5.11.3 Sistema $Q-q$. **Figura 5.12.1** Sistema Q^*-q^*

- **SOLUCIÓN**

En base a las deformadas elementales indicadas en las figuras 5.12.2 a 5.12.5 se obtienen los elementos de la matriz $\boldsymbol{T}$. Con la figura 5.12.2 se obtienen los elementos de la primera columna de $\boldsymbol{T}$, con la figura 5.12.3 la segunda columna de $\boldsymbol{T}$, etc. La matriz que se obtiene es:

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & 1 & -\frac{5}{4}\boldsymbol{L} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El vector de cargas generalizadas $\boldsymbol{Q}^*$ resulta:

$$\boldsymbol{Q}^* = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{4}L & 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{WL}{10} \begin{bmatrix} 3 \\ -8 \\ -5L \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{WL}{10} \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ -8 \\ 5L \end{bmatrix}$$

El vector $\boldsymbol{Q}^*$ como tenía que ser es el mismo que se obtuvo en el ejemplo 9.

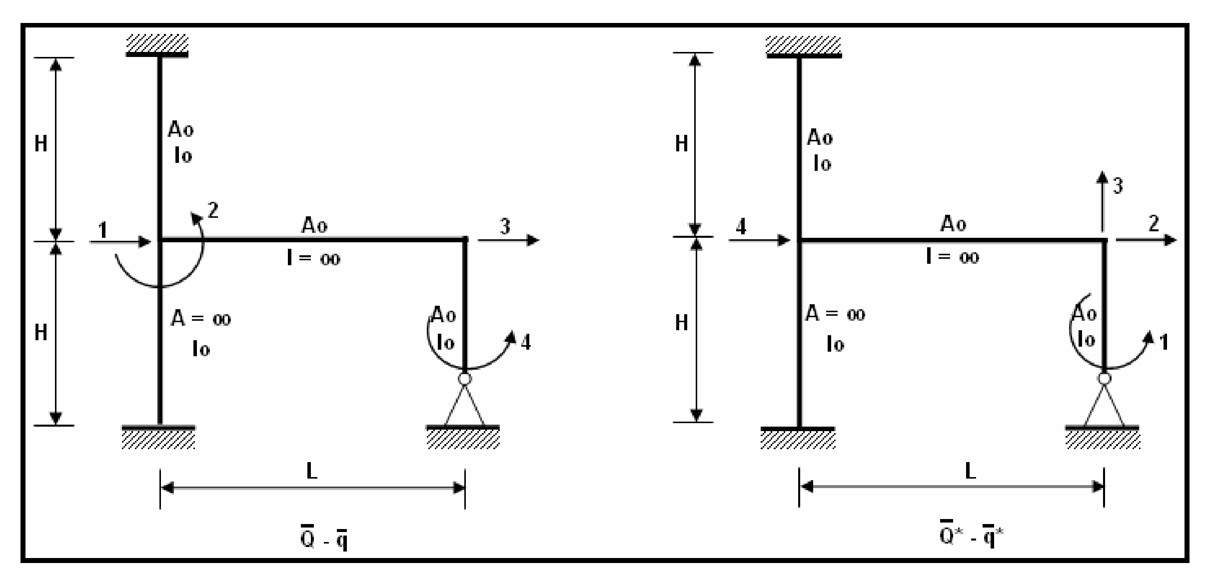
5.7 EJERCICIOS PROPUESTO

Dados los sistemas $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{q}$ y $\boldsymbol{Q}^* - \boldsymbol{q}^*$ en los ejercicios 1, 2 y 3. Se pide calcular:

i) La matriz $\boldsymbol{T}$, tal que $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{T}\ \boldsymbol{q}^*$.

ii) La matriz $\boldsymbol{T}_1$, tal que $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{T}_1\ \boldsymbol{Q}^*$.

iii) Comprobar que $\boldsymbol{T}^t = \boldsymbol{T}_1^{-1}$

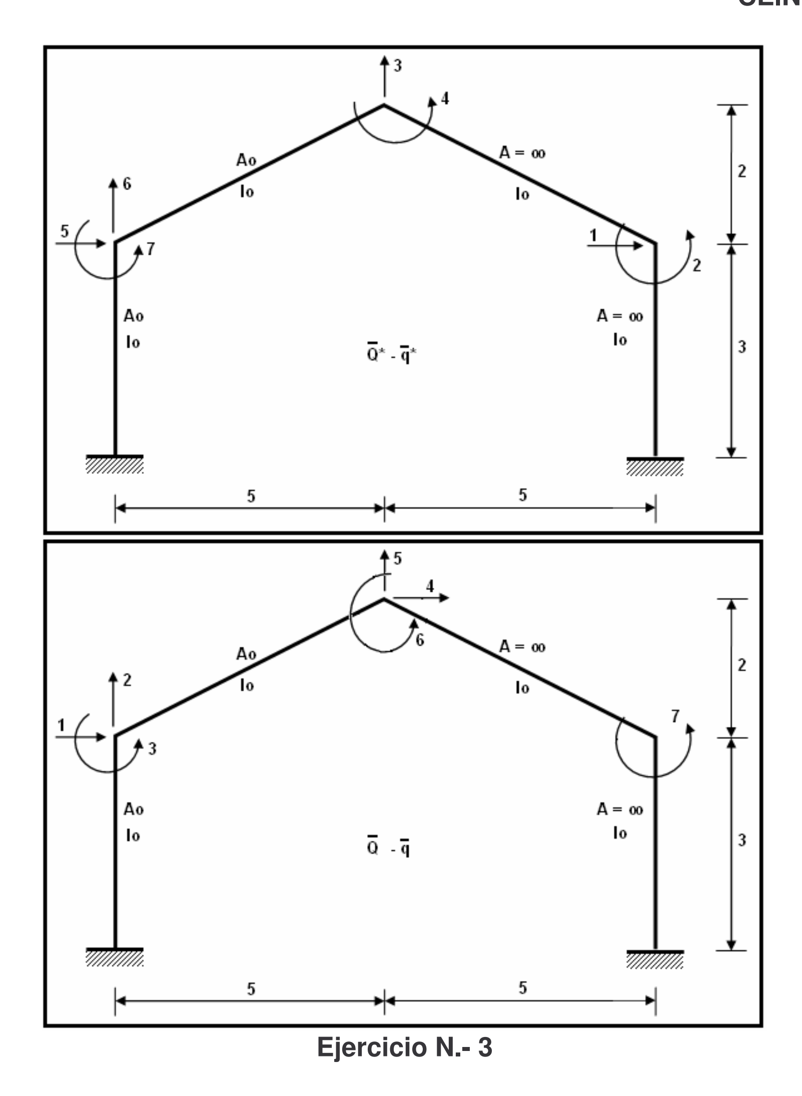


Ejercicio N.- 1

1
Ao
I = oo
2
A = oo
Io
4
A = oo
Io
A = oo
Io
3
A = oo
Io
4L/5
L
L
3L/5
Q̄ - q̄

1
3
Ao
I = oo
A = oo
Io
2
A = oo
Io
A = oo
Io
4
A = oo
Io
4L/5
L
L
3L/5
Q̄* - q̄*

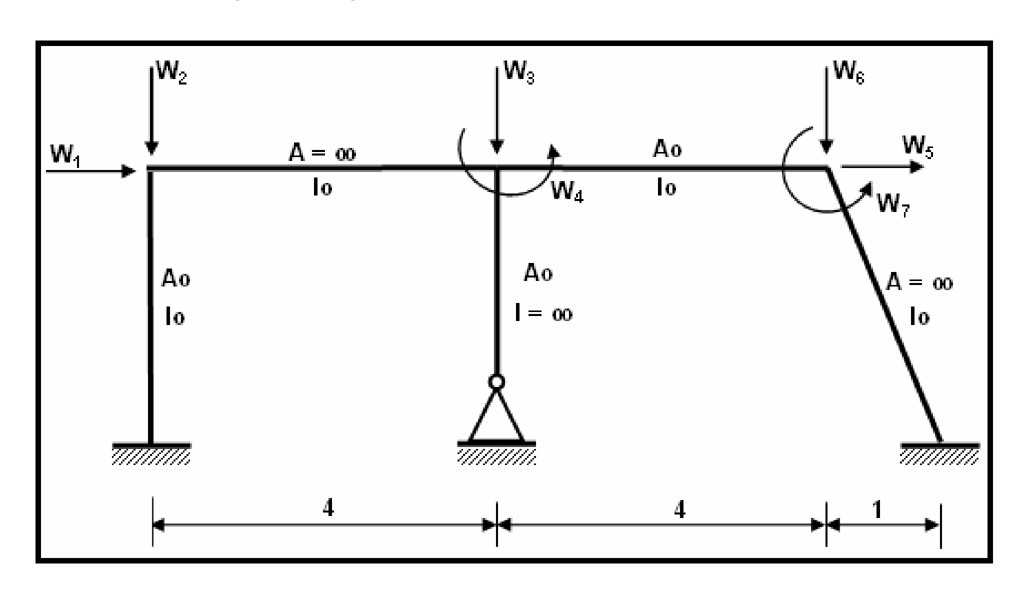
Ejercicio N.- 2



Ejercicio N.- 3

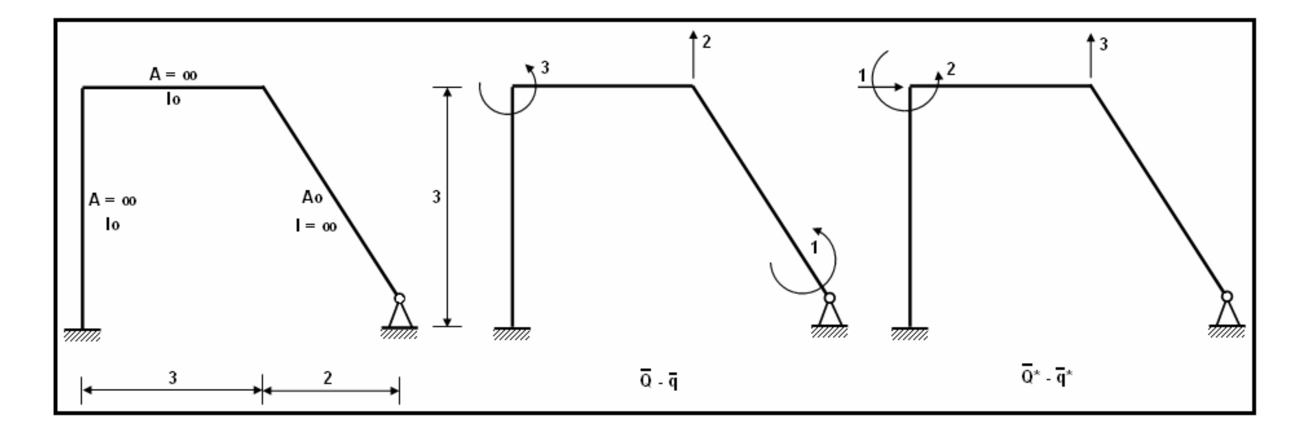
Ejercicio N.- 4

Si sobre la estructura de la figura 5.8.1 actúa el sistema de cargas presentado a continuación. Se pide calcular los vectores de cargas generalizadas $\boldsymbol{Q}$ y $\boldsymbol{Q}^{*}$ para los sistemas de coordenadas presentados en las figuras 5.8.2 y 5.8.3. Comprobar el resultado obtenido utilizando la matriz $\boldsymbol{T}$ del ejemplo 5, si se sabe que $\boldsymbol{Q}^{*} = \boldsymbol{T}^{t}\ \boldsymbol{Q}$.



Ejercicio N.- 5

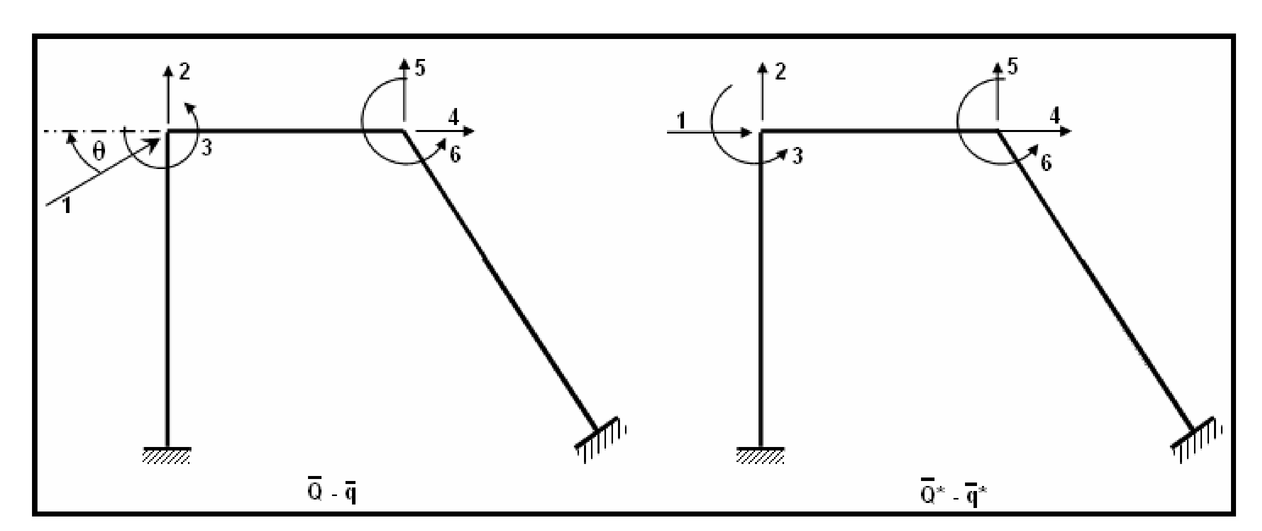
Para el pórtico plano de la figura 5.2.1 se desea calcular la relación inversa que existe entre las coordenadas generalizadas. Por consiguiente ahora se tiene:



Calcular la matriz $\boldsymbol{T}$ tal que $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{T}\,\boldsymbol{q}^*$.

Ejercicio N.- 6

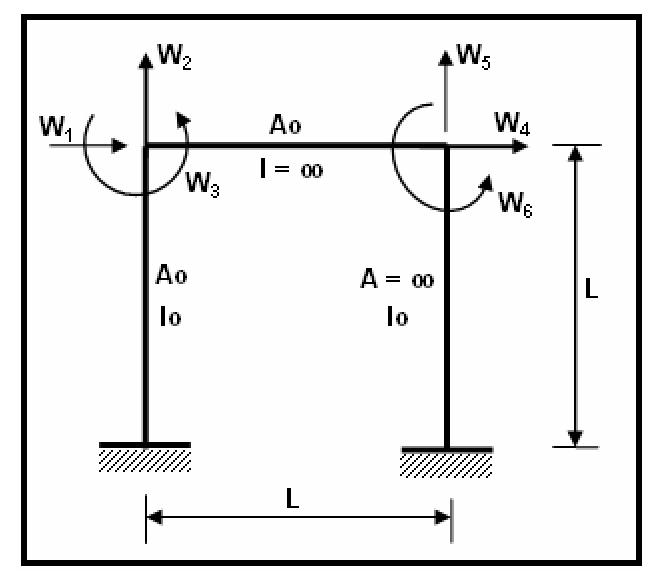
Para la siguiente estructura compuesta por elementos totalmente flexibles se dan dos sistemas de coordenadas generalizados, el primero difiere del segundo en la coordenada uno, está inclinado un ángulo θ con respecto a la horizontal. Se pide calcular la matriz $\boldsymbol{T}$ tal que $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{T}\,\boldsymbol{q}^*$.



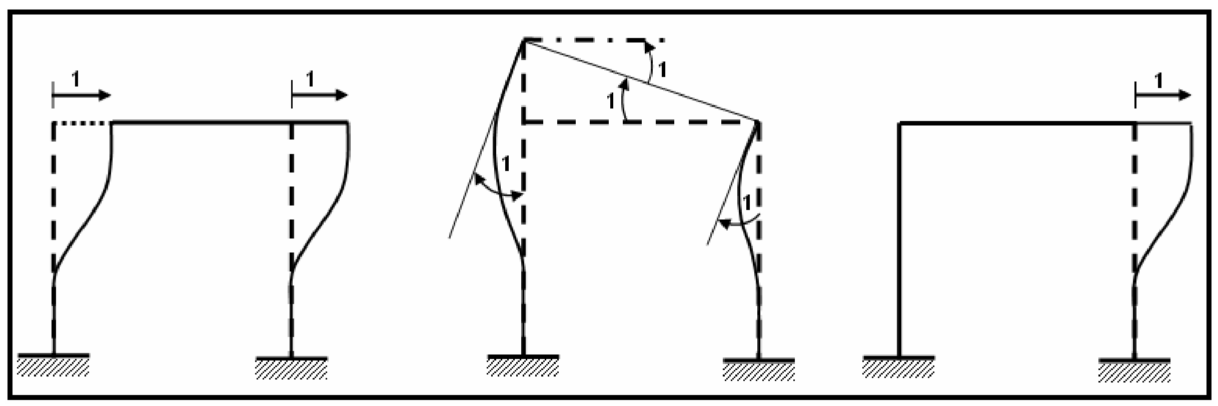
Ejercicio N.- 7

Las siguientes figuras muestran una estructura y las fuerzas externas que actúan, así como los diagramas de deformación elementales, para un determinado sistema de coordenadas. Calcular:

i) El vector de cargas generalizadas $\boldsymbol{Q}$.
ii) Dibujar los diagramas de cargas elementales.
iii) Interpretar geométricamente cada una de las componentes de $\boldsymbol{q}$.



Estado de carga



Deformada elemental q_1 Deformada elemental q_2 Deformada elemental q_3

Ejercicio N.- 8

Elaborar un programa de computación para obtener el vector de cargas generalizadas Q en el que se da como dato el vector de empotramiento perfecto en coordenadas locales para los elementos cargados.

Ejercicio N.- 9

Elaborar un programa de computación para encontrar el vector de cargas generalizadas Q para un pórtico plano con elementos ortogonales, si sobre los elementos horizontales actúan cargas triangulares y trapezoidales. El programa deberá calcular las acciones de empotramiento perfecto.

CAPITULO 6

RELACIÓN ENTRE CARGAS Y DESPLAZAMIENTOS GENERALIZADOS. ESTUDIO DE LAS DEFORMACIONES

RESUMEN

Los objetivos que se persiguen en el presente capítulo son los siguientes:

1) Presentar conceptos básicos sobre la matriz de rigidez K y de flexibilidad F de una estructura. No interesa por ahora saber como se calcula sino más bien el significado físico de sus elementos.

2) Presentar algunos modelos numéricos para el estudio de las deformaciones de los elementos lineales de un marco plano.

3) Realizar ejercicios que refuercen lo estudiado en éste capítulo, como en los capítulos 1 y 5, en lo referente a:

   - Definir las coordenadas generalizadas en marcos planos con elementos axial y transversalmente rígidos.

   - Presentar el cálculo de matrices de transformación de coordenadas en elementos que se usarán en los capítulos posteriores.

   Todo esto en función de la teoría que se indica en éste capítulo.

6. 1 MATRIZ DE RIGIDEZ

6.1.1 Relación entre $Q - q$

Dado un pórtico cualquiera como por ejemplo el de la figura 6.1 en el cual se han definido un sistema de coordenadas $Q - q$. Se va a establecer una relación entre el vector de cargas generalizadas Q y el vector de desplazamientos generalizados q.

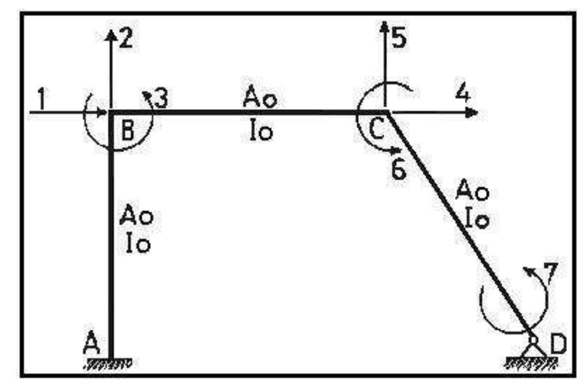


Figura 6.1 Sistema $Q - q$

La relación entre Q y q se consigue por medio de la matriz de rigidez K de la siguiente manera:

$$Q = K\ q \qquad (6.1)$$

Se ha establecido una relación lineal entre Q y q. Esto implica lo siguiente:

- Que el material cumple con la ley de Hooke en sus tres dimensiones.
- Que las deformaciones son pequeñas, entonces se podrá aplicar la teoría de los desplazamientos infinitésimos.
- No existe interacción entre los efectos axiales y de flexión en los elementos. Es decir se estudia la teoría de primer orden.

Cuando se cumple con los tres requisitos indicados se dice también que la estructura es linealmente elástica o que trabaja en el rango elástico y se puede aplicar el principio de superposición. En el capítulo 5 se ha aplicado este principio en la solución de los ejemplos 8 y 9.

En la ecuación (6.1) se tiene que la matriz de rigidez es de orden (n x n) , donde n es el número de grados de libertad de la estructura. Si Q es un vector de n filas y q es otro vector de n elementos la ecuación (6.1) puede escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ .... \\ .... \\ Q_i \\ ..... \\ ..... \\ Q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & .... & .... & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & .... & .... & K_{2n} \\ .... & .... & .... & .... & .... \\ .... & .... & .... & .... & .... \\ K_{i1} & K_{i2} & .... & .... & K_{in} \\ .... & .... & .... & .... & .... \\ .... & .... & .... & .... & .... \\ K_{n1} & K_{n2} & .... & .... & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ ... \\ ... \\ q_i \\ ... \\ ... \\ q_n \end{bmatrix}$$

De donde un término cualquiera Q_i es igual a :

$$Q_i = K_{i1}\ q_1 + K_{i2}\ q_2 + ... \qquad .... + K_{in}\ q_n$$

Al examinar esta última ecuación se observa que K_{i1}, por ejemplo, es el valor de la carga Q_i correspondiente al estado de desplazamiento $q_1 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 1$. Es decir K_{i1} es el valor de Q_i en la deformada elemental q_1. La expresión anterior puede escribirse de la siguiente manera:

$$Q_i = \sum_{j=1}^{n} K_{ij} \; q_j$$

En general se tendrá que un elemento cualquiera K_{ij} es el valor de la carga generalizada Q_i correspondiente a la deformada elemental q_j.

Para el pórtico plano de la figura 6.1 se tiene que la matriz de rigidez K es de (7 x 7). La notación de los grados de libertad de la figura 6.1 es la que se ha venido utilizando en el libro y se seguirá utilizando sin embargo es necesario que el lector conozca que se puede numerar los grados de libertad considerando como grado de libertad a los apoyos aunque sea este empotramiento y en este caso se tendrá la notación indicada en la figura 6.2.

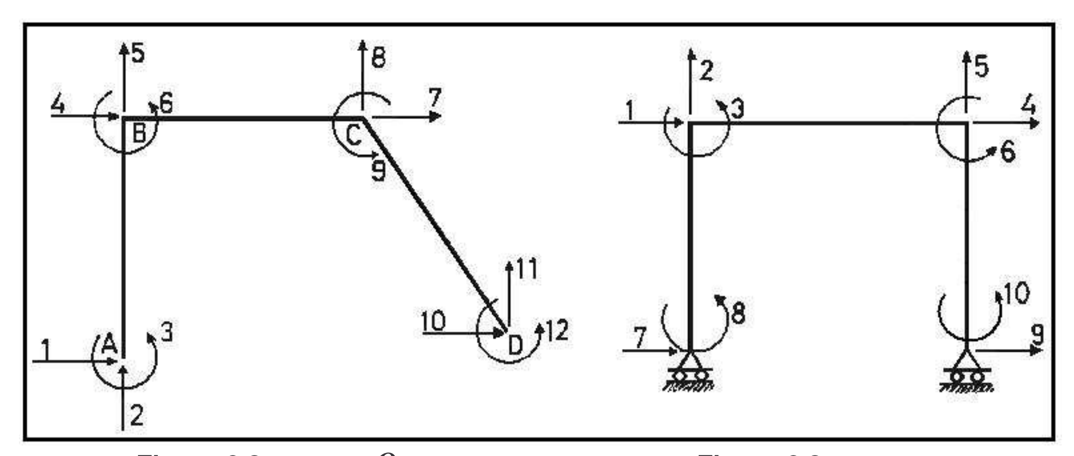


Figura 6.2 Sistema $Q - q$ **Figura 6.3** Estructura Inestable

En estas condiciones la matriz de rigidez es de (12 x 12) y es singular, por consiguiente su determinante es igual a cero. El rango de la matriz K es 9. Esto significa que en la relación (6.1) no se consiguen 12 ecuaciones independientes sino únicamente nueve ya que tres son dependientes y estas son:

$$1^{ra} \; Ec + 4^{ta} \; Ec + 7^{ma} \; Ec + 10^{ma} \; Ec = 0$$

$$2^{da} \; Ec + 5^{ta} \; Ec + 8^{va} \; Ec + 11^{va} \; Ec = 0$$

Se deja al lector que indique cual es la tercera ecuación (Ec) dependiente. Estas se han obtenido haciendo equilibrio es decir:

$$\sum F_X = 0 \qquad \sum F_Y = 0 \qquad \sum M = 0$$

En resumen, el pórtico de la figura 6.2 si tiene matriz de rigidez ya que es posible construir las respectivas deformadas elementales y encontrar el sistema de cargas generalizadas correspondiente. Lo que no es posible obtener es que su determinante sea diferente de cero. Su determinante es cero. Conviene utilizar el sistema de coordenadas de la figura 6.2 cuando se tienen desplazamientos en los apoyos.

Por otra parte al estudiar la estructura indicada en la figura 6.3 constituida por elementos totalmente flexibles se observa que la matriz de rigidez es de (10 x 10) pero el rango de la misma es 9. Esto se debe a que hay una ecuación dependiente.

$$1^{ra}\ Ec + 4^{ta}\ Ec + 7^{ma}\ Ec + 9^{na}\ Ec = 0$$

Las estructuras de las figuras 6.2 y 6.3 son inestables.

6.1.2 Características de la matriz de rigidez

Las principales características de la matriz de rigidez en estructuras estables, son las siguientes:

1. El valor del determinante es diferente de cero y positivo por consiguiente $\boldsymbol{K}$ es regular.
2. Los términos de la diagonal son todos positivos.
3. La matriz es cuadrada.
4. $\boldsymbol{K}$ es simétrica con respecto a la diagonal.

Para demostrar esta última característica se va a calcular la matriz de rigidez en la estructura de la figura 6.4.1, compuesta por elementos totalmente flexibles.

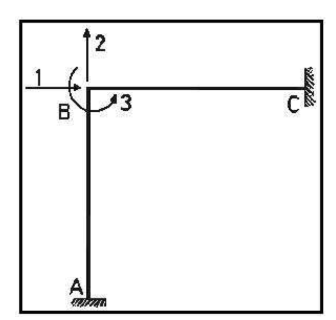


Figura 6.4.1 Sistema $\boldsymbol{Q-q}$

Para el presente ejemplo la matriz de rigidez tendrá la siguiente configuración:

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix}$$

- Primera columna de la matriz de rigidez

$$q_1 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 1$$

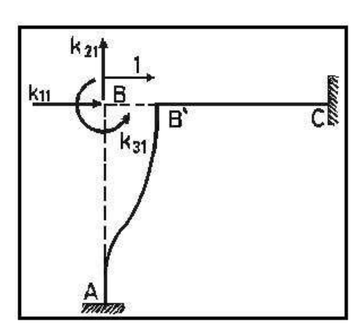


Figura 6.4.2 Elementos de la primera columna de $\boldsymbol{K}$. Sistema A.

Las fuerzas necesarias para producir la deformada de la figura 6.4.2 son K_{11} fuerza horizontal en el nudo B, K_{21} fuerza vertical en el nudo B y K_{31} momento en el nudo B. Estas cargas se determinan utilizando la teoría de estructuras que se verá posteriormente.

- Primera columna de la matriz de rigidez

$$q_2 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 2$$

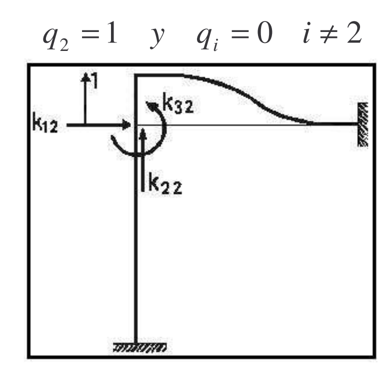


Figura 6.4.3 Elementos de la segunda columna de $\boldsymbol{K}$. Sistema B.

De igual forma $K_{12}, K_{22}\ y\ K_{32}$ son las cargas necesarias aplicadas en el nudo B para tener la deformada elemental q_2. Para obtener los elementos de la tercera columna de $\boldsymbol{K}$ se procede en forma similar en la deformada elemental q_3.

El problema que se tiene es demostrar que la matriz de rigidez $\boldsymbol{K}$ es simétrica, para lo cual basta con demostrar que la fuerza K_{12} es igual a la fuerza K_{21}.

Aplicando el teorema de E. Betti se tiene que el trabajo virtual de las fuerzas que actúan en el sistema A de la figura 6.4.2 sobre los desplazamientos del sistema B mostrado en la figura 6.4.3, TV_{A-B}. Es igual al trabajo virtual de las fuerzas que actúan en el sistema B sobre los desplazamientos virtuales del sistema A, a este trabajo virtual se denomina TV_{B-A}

$$TV_{A-B} = K_{11} * 0 + K_{21} * 1 + K_{31} * 0 = K_{21} * 1 = K_{21}$$
$$TV_{B-A} = K_{12} * 1 + K_{22} * 0 + K_{32} * 0 = K_{12} * 1 = K_{12}$$

Como se tiene que $TV_{A-B} = TV_{B-A}$ se concluye que $K_{12} = K_{21}$ que era lo que se quería demostrar.

Finalmente debe indicarse que la matriz de rigidez transforma los desplazamientos en cargas y para que esto exista los desplazamientos deben ser independientes.

6.2 MATRIZ DE FLEXIBILIDAD

6.2.1 Relación entre $q - Q$

Ahora se desea establecer una expresión lineal para las coordenadas generalizadas $\boldsymbol{q}$ que contiene desplazamientos y giros en función de las cargas generalizadas $\boldsymbol{Q}$ que contiene momentos y fuerzas, mediante la matriz de flexibilidad $\boldsymbol{F}$, la misma que será de orden (n x n) siendo n el número de grados de libertad de la estructura. Dicha relación es:

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{F}\ \boldsymbol{Q} \tag{6.2}$$

Nótese nuevamente que se está considerando que el modelo es lineal es decir es valido para el rango elástico. Al desarrollar la ecuación (6.2) se tiene:

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ q_i \\ \cdots \\ \cdots \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & \cdots & f_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{i1} & f_{i2} & \cdots & \cdots & f_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ Q_i \\ \cdots \\ \cdots \\ Q_n \end{bmatrix}$$

De donde un término cualquiera q_i es igual a:

$$q_i = f_{i1}\ Q_1 + f_{i2}\ Q_2 + \ldots \qquad \ldots + f_{in}\ Q_n$$

Expresando en forma de sumatoria se tiene:

$$q_i = \sum_{j=1}^{n} f_{ij}\ Q_j$$

Por consiguiente f_{ij} es el valor de la coordenada q_i que corresponde al estado de cargas $\boldsymbol{Q}_j = 1$ ***y*** $\boldsymbol{Q}_i = 0$ $\boldsymbol{i \neq j}$. La primera columna de la matriz de flexibilidad será el vector de coordenadas $\boldsymbol{q}$ para el estado de cargas $Q_1 = 1$ y las demás nulas. Para la segunda columna de $\boldsymbol{F}$ habrá que encontrar el vector $\boldsymbol{q}$ para el estado de cargas $Q_2 = 1$ y las restantes nulas, etc. De tal manera que los elementos de la matriz de flexibilidad tienen unidades de desplazamientos y giros.

La matriz de flexibilidad $\boldsymbol{F}$ existe únicamente en estructuras estables. Por lo tanto no existe matriz de flexibilidad para las estructuras indicadas en las figuras 6.2 y 6.3.

Al aplicar el teorema de los efectos recíprocos de Maxwel que dice: *En una estructura linealmente elástica, el desplazamiento i debido a una fuerza unitaria j es igual al desplazamiento correspondiente j debido a una fuerza unitaria i* o $q_{ij} = q_{ji}$. Al desplazamiento i se le llama grado de libertad i. Mediante este teorema se puede demostrar que la matriz de flexibilidad es simétrica.

Por otra parte todos los términos de la diagonal son positivos. Finalmente se indica que si $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{F}\ \boldsymbol{Q}$ es indispensable que el vector $\boldsymbol{Q}$ sea independiente.

6.2.2 Relación entre F y K

En este apartado se estudia la relación que existe entre la matriz de flexibilidad y la matriz de rigidez de una estructura. Para el efecto se conoce que:

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{K}\ \boldsymbol{q}$$
$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{F}\ \boldsymbol{Q}$$

Al reemplazar ésta última ecuación se tiene:

$$Q = K\ F\ Q$$

Al utilizar la matriz unitaria I se tiene que:

$$Q = I\ Q$$

De donde:

$$I\ Q = K\ F\ Q$$

Como ésta igualdad se cumple para cualquier valor de Q . Se concluye que:

$$K\ F = I \qquad\qquad F\ K = I$$

En consecuencia:

$$K = F^{-1} \qquad\qquad F = K^{-1}$$

La matriz de rigidez es la inversa de la matriz de flexibilidad o viceversa. Se hace hincapié en que la matriz de rigidez siempre existe en cambio la matriz de flexibilidad existe únicamente en estructuras estables. Por lo tanto habrá ocasiones en que K^{-1} no existe.

- **EJEMPLO N.- 1**

En la estructura de la figura 6.5.1, cuyos elementos son totalmente flexibles. Se pide presentar el significado físico de los elementos de la primera columna de las matrices de rigidez y de flexibilidad.

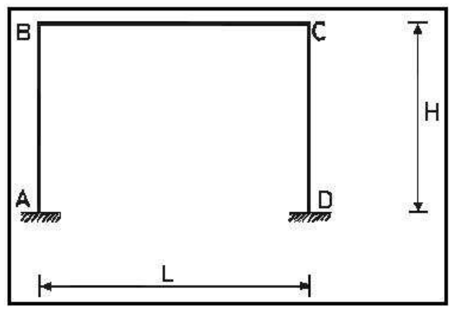


Figura 6.5.1 Pórtico plano con elementos totalmente flexibles.

- **SOLUCIÓN**

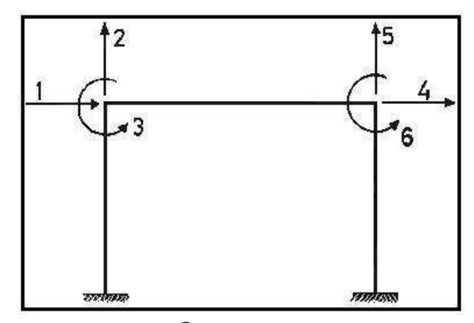


Figura 6.5.2 Sistema $Q - q$ de la estructura de ejemplo 1.

Los elementos de las matrices de rigidez y flexibilidad son:

$$
\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} & F_{15} & F_{16} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} & F_{25} & F_{26} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} & F_{35} & F_{36} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} & F_{45} & F_{46} \\ F_{51} & F_{52} & F_{53} & F_{54} & F_{55} & F_{56} \\ F_{61} & F_{62} & F_{63} & F_{64} & F_{65} & F_{66} \end{bmatrix}
$$

Los elementos de la primera columna de $\boldsymbol{K}$ son las fuerzas y momentos que hay que aplicar a la estructura para que únicamente el nudo B se desplace horizontalmente la unidad, como se indica en la figura 6.5.3.

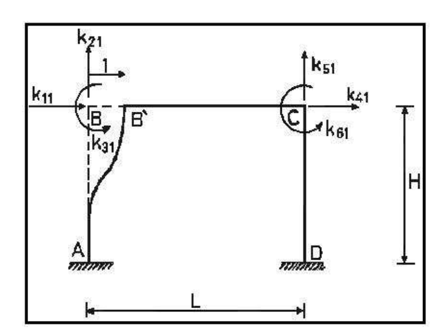


Figura 6.5.3 Elementos de la primera columna de $\boldsymbol{K}$.

Por otro lado al aplicar una fuerza horizontal en el nudo B, como se muestra en la figura 6.5.4 los desplazamientos y giros que se generan son los elementos de la primera columna de $\boldsymbol{F}$.

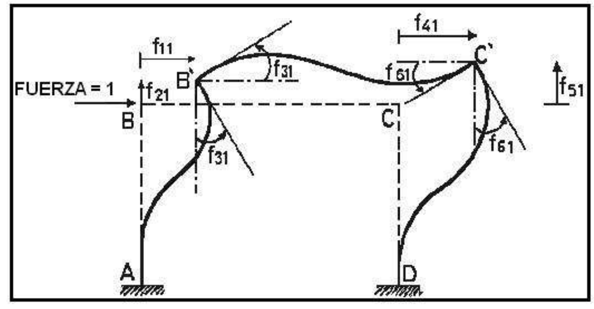


Figura 6.5.4 Elementos de la primera columna de $\boldsymbol{F}$.

En las figuras 6.5.3 y 6.5.4 las cargas y corrimientos se han dibujado con sentido positivo, puede ser que en el cálculo alguno de ellos sea negativo o nulo.

Es importante destacar que los elementos de la matriz de rigidez tienen unidades de fuerza o momento.

6.3 DEFORMACIONES DE LOS ELEMENTOS

En capítulos anteriores se había indicado que un elemento lineal de un pórtico plano tiene tres desplazamientos como cuerpo rígido y tres deformaciones del elemento. Se procede a estudiar y recordar estas definiciones para lo cual se analiza una deformada general del pórtico de la figura 6.6.1.

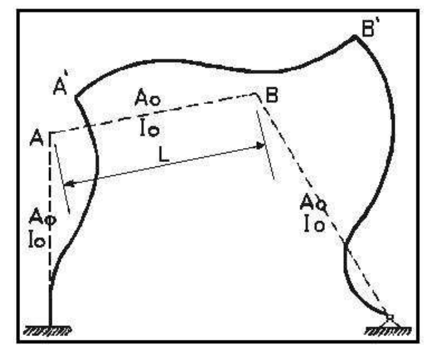


Figura 6.6.1 Deformación general de un pórtico plano.

A continuación se presenta un modelo numérico para ver como un elemento cualquiera de la estructura se ha deformado. Por ejemplo se desea saber como el elemento AB pasa de su posición inicial indicada en la figura 6.6.1 en líneas entrecortadas a su posición final A'B' indicada con líneas continuas. Para ello en la figura 6.6.2 se ha dibujado el elemento AB antes y después de deformarse en la mencionada figura se ha identificado las coordenadas del elemento.

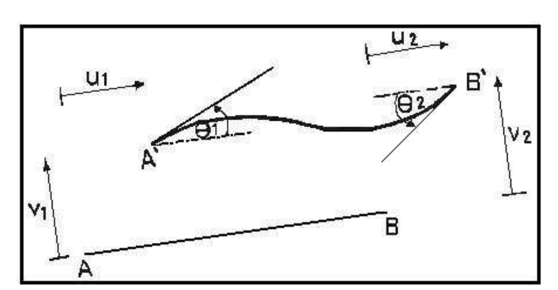


Figura 6.6.2 Coordenadas del elemento AB.

El paso de la posición inicial del elemento AB a A'B' se lo analiza en cinco etapas- En líneas entrecortadas se indicará cual es la posición del elemento al inicio de cada etapa y en todas se va a indicar la deformada final A'B'. Estas etapas son las siguientes:

1) Se produce únicamente la traslación u_1 como cuerpo rígido. Esto se ilustra en la figura 6.6.3 en que el nudo A pasa a A'' y el nudo B pasa a B''. El elemento A''B'' tiene una longitud L.

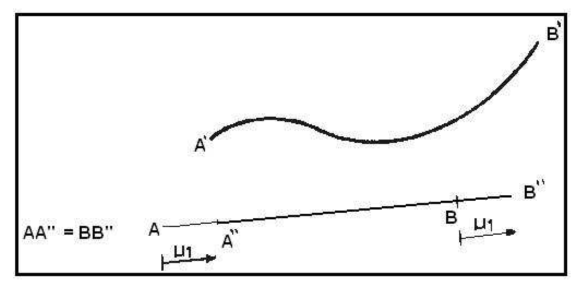


Figura 6.6.3 Primera etapa del modelo. Solo existe u_1.

2) Sube el elemento de la posición A''B'' a la posición A'''B''' una distancia igual a v_1 como cuerpo rígido de tal manera que A'''B''' es paralela a A''B''. Además al haberse desplazado el nudo A, axialmente u_1 y transversalmente v_1 la posición de A''' coincide con la posición final del nudo A' como lo ilustra la figura 6.6.4.

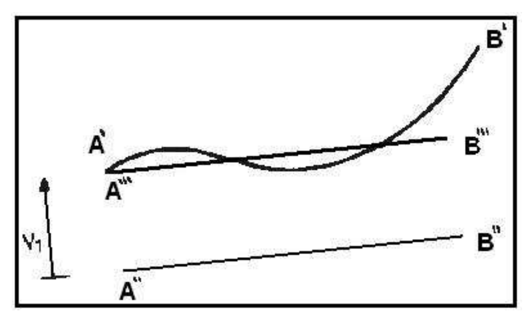


Figura 6.6.4 Segunda etapa del modelo. Solo existe v_1 .

3) Se rota el nudo A un ángulo ψ en la posición A''' como cuerpo rígido de manera que el elemento A'''B''' se encuentre en la alineación de A'''B'. El punto B''' pasa a la posición B'V como se aprecia en la figura 6.6.5. Nótese que B'V no coincide con B'.

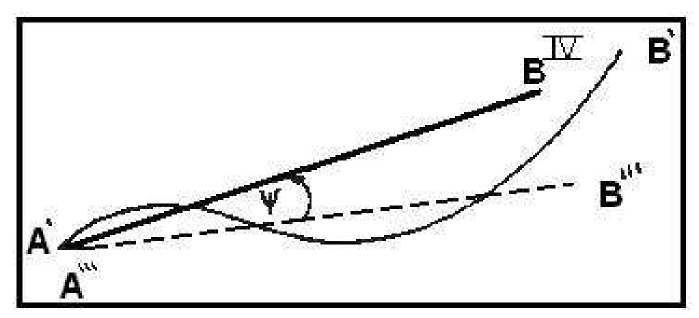


Figura 6.6.5 Tercera etapa del modelo. Solo existe ψ .

Al mirar las figuras 6.6.2 y 6.6.5 se puede demostrar que el ángulo ψ se calcula con la siguiente ecuación:

$$\psi = \frac{v_2 - v_1}{L} \tag{6.5}$$

Hasta aquí se han realizado tres desplazamientos como cuerpo rígido.

4) Se deforma al elemento axialmente, alargándolo para pasar de la posición B'V a la posición final B'. Esta deformación axial se denomina ΔL en la figura 6.6.6 y se evalúa de la siguiente manera:

$$\Delta L = u_2 - u_1 \tag{6.6}$$

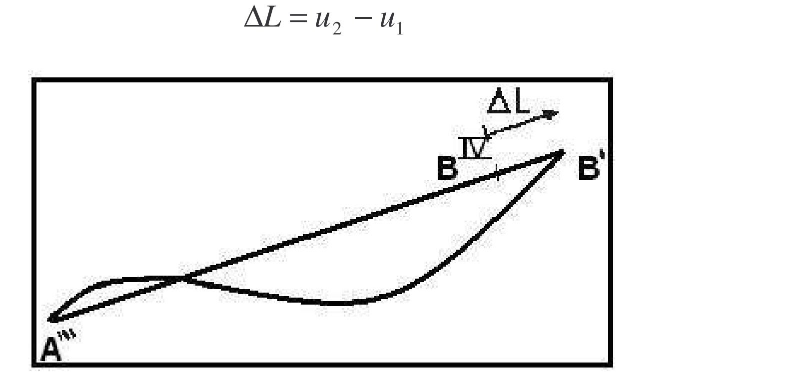


Figura 6.6.6 Cuarta etapa del modelo. Deformación axial ΔL .

5) Por último para tener al elemento en la posición final lo que falta es deformarle a flexión para lo cual se rotan los nudos A''' y B'. En el nudo inicial se deforma $\theta_1 - \psi$ y en el nudo final un valor $\theta_2 - \psi$, como se muestra en la figura 6.6.7

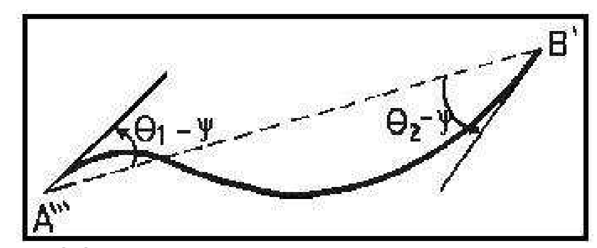


Figura 6.6.7 Quinta etapa del modelo. Deformación a flexión.

Para comprender bien el modelo presentado, en la figura 6.6.8 se resumen las cinco etapas. Por fines didácticos se agranda la figura que contiene al elemento AB.

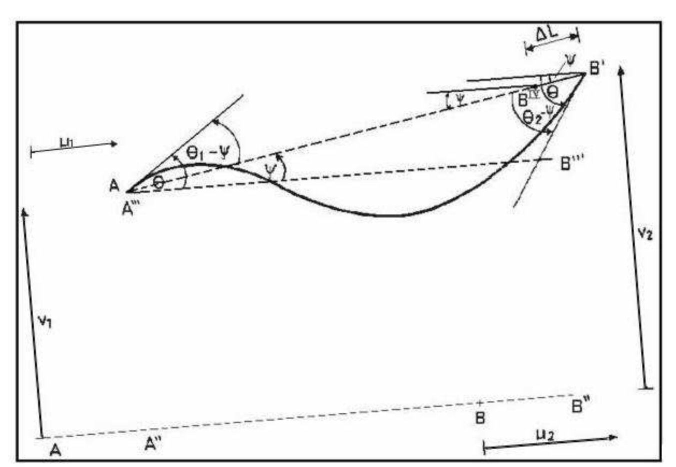


Figura 6.6.8 Resumen del modelo numérico presentado.

6.3.1 Deformaciones de un elemento

Para el elemento AB que se acaba de estudiar, si se desea eliminar los desplazamientos como cuerpo rígido, se debe colocar en el nudo A un vínculo que impida el desplazamiento axial y transversal y en el nudo B un rodillo que impida que el elemento rote, que impida la rotación ψ.

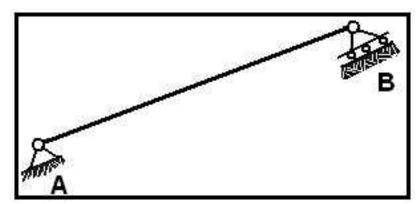


Figura 6.7.1 Modelo para el estudio de las deformaciones de un elemento.

En consecuencia al eliminar los desplazamientos como cuerpo rígido del elemento AB con la colocación del vínculo y del rodillo se tiene en el elemento de la figura 6.7.1 únicamente las deformaciones.

Ahora, al analizar al elemento AB de la figura 6.7.1 como si se tratará de una estructura no un elemento se observa que la estructura tiene 3 grados de libertad los mismos que pueden obtenerse con la fórmula estudiada en el capítulo 1.

$$NGL = 2\,(3) - 1 - 2 = 3$$

En la figura 6.7.2 al elemento que se lo ha venido estudiando se lo ha colocado horizontal y en el se han identificado los 3 grados de libertad que corresponden a las deformaciones del elemento que en resumen son: una deformación a flexión del nudo inicial; una deformación a flexión del nudo final y una deformación axial del elemento. Las deformaciones a flexión se dieron en la etapa 5 del modelo y la deformación axial en la etapa 4.

A las deformaciones del elemento se les identifica con la letra $\boldsymbol{p}$ minúscula y a las cargas internas (momentos y fuerza) con la letra $\boldsymbol{P}$ mayúscula. Se destaca que tanto $\boldsymbol{p}$ como $\boldsymbol{P}$ son vectores.

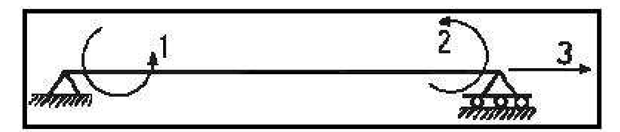


Figura 6.7.2 Sistema de coordenadas de un elemento.

La forma del vector $\boldsymbol{p}$ para el elemento de la figura 6.7.2 es como sigue:

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

donde p_1 es la deformación a flexión del nudo inicial; p_2 es la deformación a flexión del nudo final y p_3 es la deformación axial, las mismas que se calculan con las siguientes ecuaciones:

$$p_1 = \theta_1 - \psi = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L} \qquad (6.7.1)$$

$$p_2 = \theta_2 - \psi = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{L} \qquad (6.7.2)$$

$$p_3 = \Delta L = u_2 - u_1 \qquad (6.7.3)$$

Por otra parte, el vector $\boldsymbol{P}$ está formado por:

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

donde P_1 es el momento que actúa en el nudo inicial; P_2 es el momento que actúa en el nudo final y P_3 es la fuerza axial en el nudo final.

- **EJEMPLO N.- 2**

El pórtico plano que se indica en la figura 6.8.1 tiene 5 grados de libertad, los mismos que se indican en la figura 6.8.2. Se desea encontrar el valor de la coordenada dependiente que es el desplazamiento vertical del nudo C.

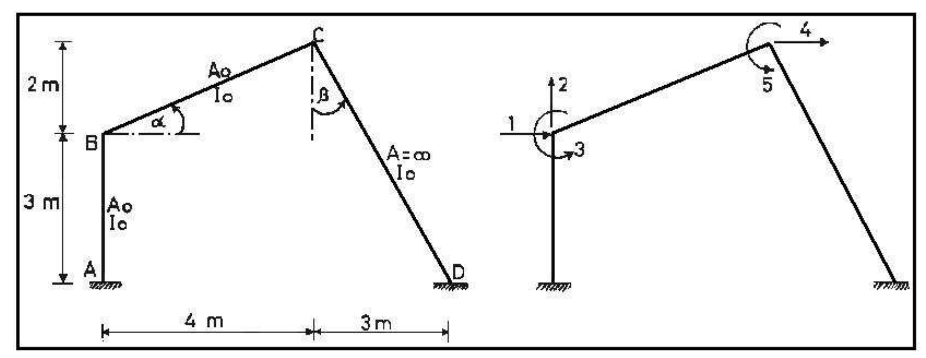
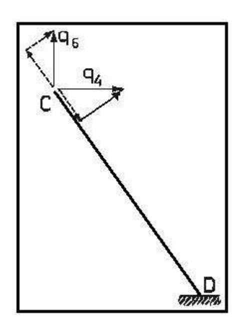


Figura 6.8.1 Estructura del ejemplo 2. **Figura 6.8.2** Sistema $Q - q$

- **SOLUCIÓN**

Existen varias formas para encontrar el valor de la coordenada dependiente que se va a denominar q_6 en función de las coordenadas independientes. Una forma de hacerlo es como se realizó en los ejemplos 8 y 9 del capítulo 5 en que a partir de cada uno de los diagramas elementales se obtiene la o las coordenadas dependientes. Ahora en este ejemplo se ilustra otra forma de hacerlo que es una aplicación inmediata del estudio de las deformaciones. Para el elemento CD de la estructura de la figura 6.8.1, valen:



Sea C el nudo inicial y D el nudo final, con esta notación se tiene:

$$u_1 = q_4 \ sen\beta - q_6 \cos\beta \qquad\qquad u_2 = 0$$

Al ser el elemento CD axialmente rígido no existe la deformación axial ΔL. En consecuencia se tiene:

$$\Delta L = 0 \qquad \Rightarrow \qquad u_2 - u_1 = 0$$

Al reemplazar los valores de u_2 y u_1 para el elemento CD se encuentra:

$$0 - (q_4 \ sen\beta - q_6 \cos\beta) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad q_6 = q_4 \ tg\beta$$

- **EJEMPLO N.- 3**

En el marco plano de la figura 6.9.1 el elemento BC es transversalmente rígido y el elemento CD es axialmente rígido. Para este pórtico se ha seleccionado el sistema de coordenadas generalizadas indicado en la figura 6.9.2. Se desea encontrar el valor de las coordenadas dependientes.

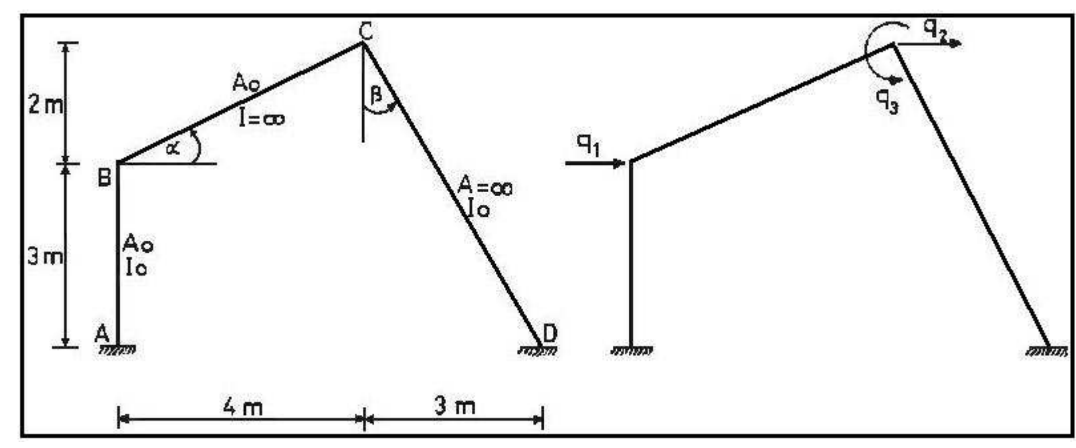


Figura 6.9.1 Estructura de ejemplo 3. **Figura 6.9.2** Sistema $Q-q$

- **SOLUCIÓN**

Sean q_4, q_5 y q_6 las coordenadas dependientes, las mismas que deben expresarse en función de q_1, q_2 y q_3.

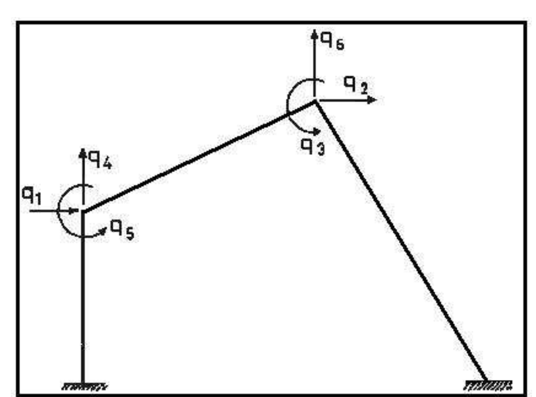
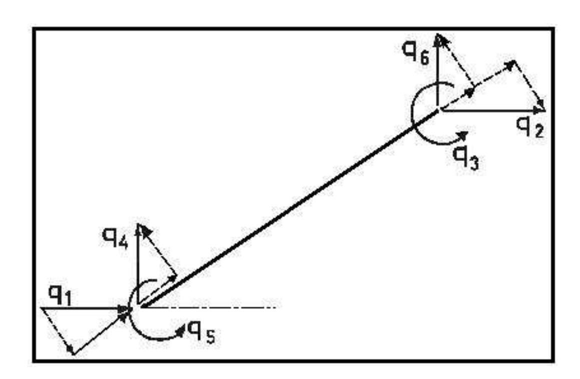


Figura 6.9.3 Coordenadas dependientes e independientes de ejemplo3.

Para el elemento BC, al considerar el nudo inicial en B y el nudo final en C, se tiene que las coordenadas del elemento valen:



$$v_1 = q_4 \cos\alpha - q_1 \; sen\alpha \qquad \theta_1 = q_5$$
$$v_2 = -q_2 \; sen\alpha + q_6 \cos\alpha \qquad \theta_2 = q_3$$

Por ser transversalmente rígido, la deformación a flexión en el nudo inicial y final vale cero. En consecuencia se tiene:

$$\theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L} = 0 \qquad \Rightarrow \quad q_5 - \frac{-q_2 \; sen\alpha + q_6 \cos\alpha - q_4 \cos\alpha + q_1 sen\alpha}{L} = 0$$
$$\theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{L} = 0 \qquad \Rightarrow \quad q_3 - \frac{-q_2 \; sen\alpha + q_6 \cos\alpha - q_4 \cos\alpha + q_1 sen\alpha}{L} = 0$$

donde L es la longitud del elemento BC. De las dos ecuaciones indicadas se obtiene:

$$-q_4 \cos\alpha + q_6 \cos\alpha = -q_1 \; sen\alpha + q_2 \; sen\alpha + q_3 \; L$$

Al proceder en forma similar el ejemplo 2, para el elemento CD que es axialmente rígido se tiene:

$$u_1 = q_2 \; sen\beta - q_6 \cos\beta \qquad u_2 = 0$$
$$u_2 - u_1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad -q_2 \; sen\beta + q_6 \cos\beta = 0$$
$$q_6 = q_2 \; tg\beta$$

Al reemplazar el valor de q_6 en la expresión que se obtuvo de la condición de que el elemento BC es transversalmente rígido se obtiene:

$$q_4 = q_1 \; tg\beta + q_2 \; (tg\beta - tg\alpha) - q_3 \; \frac{L}{\cos\alpha}$$

Finalmente al sustituir q_4 y q_6 y al despejar q_5 de la primera ecuación se halla.

$$q_5 = q_3$$

- **EJEMPLO N.- 4**

Con relación a la estructura de la figura 6.9.1 se desea saber si pueden ser coordenadas generalizadas las mostradas en la figura 6.9.4, usando las ecuaciones de deformación de un elemento.

- **SOLUCIÓN**

Sean q_4, q_5 y q_6 las coordenadas dependientes y, q_1, q_2 y q_3 las coordenadas independientes. Para el elemento BC que es transversalmente rígido se tiene:

$$v_1 = q_5 \cos\alpha - q_4 \; sen\alpha \qquad \theta_1 = q_1$$
$$v_2 = q_6 \cos\alpha - q_3 sen\alpha \qquad \theta_2 = q_2$$

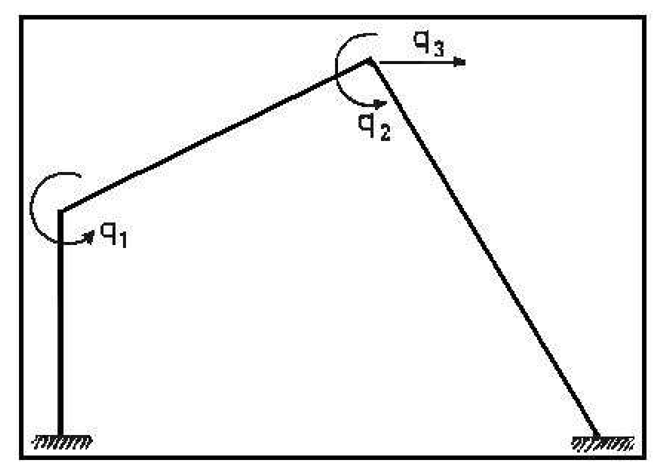


Figura 6.9.4 ¿Posibles coordenadas generalizadas?.

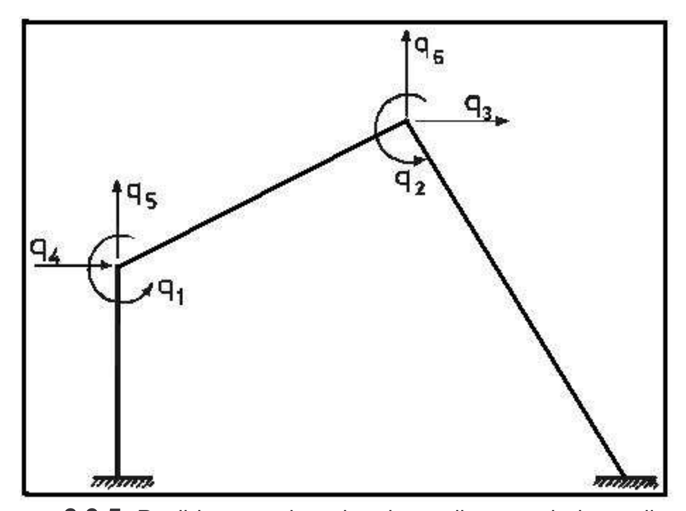


Figura 6.9.5 Posibles coordenadas dependientes e independientes.

$$\theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad q_1 - \frac{q_6 \cos\alpha - q_3 sen\alpha - q_5 \cos\alpha + q_4 sen\alpha}{L} = 0$$

$$\theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{L} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad q_2 - \frac{q_6 \cos\alpha - q_3 sen\alpha - q_5 \cos\alpha + q_4 sen\alpha}{L} = 0$$

El sistema de ecuaciones lineales que se obtiene son:

$$q_4 sen\alpha - q_5 \cos\alpha = L q_1 - q_6 \cos\alpha + q_3 sen\alpha$$
$$q_4 sen\alpha - q_5 \cos\alpha = L q_2 - q_6 \cos\alpha + q_3 sen\alpha$$

De la condición de que el elemento CD es transversalmente rígido se encuentra:

$$q_6 = q_3 \ tg\beta$$

De esta manera se ha expresado la coordenada dependiente q_6 en función de la coordenada independiente q_3. Al sustituir q_6 en el sistema de ecuaciones lineales que conducen al cálculo de q_4 y q_5 se obtiene en forma matricial:

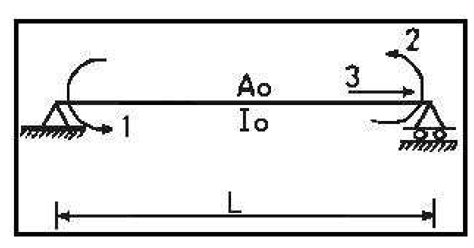
$$\begin{bmatrix} sen\alpha & -\cos\alpha \\ sen\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_4 \\ q_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L\, q_1 - q_6 \cos\alpha + q_3 sen\alpha \\ L\, q_2 - q_6 \cos\alpha + q_3 sen\alpha \end{bmatrix}$$

Este sistema de ecuaciones no tiene solución debido a que el determinante de las incógnitas vale cero. Luego al despejar q_4 o q_5 se tendrían divisiones para cero. Al no poder despejar las coordenadas dependientes en función de las coordenadas independientes el sistema de coordenadas generalizado de la figura 6.9.4 está mal planteado.

- **RESUMEN DEL APARTADO**

El resumen de lo estudiado en el presente apartado y de acuerdo al modelo numérico de cálculo, para el estudio de las deformaciones se tiene:

♣ **Elementos Totalmente Flexibles**



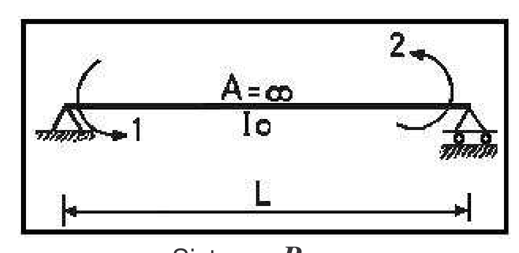
Sistema $\boldsymbol{P-p}$

$$p_1 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L}$$

$$p_2 = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{L}$$

$$p_3 = u_2 - u_1$$

♣ **Elementos Axialmente Rígidos**

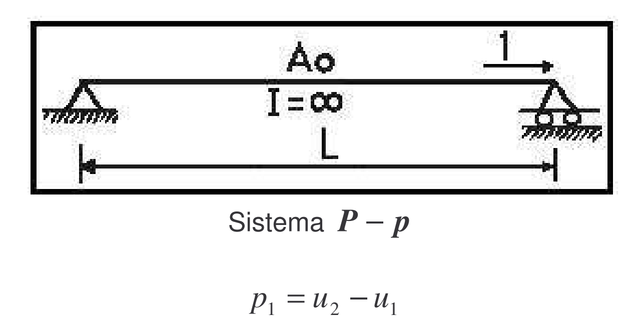


Sistema $\boldsymbol{P-p}$

$$p_1 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L}$$

$$p_2 = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{L}$$

♣ **Elementos Transversalmente Rígidos**



Sistema $P-p$

$$p_1 = u_2 - u_1$$

Se pudo haber trabajado con otro modelo para el estudio de las deformaciones, como por ejemplo con cualquiera de los presentados en la figura 6.10.

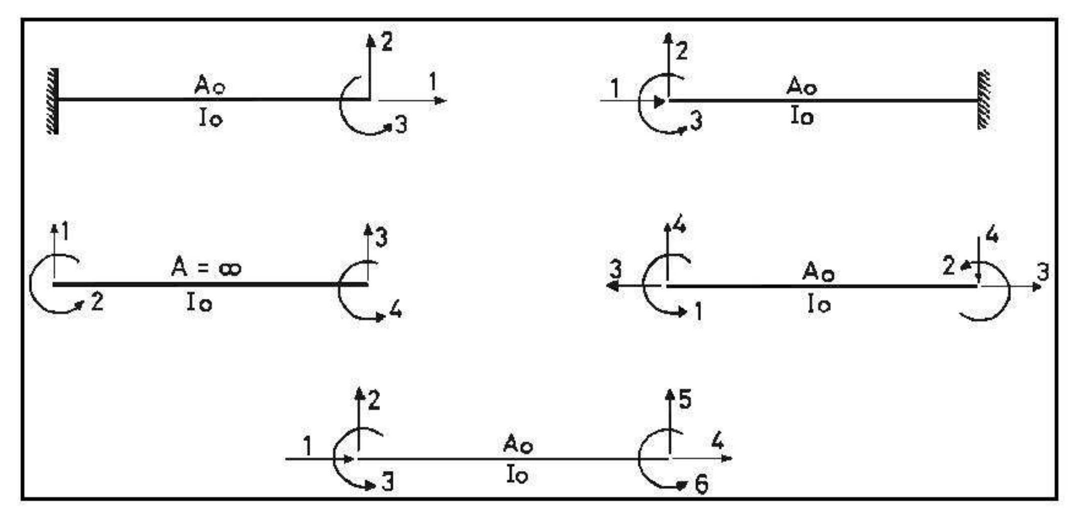


Figura 6.10 Algunos modelos para el estudio de las deformaciones

En los capítulos posteriores del libro se trabajará con el modelo numérico estudiado y que está indicado en la figura 6.7.2 ya que éste es apropiado para resolver marcos planos. Cuando se piensa en la solución mediante el computador los tres últimos modelos indicados en la figura 6.10 son los más apropiados.

El primero de éstos tres últimos modelos es para cuando el elemento es axialmente rígido, el segundo es el que utiliza el programa CAL y el tercero es el que utilizan la mayor parte de programas.

6.3.2 Cálculo mediante Trabajos Virtuales

Las ecuaciones (6.7.1) a (6.7.3) que corresponden al modelo numérico de la figura 6.7.2 se pueden obtener mediante trabajos virtuales como se indica a continuación, en lugar de presentar las cinco etapas con las que se pasó de BC a B'C'. Para encontrar las mencionadas ecuaciones por Trabajos Virtuales en la figura 6.11.1 se han colocado las cargas P que actúan en el elemento, las mismas que han generado las reacciones de de los apoyos. En la figura 6.11.2 se indican las deformaciones del elemento.

El trabajo virtual del sistema de cargas que actúan en la figura 6.11.1 en las deformaciones de la figura 6.11.2 , vale:

$$TV = P_1\ p_1 + P_2\ p_2 + P_3\ p_3$$

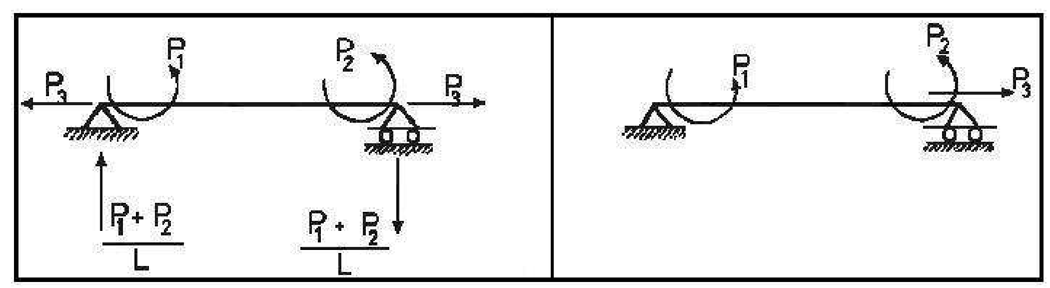


Figura 6.11.1 Cargas que actuantes **Figura 6.11.2** Deformaciones en el elemento.

Por lo tanto para calcular p_1 se debe aplicar un momento virtual unitario en el nudo inicial y todas las demás cargas nulas como lo indica la figura 6.11.3. En la figura 6.11.4 se indican las reacciones en los apoyos correspondiente a este estado de carga.

P_1 = 1 y demás nulas.

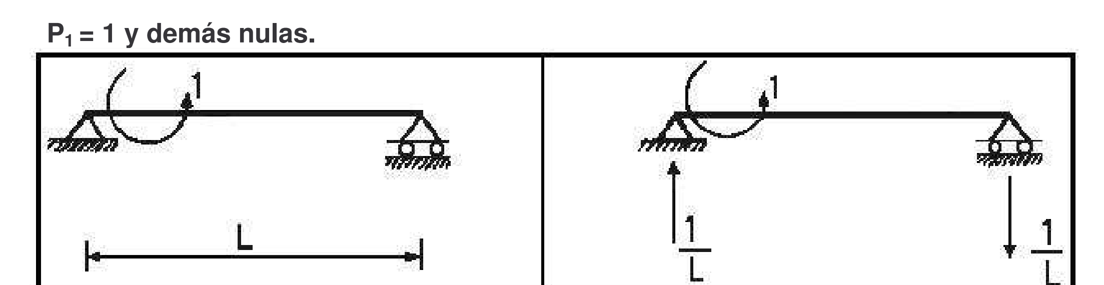


Figura 6.11.3 Carga Virtual Unitaria. **Figura 6.11.4** Reacciones para la carga virtual.

En la figura 6.11.5 se presentan las coordenadas para un elemento de un pórtico plano, se recuerda que u_1, v_1, θ_1 son las coordenadas para el nudo inicial y u_2, v_2, θ_2 para el nudo final.

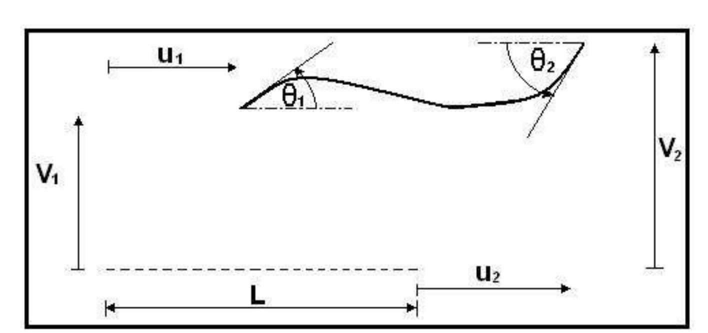


Figura 6.11.5 Coordenadas de un elemento.

Para el estado de carga virtual estudiado se tiene que el trabajo virtual es igual a $1 * p_1$, y este a su vez es igual al trabajo virtual que producen las fuerzas y momentos virtuales de la figura 6.11.4 en la figura 6.11.5. Por lo tanto se tiene:

$$1 * p_1 = 1 * \theta_1 + \frac{1}{L} * v_1 - \frac{1}{L} * v_2 \qquad \Rightarrow \qquad p_1 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L}$$

Al aplicar un momento virtual unitario en el nudo final y todos los restantes nulos y por un procedimiento similar se halla p_2. En forma similar se hará para hallar p_3.

6.3.3 Otro sistema de coordenadas del elemento

Para el sistema de coordenadas del elemento de la figura 6.12 se va a calcular las deformaciones $p_1^*,\ p_2^*,\ p_3^*$. El asterisco únicamente se emplea por didáctica.

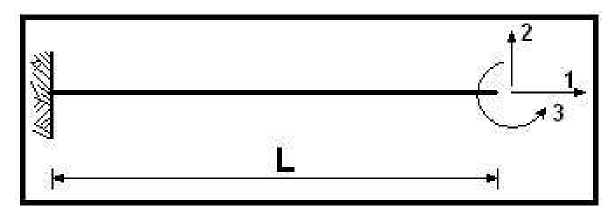


Figura 6.12 Sistema $P^* - p^*$

Para el modelo de la figura 6.12, los desplazamientos como cuerpo rígido están asociados a las componentes $u_1,\ v_1,\ \theta_1$ las mismas que se eliminan con el empotramiento en el nudo inicial. En la figura 6.13se presenta en forma gráfica el estudio de las deformaciones.

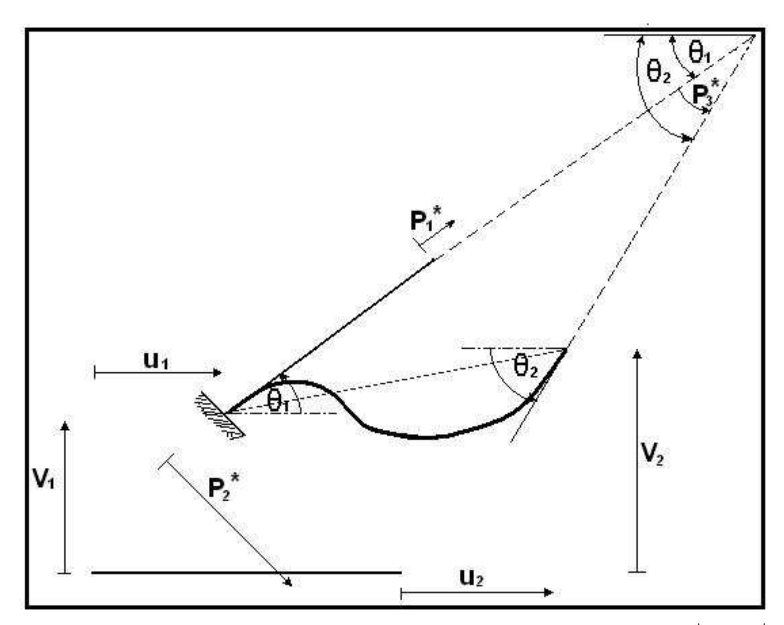


Figura 6.12 Estudio de las deformaciones para el sistema $P^* - p^*$.

En forma similar al presentado en el anterior modelo indicado en 6.3.1 se puede demostrar que:

$$p_1^* = u_2 - u_1 \qquad (6.8.1)$$

$$p_2^* = v_2 - v_1 - \theta_1\ L \qquad (6.8.2)$$

$$p_3^* = \theta_2 - \theta_1 \qquad (6.8.3)$$

Ahora p_1^* es el cambio de longitud del elemento medido en la dirección de la tangente a la deformada en A (nudo inicial); p_2^* es la deformación de B (nudo final) en la dirección perpendicular al elemento como si A se encontrara empotrado y finalmente p_3^* es el ángulo de rotación del nudo final B, suponiendo que el nudo inicial A no gira por encontrarse empotrado.

- **EJEMPLO N.- 5**

Demostrar la ecuación (6.8.2) mediante trabajos virtuales para el modelo numérico indicado en la figura 6.12.

- **SOLUCIÓN**

En el nudo inicial se aplica una fuerza virtual vertical como lo señala la figura 6.14 y se obtienen las reacciones correspondientes.

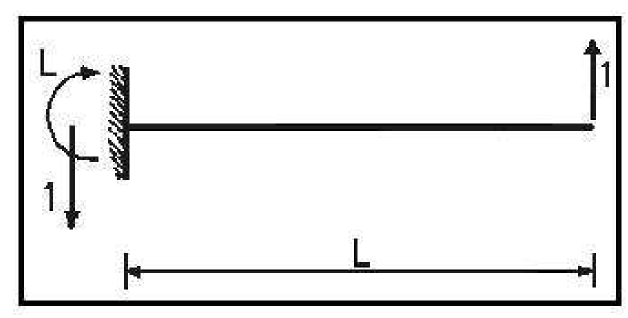


Figura 6.14 Carga virtual unitaria y reacciones.

El trabajo virtual del sistema de cargas de la figura 6.14 en las coordenadas del elemento de la figura 6.11.5 determinan el valor de p_2^*

$$p_2^* = -1 * v_1 + 1 * v_2 - L\,\theta_1 \qquad \Rightarrow \qquad p_2^* = v_2 - v_1 - L\,\theta_1$$

- **EJEMPLO N.- 6**

En la figura 6.15.1 se presenta el sistema de coordenadas del elemento que considera el programa CAL (**C**omputer **A**ssisted **L**earning of Structural Analysis). Se desea encontrar la fórmula que define la deformación p_3.

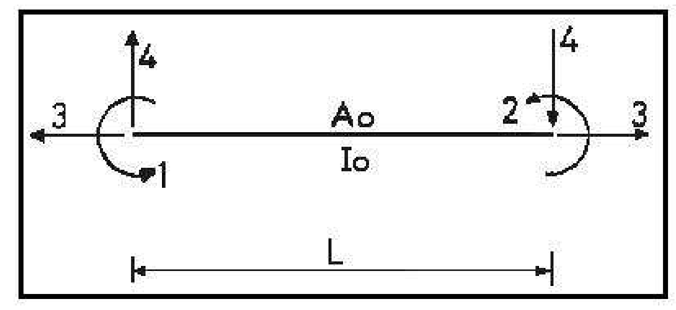


Figura 6.15.1 Sistema de coordenadas $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}$ que considera programa CAL.

- **SOLUCIÓN**

Para calcular p_3 se aplica una carga axial unitaria y las demás nulas como lo muestra la figura 6.15.2. Ahora el trabajo virtual de las cargas de la figura 6.15.2 en las deformaciones del sistema 6.15.1 vale:

$$TV = 1 * p_3 + 1 * p_3 = 2\ p_3$$

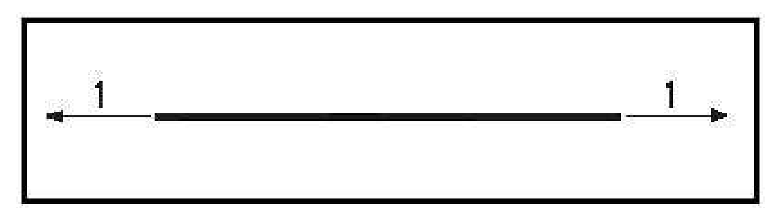


Figura 6.15.2 Carga axial virtual unitaria.

Este trabajo virtual es igual al producido por las cargas que gravitan en la figura 6.15.2 en las coordenadas del elemento de la figura 6.11.5. Luego:

$$2\ p_3 = 1 * u_2 - 1 * u_1 \qquad \Rightarrow \qquad p_3 = \frac{u_2 - u_1}{2}$$

Se deja al estudiante la deducción de las restantes deformaciones del elemento para el modelo numérico utilizado por el programa CAL. Estas son:

$$p_1 = \theta_1 \qquad\qquad p_2 = \theta_2$$

$$p_3 = \frac{u_2 - u_1}{2} \qquad\qquad p_4 = \frac{v_1 - v_2}{2}$$

6.4 EJERCICIOS RESUELTOS

Se presentan dos ejercicios que complementan lo estudiado en este capítulo y en el anterior cuando se estudió la matriz de transformación de coordenadas. En capítulos posteriores se verá su aplicación.

- **EJEMPLO N.- 7**

Con relación a las coordenadas del elemento utilizadas por el programa CAL y que se ha indicado en la figura 6.15.1. Se desea encontrar las tres primeras columnas de la matriz de transformación de coordenadas locales a globales. En las figuras 6.16.1 y 6.16.2 se indican estos sistemas de coordenadas.

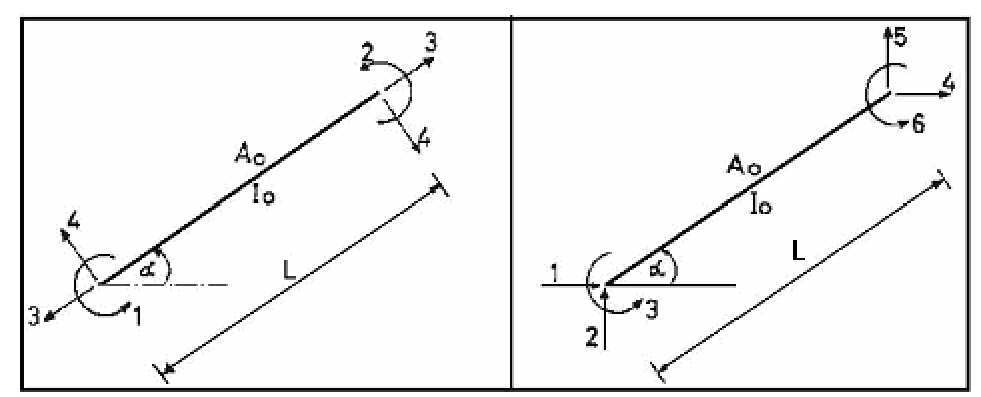


Figura 6.16.1 Coordenadas Locales de CAL **Figura 6.16.2** Coordenadas Globales.

- **SOLUCIÓN**

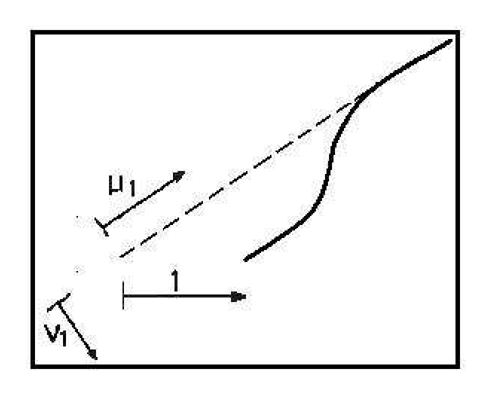
Se define la matriz de transformación de coordenadas T de la siguiente manera:

$$p = T\ p^*$$

donde p es el sistema de coordenadas indicado en la figura 6.16.1 y p^* el sistema de coordenadas de la figura 6.16.2.

- **Primera columna de T**

$$p_1^* = 1 \quad y \quad p_i^* = 0 \quad i \neq 1$$



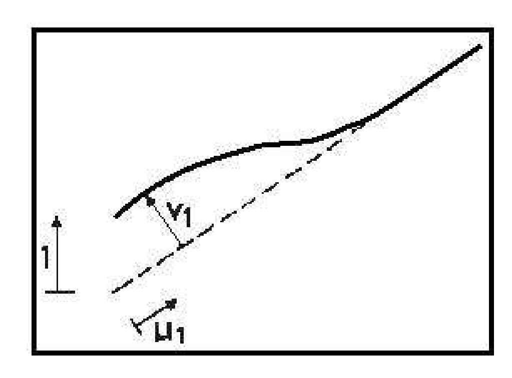
$$u_1 = \cos\alpha \qquad u_2 = 0$$
$$v_1 = -sen\alpha \qquad v_2 = 0$$
$$\theta_1 = 0 \qquad \theta_2 = 0$$

$$p_1 = \theta_1 = 0 \qquad p_2 = \theta_2 = 0$$

$$p_3 = \frac{u_2 - u_1}{2} = -\frac{\cos\alpha}{2} \qquad p_4 = \frac{v_1 - v_2}{2} = -\frac{sen\alpha}{2}$$

- **Segunda columna de T**

$$p_2^* = 1 \quad y \quad p_i^* = 0 \quad i \neq 2$$



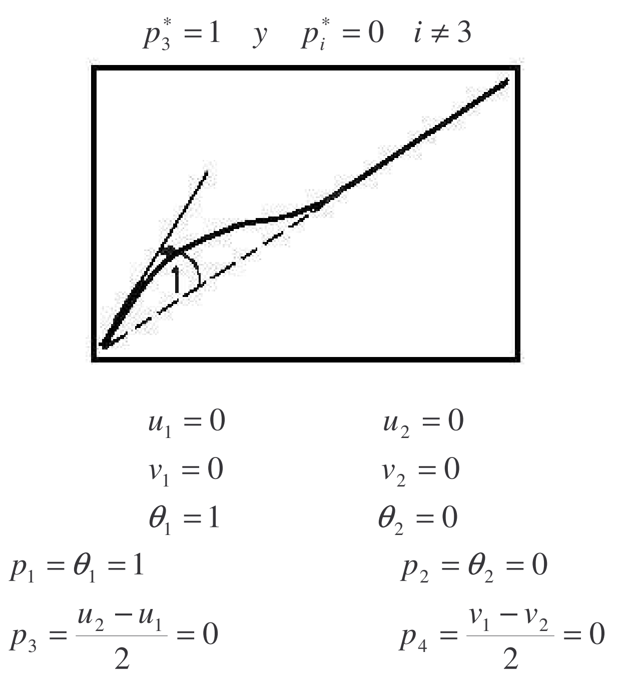
$$u_1 = sen\alpha \qquad u_2 = 0$$
$$v_1 = \cos\alpha \qquad v_2 = 0$$
$$\theta_1 = 0 \qquad \theta_2 = 0$$

$$p_1 = \theta_1 = 0 \qquad\qquad p_2 = \theta_2 = 0$$

$$p_3 = \frac{u_2 - u_1}{2} = -\frac{sen\alpha}{2} \qquad\qquad p_4 = \frac{v_1 - v_2}{2} = \frac{\cos\alpha}{2}$$

- **Tercera columna de T**

$$p_3^* = 1 \quad y \quad p_i^* = 0 \quad i \neq 3$$



$$u_1 = 0 \qquad\qquad u_2 = 0$$
$$v_1 = 0 \qquad\qquad v_2 = 0$$
$$\theta_1 = 1 \qquad\qquad \theta_2 = 0$$

$$p_1 = \theta_1 = 1 \qquad\qquad p_2 = \theta_2 = 0$$

$$p_3 = \frac{u_2 - u_1}{2} = 0 \qquad\qquad p_4 = \frac{v_1 - v_2}{2} = 0$$

Al proceder en forma similar con la cuarta, quinta y sexta columna de T se tiene:

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\cos\alpha}{2} & -\frac{sen\alpha}{2} & 0 & \frac{\cos\alpha}{2} & \frac{sen\alpha}{2} & 0 \\ -\frac{sen\alpha}{2} & \frac{\cos\alpha}{2} & 0 & \frac{sen\alpha}{2} & -\frac{\cos\alpha}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

- **EJEMPLO N.- 8**

Encontrar las dos primeras columnas de la matriz de transformación de coordenadas para pasar del sistema de coordenadas de la figura 6.17.1 al sistema de coordenadas de la figura 6.17.2. El elemento es axialmente rígido.

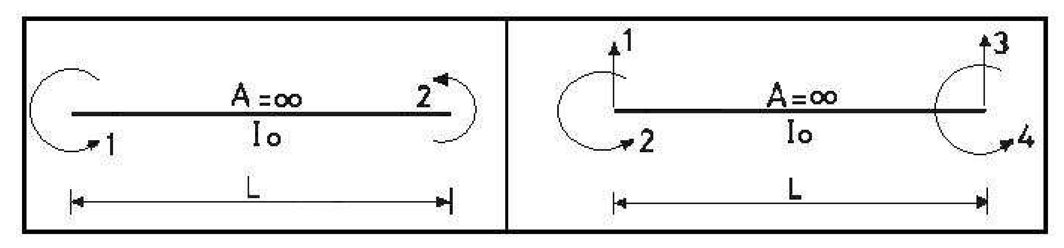
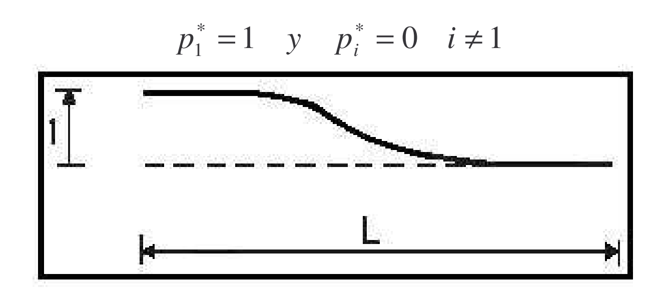


Figura 6.17.1 Sistema $P - p$ **Figura 6.17.2** Sistema $P^* - p^*$

- **SOLUCIÓN**

  - **Primera columna de T**

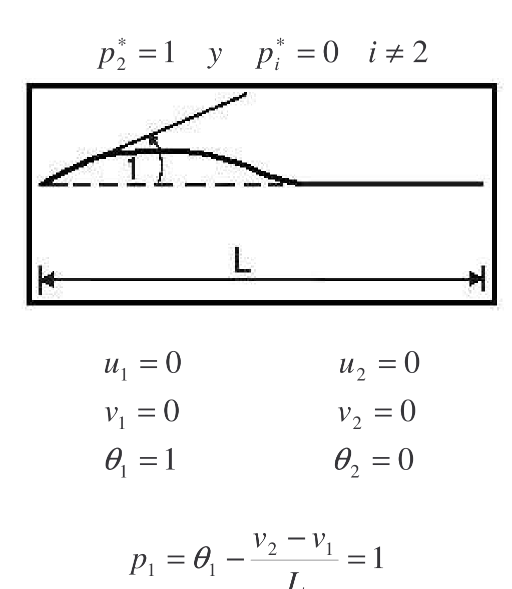
$$p_1^* = 1 \quad y \quad p_i^* = 0 \quad i \neq 1$$



$$u_1 = 0 \qquad u_2 = 0$$
$$v_1 = 1 \qquad v_2 = 0$$
$$\theta_1 = 0 \qquad \theta_2 = 0$$
$$p_1 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L} = \frac{1}{L}$$
$$p_2 = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{L} = \frac{1}{L}$$

  - **Segunda columna de T**

$$p_2^* = 1 \quad y \quad p_i^* = 0 \quad i \neq 2$$



$$u_1 = 0 \qquad u_2 = 0$$
$$v_1 = 0 \qquad v_2 = 0$$
$$\theta_1 = 1 \qquad \theta_2 = 0$$

$$p_1 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L} = 1$$
$$p_2 = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{L} = 0$$

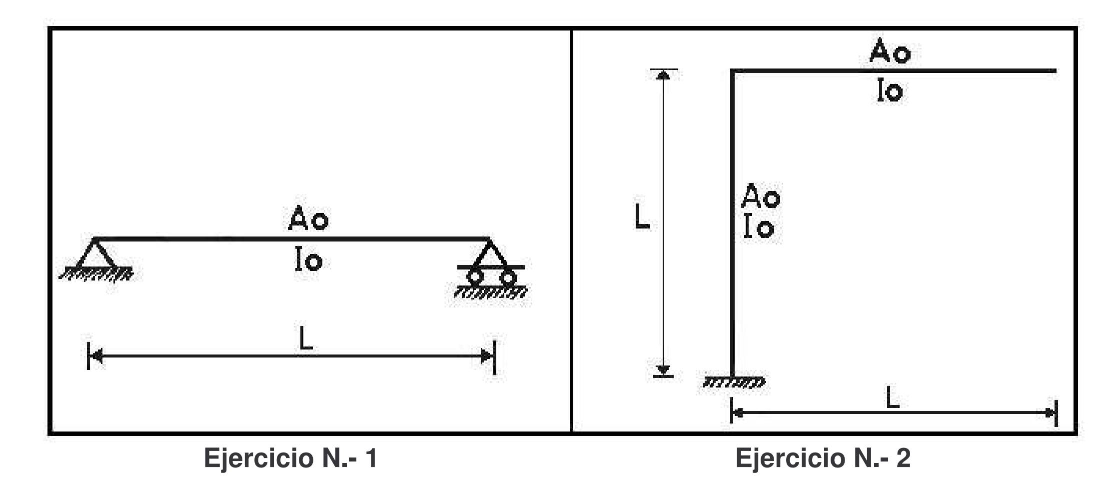
Se deja al estudiante el cálculo de la tercera y cuarta columna de la matriz **T** que resulta:

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 1 & -\frac{1}{L} & 0 \\ \frac{1}{L} & 0 & -\frac{1}{L} & 1 \end{bmatrix}$$

6.5 EJERCICIOS PROPUESTOS

En las estructuras presentadas a continuación, se desea:

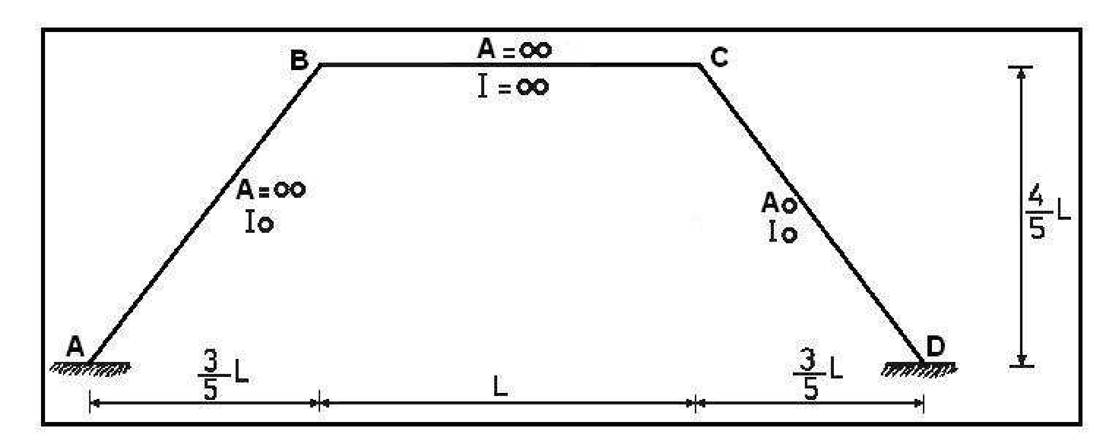
1. Seleccionar un sistema de coordenadas $Q-q$.
2. Indicar la forma de la matriz de rigidez y de flexibilidad.
3. El significado físico de los elementos de la matriz de rigidez y de flexibilidad.



Ejercicio N.- 1 Ejercicio N.- 2

Ejercicio N.- 3

Para la siguiente estructura, definir un sistema de coordenadas y expresar las coordenadas dependientes en función de las coordenadas independientes.



Ejercicio N.- 4

Demostrar que no pueden ser coordenadas generalizadas de la estructura del ejercicio N.- 3 las componentes de desplazamiento horizontal del nudo B y del nudo C.

Ejercicio N.- 5

Resolver el Ejemplo N.- 3 desarrollado en el numeral 6.2 de otra manera. Mediante diagramas de cada una de las coordenadas generalizadas seleccionadas.

Ejercicio N.- 6

Demostrar las ecuaciones (6.8.1) y (6.8.3) de éste capítulo, mediante trabajos virtuales.

Ejercicio N.- 7

Con relación al sistema de coordenadas del elemento que utiliza el programa CAL, demostrar la ecuación $p_4 = \frac{v_1 - v_2}{2}$.

Ejercicio N.- 8

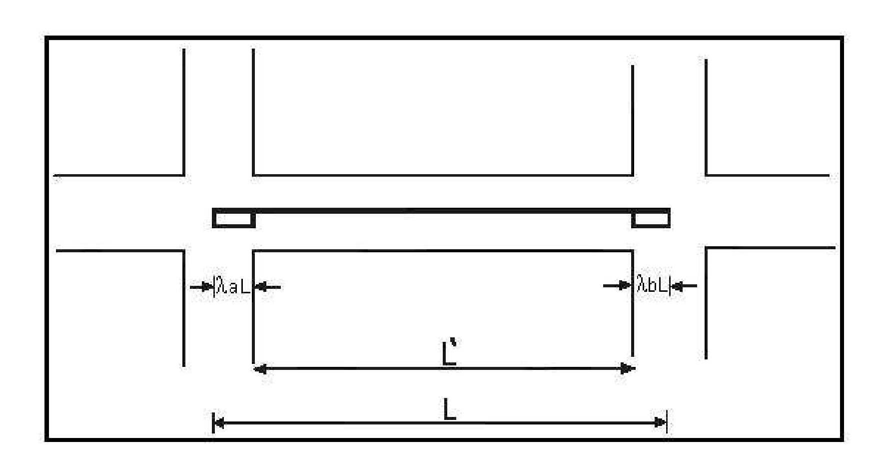
Encontrar las tres últimas columnas de la matriz **T** del Ejemplo N.- 7.

Ejercicio N.- 9

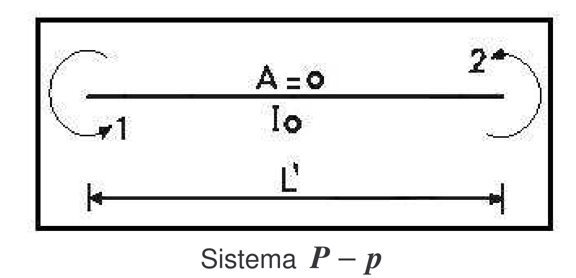
Encontrar las dos últimas columnas de la matriz **T** del Ejemplo N.- 8.

Ejercicio N.- 10

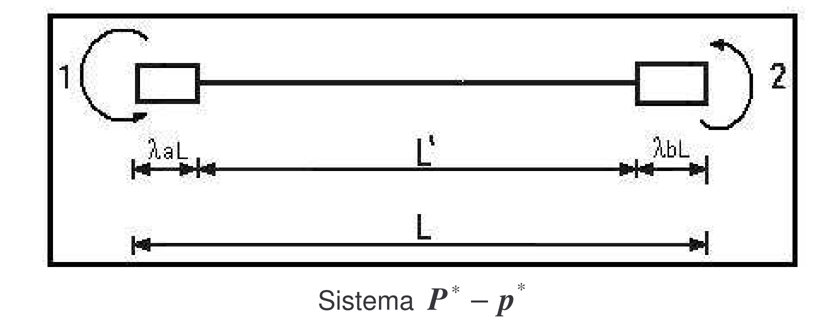
Sea $\lambda_a L$ y $\lambda_b L$ las longitudes del nudo rígido inicial y final del elemento que se presenta a continuación.



En el elemento en estudio se tiene que $L^{'}$ es la luz libre y L la luz entre ejes. Se definen dos sistemas de coordenadas uno para el elemento de longitud $L^{'}$ que se denominará sistema $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}$ y otro para el de longitud L que se llamará sistema $\boldsymbol{P}^* - \boldsymbol{p}^*$.



Sistema $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}$



Sistema $P^* - p^*$

Demostrar que la matriz de transformación de coordenadas para pasar del sistema $P - p$ al sistema $P^* - p^*$ es:

$$T = \begin{bmatrix} 1-\lambda_b & \lambda_b \\ \lambda_a & 1-\lambda_a \end{bmatrix} \frac{1}{1-\lambda_a-\lambda_b}$$

CAPITULO 7

MATRIZ DE RIGIDEZ Y DE FLEXIBILIDAD DE UN ELEMENTO LINEAL

RESUMEN

Se presenta con bastante detenimiento el cálculo de las matrices de flexibilidad y de rigidez de un elemento de sección constante o variable, para los sistemas de coordenadas del elemento que se indican en las figuras respectivas. El cálculo se lo realiza empleando conceptos de estructuras y por medio de la matriz de transformación de coordenadas.

Por considerarlo de interés se dedican algunas páginas al estudio del efecto de corte en los términos de la matriz de rigidez de un elemento, para el efecto se deduce el coeficiente de forma β para una sección rectangular y se presentan ejemplos de aplicación en los que se observa cuando es importante considerar el efecto de corte y cuando no.

7. 1 MATRIZ DE FLEXIBILIDAD DE UN ELEMENTO f

7.1.1 Forma general

Se denomina $\boldsymbol{F}$ a la matriz de flexibilidad de una estructura y $\boldsymbol{f}$ a la matriz de flexibilidad de un elemento. La forma general de $\boldsymbol{f}$ para el elemento totalmente flexible indicado en la figura 7.1, es la siguiente:

$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \qquad (7.1)$$

En el elemento de la figura 7.1 se consideran dos deformaciones a flexión, en el nudo inicial y final y una deformación axial en el nudo final.

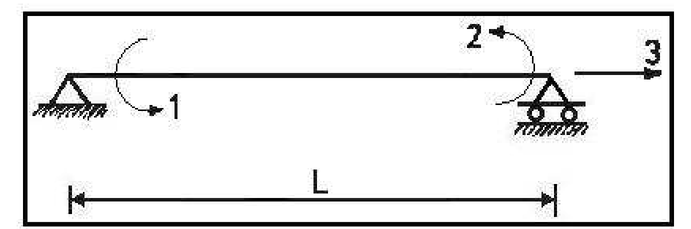


Figura 7.1 Sistema de coordenadas de un elemento.

Los elementos de la primera columna de f son las deformaciones que corresponden al estado de carga elemental $P_1 = 1$ y demás nulas como se indica en la figura 7.2.1. Nótese que $P_1 = 1$ significa aplicar un momento unitario en el nudo inicial, las deformaciones que se generan por este momento unitario son los elementos de la primera columna de la matriz de flexibilidad f .

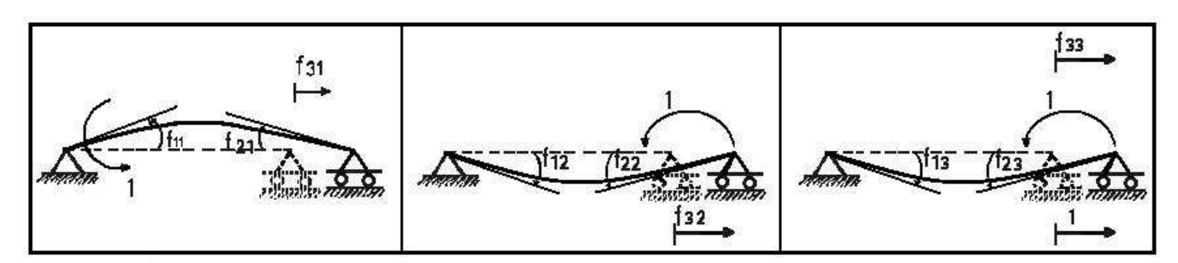


Figura 7.2.1 Carga elemental P_1 **Figura 7.2.2** Carga elemental P_2 **Figura 7.2.3** Carga elemental P_3

En la figura 7.2.2 se aplica un momento unitario en el nudo final y las deformaciones que se producen son los elementos de la segunda columna de f . Finalmente en la figura 7.2.3 se aplica una fuerza axial unitaria en el nudo final y las deformaciones son los elementos de la tercera columna de f . Evidentemente que algunos de los elementos de f pero se los ha dibujado con el objeto de repasar los conceptos indicados en el capítulo anterior.

Para encontrar las deformaciones es necesario encontrar los diagramas de momento, corte y carga axial asociados a cada estado elemental de carga. En la figura 7.3.1 se repite las cargas elementales y se presentan las reacciones de apoyo, en las figuras 7.3.2 a 7.3.4 se indican los respectivos diagramas de momento, corte y carga axial.

- **Estados de Carga**

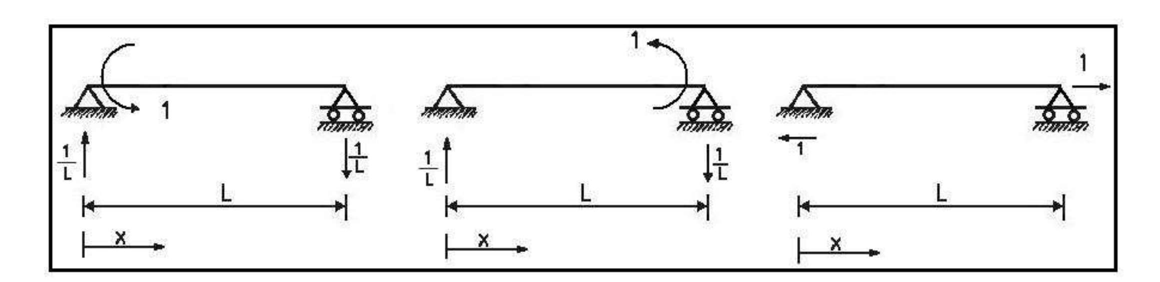


Figura 7.3.1 Cargas elementales aplicadas para obtener las diferentes columnas de f .

❖ **Diagramas de Momento**

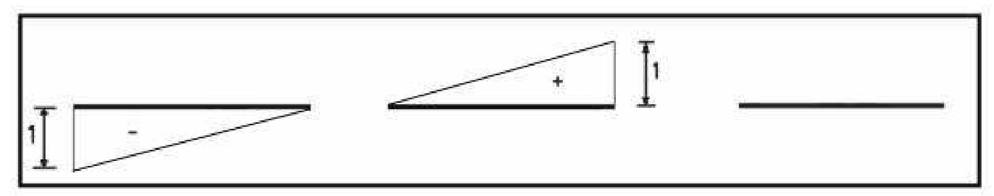


Figura 7.3.2 Diagramas de Momento correspondientes a las cargas elementales.

$$M_1 = -\left(\frac{L - X}{L}\right) \qquad M_2 = \frac{X}{L} \qquad M_3 = 0$$

❖ **Diagramas de Corte**

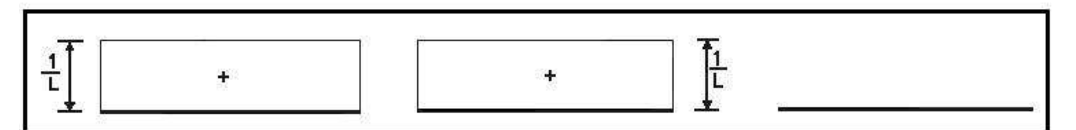


Figura 7.3.3 Diagramas de Corte correspondientes a las cargas elementales.

$$V_1 = \frac{1}{L} \qquad V_2 = \frac{1}{L} \qquad V_3 = 0$$

❖ **Diagramas de Carga Axial**



Figura 7.3.4 Diagramas de Carga Axial correspondientes a las cargas elementales.

$$N_1 = 0 \qquad N_2 = 0 \qquad N_3 = 1$$

Para el cálculo de las deformaciones f_{ij}, de la teoría de estructuras se tiene:

$$f_{ij} = \int_0^L \frac{M_i \; M_j}{EI(x)} dx + \int_0^L \frac{\beta \, V_i \; V_j}{GA(x)} dx + \int_0^L \frac{N_i \; N_j}{EA(x)} dx \tag{8.2}$$

donde, M_i, M_j son los momentos a flexión; V_i, V_j son los cortantes; N_i, N_j son la carga axial; E es el módulo de elasticidad del material; G el módulo de corte estático; $I(x)$ es el momento de Inercia de una sección constante o variable; $A(x)$ es el área de una sección transversal y β es el coeficiente de forma.

Para el caso específico del elemento de la figura 7.1, se tiene:

$$f_{11} = \int_0^L \frac{M_1^2}{EI(x)} dx + \int_0^L \frac{\beta \, V_1^2}{GA(x)} dx \tag{7.3.1}$$

$$f_{12} = f_{21} = \int_0^L \frac{M_1 \ M_2}{EI(x)} dx + \int_0^L \frac{\beta V_1 \ V_2}{GA(x)} dx \qquad (7.3.2)$$

$$f_{13} = f_{31} = 0 \qquad (7.3.3)$$

$$f_{22} = \int_0^L \frac{M_2^2}{EI(x)} dx + \int_0^L \frac{\beta V_2^2}{GA(x)} dx \qquad (7.3.4)$$

$$f_{23} = f_{32} = 0 \qquad (7.3.5)$$

$$f_{33} = \int_0^L \frac{N_3^2}{EA(x)} dx \qquad (7.3.6)$$

Por lo tanto, la forma de la matriz de flexibilidad $\boldsymbol{f}$ de un miembro de sección constante o variable es la siguiente:

$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} f_{11} & -f_{12} & 0 \\ -f_{21} & f_{22} & 0 \\ 0 & 0 & f_{33} \end{bmatrix} \qquad (7.4)$$

Al reemplazar los valores de M_1, M_2, V_1, V_2 y N_3 en las integrales se obtienen los elementos de $\boldsymbol{f}$, que son:

$$f_{11} = \int_0^L \left(\frac{L - X}{L} \right)^2 \frac{dx}{EI(x)} + \int_0^L \beta \left(\frac{1}{L} \right)^2 \frac{dx}{GA(x)} \qquad (7.4.1)$$

$$f_{12} = f_{21} = -\int_0^L \frac{X(L - X)}{L^2} \frac{dx}{EI(x)} + \int_0^L \beta \left(\frac{1}{L} \right)^2 \frac{dx}{GA(x)} \qquad (7.4.2)$$

$$f_{22} = \int_0^L \left(\frac{X}{L} \right)^2 \frac{dx}{EI(x)} + \int_0^L \beta \left(\frac{1}{L} \right)^2 \frac{dx}{GA(x)} \qquad (7.4.3)$$

$$f_{33} = \int_0^L \frac{dx}{EA(x)} \qquad (7.4.4)$$

7.1.2 Coeficiente de forma β

El coeficiente β es adimensional que caracteriza la distribución de las tensiones tangenciales en la sección transversal y depende de la forma de la misma.

- **EJEMPLO N.- 1**

Determinar el valor de β para un elemento de sección rectangular constante, de dimensiones b x h.

- **SOLUCIÓN**

En la figura 7.4 se indica la nomenclatura que se va a utilizar en la solución del ejemplo.

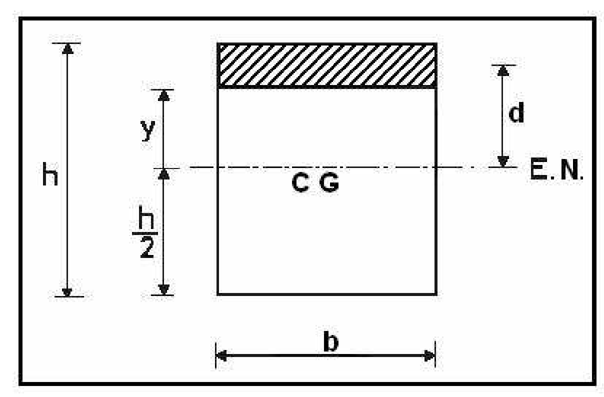


Figura 7.4 Sección transversal constante

En la figura 7.4 se tiene que C.G. es el centro de gravedad; E.N. es el eje neutro, el área rayada es el área de tensiones tangenciales. Se conoce que:

$$\beta = \int \frac{A(x)\, S^2}{b^2\; I(x)^2}\, dA \qquad (7.5)$$

donde S es el momento estático del área rayada respecto al eje neutro; dA es el diferencial de área. Las restantes variables han sido ya definidas. Al ser el elemento de sección constante, se tiene:

$$\beta = \frac{A}{I^2 b^2} \int S^2\; dA \qquad (7.6.1)$$

De la figura 7.4 se observa que:

$$S = b\left(\frac{h}{2} - Y\right) * \left[Y + \left(\frac{h}{2} - Y\right)\frac{1}{2}\right]$$

Áreas * Distancia

$$S = b\left(\frac{h}{2} - Y\right)\left(\frac{Y}{2} + \frac{h}{4}\right) = \frac{b}{2}\left(\frac{h}{2} - Y\right)\left(\frac{h}{2} + Y\right)$$

$$S = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - Y^2\right) \qquad (7.6.2)$$

Por otro lado, se conoce que:

$$dA = b\; dY \qquad (7.6.3)$$

$$A = b\; h \qquad (7.6.4)$$

$$I = \frac{b\; h^3}{12} \qquad (7.6.5)$$

Nótese que se ha obtenido la Inercia con respecto al centro de gravedad el mismo que es colineal con el eje neutro. Al reemplazar las ecuaciones (7.6.2) a (7.6.5) en (7.6.1) se obtiene:

$$\beta = \frac{b\; h}{\left(\frac{b\; h^3}{12}\right)^2 b^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[\frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - Y^2\right)\right]^2 b\; dY$$

$$\beta = \frac{36}{h^5} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{h^2}{4} - Y^2 \right)^2 dY$$

Al integrar solo en la parte superior, se tiene:

$$\beta = \frac{72}{h^5} \int_{0}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{h^2}{4} - Y^2 \right)^2 dY = \frac{72}{h^5} \int_{0}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{h^4}{16} - \frac{h^2 Y^2}{2} + Y^4 \right) dY$$

$$\beta = \frac{72}{h^5} \left| \frac{h^4\, Y}{16} - \frac{h^2\, Y^3}{6} + \frac{Y^5}{5} \right|_0^{\frac{h}{2}} = \frac{72}{h^5} \left(\frac{h^5}{32} - \frac{h^5}{48} + \frac{h^5}{160} \right) = 72 \left(\frac{15 - 10 + 3}{480} \right) = \frac{576}{480}$$

De donde:

$$\beta = \frac{6}{5} = 1.2$$

7.1.3 Elementos de sección constante considerando el efecto de corte

En este caso tanto la inercia como el área de la sección transversal son constantes. Por consiguiente salen de las integrales definidas de (7.4.1) a (7.4.4).

$$f_{11} = \frac{1}{L^2\, EI} \int_0^L (L - X)^2\, dX + \frac{\beta}{L^2\, GA} \int_0^L dX \qquad (7.7.1)$$

$$f_{12} = f_{21} = -\frac{1}{L^2\, EI} \int_0^L X (L - X) dX + \frac{\beta}{L^2\, GA} \int_0^L dX \qquad (7.7.2)$$

$$f_{22} = \frac{1}{L^2 EI} \int_0^L X^2\, dX + \frac{\beta}{L^2\, GA} \int_0^L dX \qquad (7.7.3)$$

$$f_{33} = \frac{1}{EA} \int_0^L dX \qquad (7.7.4)$$

- **Cálculo de** f_{11}

$$f_{11} = \frac{1}{L^2 EI} \int_0^L \left(L^2 - 2LX + X^2 \right) dX + \frac{\beta}{GAL^2} \int_0^L dX$$

$$f_{11} = \frac{1}{L^2 EI} \left| L^2 X - LX^2 + \frac{X^3}{3} \right|_0^L + \frac{\beta}{GAL^2} \left| X \right|_0^L$$

$$f_{11} = \frac{1}{L^2 EI} \left(L^3 - L^3 + \frac{L^3}{3} \right) + \frac{\beta}{GAL} = \frac{L}{3EI} + \frac{\beta}{GAL}$$

$$f_{11} = \frac{L}{3EI}\left(1 + \frac{3\beta EI}{GAL^2}\right)$$

Se denomina:

$$\phi = \frac{3\beta EI}{GAL^2} \qquad (7.7.5)$$

Luego:

$$f_{11} = \frac{L}{3EI}(1+\phi)$$

- **Cálculo de** f_{22}

$$f_{22} = \frac{1}{L^2 EI}\left|\frac{X^3}{3}\right|_0^L + \frac{\beta}{L^2 GA}\left|X\right|_0^L = \frac{L}{3EI} + \frac{\beta}{LGA} = \frac{L}{3EI}(1+\phi)$$

Al proceder en forma similar se encuentran los demás elementos de la matriz de flexibilidad que resulta:

$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} \frac{L}{3EI}(1+\phi) & -\frac{L}{6EI}(1-2\phi) & 0 \\ -\frac{L}{6EI}(1-2\phi) & \frac{L}{3EI}(1+\phi) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{EA} \end{bmatrix} \qquad (7.8)$$

donde ϕ es un factor adimensional que mide el efecto de corte.

7.1.4 Elementos de sección constante sin considerar el efecto de corte

El efecto de corte se evalúa a través del parámetro ϕ. En caso de no considerarlo se debe reemplazar $\phi = 0$ en la ecuación matricial (7.8), resultando:

$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} \frac{L}{3EI} & -\frac{L}{6EI} & 0 \\ -\frac{L}{6EI} & \frac{L}{3EI} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{EA} \end{bmatrix} \qquad (7.9)$$

Se debe notar que la matriz de flexibilidad calculada en éste apartado corresponde al sistema de coordenadas del elemento indicado en la figura 7.1.

7.1.5 Elementos axialmente rígidos

Como se estudió en el capítulo anterior, el sistema de coordenadas $P-p$ de un elemento axialmente rígido es el presentado en la figura 7.5, se aprecia que no existe la deformación axial p_3.

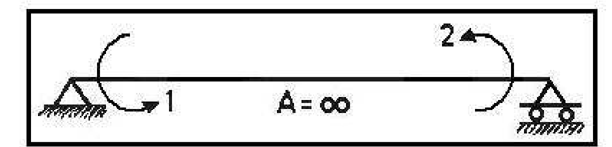


Figura 7.5 Sistema $P-p$ para un elemento axialmente rígido.

La matriz de flexibilidad f para el sistema de coordenadas de la figura 7.5 y al no considerar el efecto de corte, es:

$$f = \begin{bmatrix} \frac{L}{3EI} & -\frac{L}{6EI} \\ -\frac{L}{6EI} & \frac{L}{3EI} \end{bmatrix} \tag{7.10}$$

Nótese que se ha eliminado la tercera fila y columna de la ecuación (7.9) para llegar a la ecuación (7.10). Esta es la forma más común de la matriz de flexibilidad para elementos axialmente rígidos. Se puede también utilizar el sistema de coordenadas de la figura 7.1 pero en este caso la matriz de flexibilidad del elemento será:

$$f = \begin{bmatrix} \frac{L}{3EI} & -\frac{L}{6EI} & 0 \\ -\frac{L}{6EI} & \frac{L}{3EI} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7.11}$$

La matriz definida en (7.11) es singular. En consecuencia no existe inversa. Por lo tanto la matriz de rigidez no existe cuando se trabaja con el sistema de coordenadas de la figura 7.1. Para evitar éste tipo de problemas mejor es considerar el sistema de la figura 7.5 y la matriz de flexibilidad es la indicada en la ecuación (7.10).

7.1.6 Elementos transversalmente rígidos

Por definición estos elementos solo pueden deformarse axialmente siendo el sistema de coordenadas el presentado en la figura 7.6. Por lo tanto la matriz de flexibilidad para un elemento que tiene inercia infinita es:

$$f = \begin{bmatrix} \frac{L}{EA} \end{bmatrix} \tag{7.12}$$

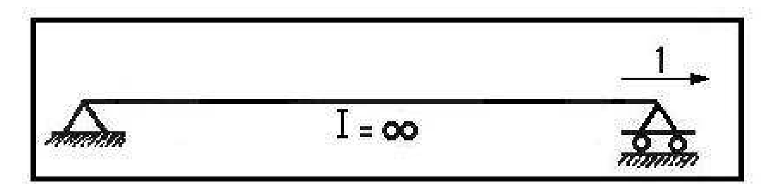


Figura 7.6 Sistema de coordenadas $P - p$ para un elemento transversalmente rígido.

Al igual que en el apartado anterior, se puede considerar como sistema de coordenadas de un elemento el mostrado en la figura 7.1. En éste caso se tiene:

$$f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{EA} \end{bmatrix} \tag{7.13}$$

Nuevamente no existe inversa de la matriz (7.13) en consecuencia para las coordenadas de la figura 7.1 si el elemento es transversalmente rígido no existe matriz de rigidez del elemento.

7.1.7 Relación fuerza deformación

En éste capítulo a los elementos se los ha analizado como si fueran estructuras mediante la colocación de vínculos que eliminan los desplazamientos como cuerpo rígido se puede indicar que existe una relación entre las cargas P (mayúscula) y las deformaciones p (minúscula) al igual que en una estructura. Esta relación se obtiene a través de la matriz de flexibilidad de la siguiente manera:

$$p = f\ P \tag{7.14}$$

Por lo tanto las cargas internas de un elemento se transforman en deformaciones mediante la matriz de flexibilidad de un elemento. A la matriz f también se la conoce con el nombre de matriz fuerza deformación.

7.2 MATRIZ DE RIGIDEZ DE UN ELEMENTO k

7.2.1 Forma general

La matriz de rigidez k (minúscula) de un elemento lineal se va a obtener invirtiendo la matriz de flexibilidad.

$$k = f^{-1} \tag{7.15}$$

Para un elemento de sección constante o variable, la forma general de la matriz de rigidez asociada al sistema de coordenadas del elemento de la figura 7.1 es la siguiente:

$$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 \\ k_{21} & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} \end{bmatrix} \qquad (7.16)$$

Donde:

$$k_{11} = \frac{f_{22}}{\Delta} \qquad k_{22} = \frac{f_{11}}{\Delta} \qquad k_{33} = \frac{1}{f_{33}}$$

$$k_{12} = k_{21} = -\frac{f_{21}}{\Delta} \qquad \Delta = f_{11} * f_{22} - (f_{21})^2$$

En el apartado 7.1.1 se indican las integrales mediante las cuales se evalúan los términos de la matriz de flexibilidad para un elemento de sección constante o variable.

7.2.2 Elementos de sección constante considerando el efecto de corte

La matriz de rigidez de un elemento lineal de sección constante, considerando el efecto de corte, se obtiene invirtiendo la matriz (7.8). El resultado que se obtiene es:

$$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L}\frac{(1+\phi)}{(1+4\phi)} & \frac{2EI}{L}\frac{(1-2\phi)}{(1+4\phi)} & 0 \\ \frac{2EI}{L}\frac{(1-2\phi)}{(1+4\phi)} & \frac{4EI}{L}\frac{(1+\phi)}{(1+4\phi)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \qquad (7.17)$$

7.2.3 Elementos de sección constante sin considerar el efecto de corte

Al sustituir $\phi = 0$ en la matriz (7.17), se encuentra la matriz de rigidez de un miembro lineal de sección constante, sin considerar el efecto de corte. Esta es:

$$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \qquad (7.18)$$

7.2.4 Elementos axialmente rígidos

Por lo expresado en el apartado 7.1.5 de éste capítulo, el sistema de coordenadas de un elemento axialmente rígido es el presentado en la figura 7.5. Al eliminar la tercera fila y columna de la matriz (7.18), se encuentra la matriz de rigidez para un elemento de sección constante en el que se ignora el efecto de corte. Esta es:

$$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \qquad (7.19)$$

Si se desea considerar el efecto de corte, en la matriz (7.17) se debe eliminar la tercera fila y columna.

Es necesario indicar que si bien $p_3 = 0$ (minúscula) esto no implica que la fuerza axial sea nula. En efecto se tiene que $P_3 \neq 0$ (mayúscula).

7.2.5 Elementos transversalmente rígidos

Este es el caso de las armaduras planas o celosías en las que se solo existe deformación axial en los elementos. El sistema de coordenadas del elemento se presenta en la figura 7.6. La matriz de rigidez es:

$$\boldsymbol{k} = \left[\frac{EA}{L} \right] \qquad (7.20)$$

En pórticos planos con elementos transversalmente rígidos existen momentos en los nudos inicial y final que son necesarios para cumplir con la condición de $I = \infty$.

7.2.6 Relación deformación fuerza

Así como para una estructura se tiene que $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{K}\ \boldsymbol{q}$ para un elemento lineal se tiene que:

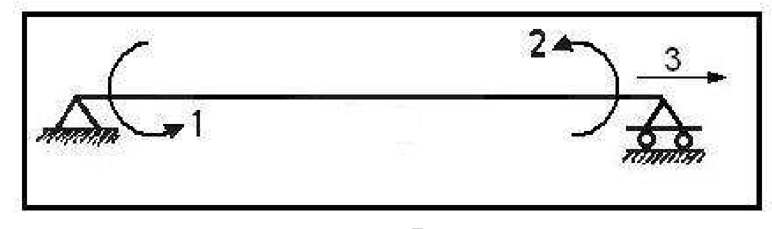
$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{k}\ \boldsymbol{p} \qquad (7.21)$$

Por lo tanto las deformaciones de un elemento se transforman en fuerzas internas por medio de la matriz de rigidez de miembro $\boldsymbol{k}$, también conocida como matriz deformación fuerza.

Con el objeto de aclarar algunos conceptos se desarrolla la ecuación (7.21) para un elemento lineal de sección constante, en el que no se considera el efecto de corte. Se tiene:

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

Se está considerando el sistema de coordenadas de la figura 7.1, para recordar el significado del vector $\boldsymbol{P}$ (mayúscula) y del vector $\boldsymbol{p}$ (minúscula) se presenta nuevamente este gráfico.



Sistema $\boldsymbol{P-p}$

Al sustituir los vectores $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{p}$ y la matriz de rigidez $\boldsymbol{k}$ en la ecuación (7.21) se obtiene:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

Desarrollando se tiene:

$$P_1 = \frac{4EI}{L} p_1 + \frac{2EI}{L} p_2 \qquad (7.22.1)$$

$$P_2 = \frac{2EI}{L} p_1 + \frac{4EI}{L} p_2 \qquad (7.22.2)$$

$$P_3 = \frac{EA}{L} p_3 \qquad (7.22.3)$$

Estas expresiones se las estudia en Estructuras con otra nomenclatura. Se hace hincapié en un concepto que se indicó en el capítulo 2 referente a que se está resolviendo únicamente el problema primario. Por lo tanto se debe añadir las acciones de empotramiento perfecto.

7.3 OBTENCIÓN DE f Y k UTILIZANDO LA MATRIZ T

7.3.1 Planteamiento del Problema

Se desea calcular la matriz de flexibilidad y de rigidez para el elemento lineal de la figura 7.7, en el cual los desplazamientos como cuerpo rígido se los ha omitido mediante la colocación de un empotramiento en el nudo inicial. A este sistema de coordenadas se lo diferencia del anterior con la utilización de un asterisco como subíndice.

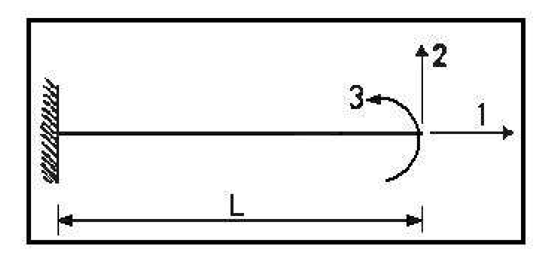


Figura 7.7 Nuevo sistema de coordenadas del elemento $\boldsymbol{P^* - p^*}$

Por lo tanto k^* y f^* serán las matrices de rigidez y de flexibilidad del elemento para el sistema de coordenadas de la figura 7.7. Están relacionados de la siguiente manera:

$$P^* = k^* \; p^* \qquad\qquad p^* = f^* \; P^* \qquad\qquad k^* \; f^* = I \tag{7.23}$$

Para encontrar k^* y f^* se puede proceder de una manera similar a la desarrollada en los apartados 7.1 y 7.2 de éste capítulo. Se deja al estudiante el cálculo de ésta manera: Otra forma de hacerlo es por medio de la matriz de transformación de coordenadas. En éste caso el sistema viejo de coordenadas es el mostrado en la figura 7.1 y el sistema nuevo de coordenadas el de la figura 7.7. Por lo tanto de acuerdo a lo estudiado en el capítulo 5 el cálculo se lo puede realizar de dos formas:

i) Por medio de la matriz T que relaciona deformaciones: $p = T \; p^*$.

ii) Por medio de la matriz T_1 que relaciona cargas internas: $P = T_1 \; P^*$

7.3.2 Solución del Problema

Si se considera unos desplazamientos virtuales en un elemento cualquiera que forma parte de un pórtico plano, por ejemplo el de la figura 7.8.1 se observa que la inmovilización como cuerpo rígido puede hacerse considerando los vínculos de la figura 7.8.2 o el empotramiento de la figura 7.8.3.

Entre los sistemas de coordenadas virtuales, figuras 7.8.2 y 7.8.3, se establece la siguiente relación geométrica.

$$\delta p = T \; \delta p^* \tag{7.24.1}$$

Ahora bien, el trabajo virtual T.V. producido por las cargas que actúan en la figura 7.1 en los desplazamientos virtuales de la figura 7.8.2 tiene que ser igual al trabajo virtual producido por las cargas que actúan en la figura 7.7 sobre los desplazamientos virtuales de la figura 7.8.3 Esto se debe a que el trabajo virtual es independiente del sistema de coordenadas en que se mida.

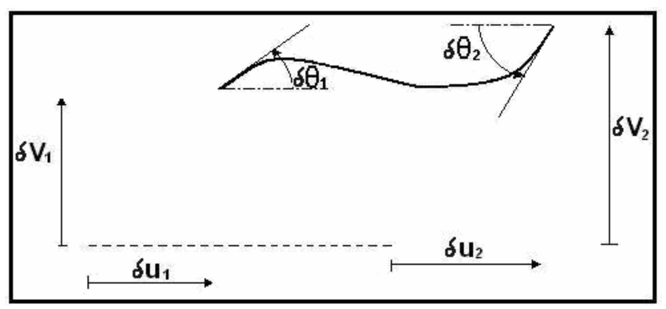


Figura 7.8.1 Desplazamientos Virtuales.

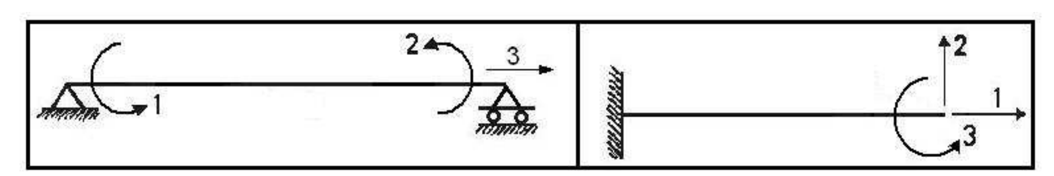


Figura7.8.2 Sistema δp **Figura 7.8.3** Sistema δp^*

En consecuencia, se tiene:

$$TV = \delta p^t \; P = \delta p^{*t} P^* \tag{7.24.2}$$

Al reemplazar (7.24.1) en (7.24.2)

$$\left(T\ \delta p^{*}\right)^{t}\ P = \delta p^{*\,t}\, P^{*} \qquad \Rightarrow \qquad \delta p^{*t}\ T^{t}\ P = \delta p^{*t}\ P^{*}$$

Por ser δp^{*} arbitrario, se tiene:

$$P^{*} = T^{t}\ P$$

Pero $P = k\ p$. Luego:

$$P^{*} = T^{t}\ k\ p$$

Pero $p = T\ p^{*}$. En consecuencia se tiene que:

$$P^{*} = \left(T^{t}\ k\ T\right) p^{*} \qquad (7.25)$$

Al comparar las ecuaciones (7.25) y (7.23). se concluye que:

$$k^{*} = T^{t}\ k\ T \qquad (7.26)$$

Por lo tanto la nueva matriz de rigidez k^{*} se puede obtener a partir de la matriz T, que relaciona las deformaciones de los sistemas de coordenadas de las figuras 7.1 y 7.7

La ecuación (7.26) es muy utilizada en el Análisis Matricial de Estructuras y en Dinámica de Estructuras ya que conocida la matriz de rigidez k en un sistema determinado de coordenadas se puede hallar por medio de la matriz T la nueva matriz de rigidez en otro sistema de coordenadas.

Por otra parte, una forma de hallar la matriz de flexibilidad de un elemento f^{*} sería calculando la matriz inversa de k^{*} y otra por medio de la matriz T_1 (Punto de vista estático). Al examinar el procedimiento para hallar k^{*} se observa que se ha ejecutado una repetición de conceptos indicados en el capítulo 5, razón por la cual se deja al lector la demostración de:

$$f^{*} = T_1^{t}\ f\ T_1$$

Resumen

La matriz de rigidez k^{*} se obtiene utilizando la geometría:

$$p = T\ p^{*} \qquad \Rightarrow \qquad k^{*} = T^{t}\ k\ T$$

La matriz de flexibilidad f^{*} se encuentra por medio de la estática.

$$P = T_1\ P^{*} \qquad \Rightarrow \qquad f^{*} = T_1^{t}\ f\ T_1$$

Finalmente se deja al lector la demostración de los siguientes teoremas:

1. Si $p = T\ p^{*}$. Entonces $P^{*} = T^{t}\ P$.

2. Si $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{T}_1 \ \boldsymbol{P}^*$. Entonces $\boldsymbol{P}^* = \boldsymbol{T}_1^t \ \boldsymbol{P}$

7.3.3 Cálculo de la matriz de rigidez usando la geometría

En el apartado 7.2 de éste capítulo, se obtuvo la matriz de rigidez de un elemento $\boldsymbol{k}$ para el sistema de coordenadas de la figura 7.9.1. Ahora se desea calcular $\boldsymbol{k}^*$ para el sistema $\boldsymbol{P}^* - \boldsymbol{p}^*$ de la figura 7.9.2, esto se lo realiza por medio de la matriz $\boldsymbol{T}$ definida por la expresión $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{T} \ \boldsymbol{p}^*$.

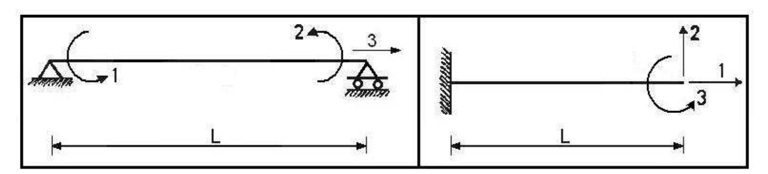


Figura 7.9.1 Sistema $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}$ **Figura 7.9.2** Sistema $\boldsymbol{P}^* - \boldsymbol{p}^*$

❖ **Cálculo de la matriz T**

- Primera columna de $\boldsymbol{T}$

$$p_1^* = 1 \quad y \quad p_i^* = 0 \quad i \neq 1$$

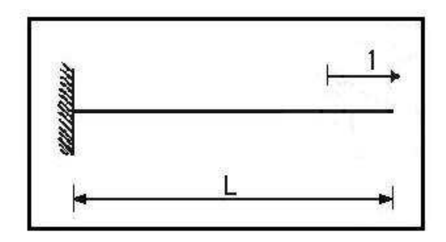


Figura 7.9.3 Deformada elemental p_1^*

$$p_1 = 0 \qquad p_2 = 0 \qquad p_3 = 1$$

- Segunda columna de $\boldsymbol{T}$

$$p_2^* = 1 \quad y \quad p_i^* = 0 \quad i \neq 2$$

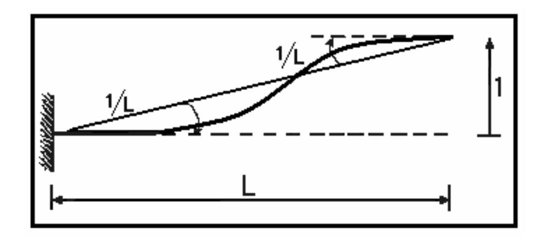


Figura 7.9.4 Deformada elemental p_2^*

$$p_1 = -\frac{1}{L} \qquad p_2 = -\frac{1}{L} \qquad p_3 = 0$$

- Tercera columna de $\boldsymbol{T}$

$$p_3^* = 1 \quad y \quad p_i^* = 0 \quad i \neq 3$$

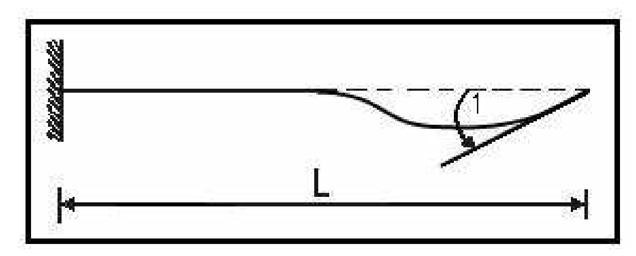


Figura 7.9.5 Deformada elemental p_3^*

$$p_1 = 0 \qquad\qquad p_2 = 1 \qquad\qquad p_3 = 0$$

Por lo tanto la matriz $\boldsymbol{T}$ es:

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El lector deberá justificar las deformadas presentadas en las figuras 7.9.3 a 7.9.5, así como los elementos de la matriz $\boldsymbol{T}$. Se recuerdan las fórmulas con las que se obtienen p_1, p_2 y p_3.

$$p_1 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L} \qquad\qquad p_2 = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{L} \qquad\qquad p_3 = u_2 - u_1$$

La matriz de rigidez para el sistema de coordenadas de la figura 7.9.2 y para el caso de un elemento de sección constante se obtiene mediante la ecuación (7.26).

$$\boldsymbol{k}^* = \boldsymbol{T}^t \ \boldsymbol{k} \ \boldsymbol{T}$$

$$\boldsymbol{k}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{k}^* = \begin{bmatrix} \frac{\boldsymbol{EA}}{\boldsymbol{L}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12\boldsymbol{EI}}{\boldsymbol{L}^3} & -\frac{6\boldsymbol{EI}}{\boldsymbol{L}^2} \\ 0 & -\frac{6\boldsymbol{EI}}{\boldsymbol{L}^2} & \frac{4\boldsymbol{EI}}{\boldsymbol{L}} \end{bmatrix}$$

Se ha encontrado la matriz de rigidez del elemento para el sistema de coordenadas indicado en la figura 7.9.2, para el caso en que no se considera el efecto de corte. Cuando se considera dicho efecto la matriz de rigidez resulta.

$$k^* = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3(1+4\phi)} & -\frac{6EI}{L^2(1+4\phi)} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2(1+4\phi)} & \frac{4EI(1+\phi)}{L(1+4\phi)} \end{bmatrix}$$

7.3.4 Cálculo de la matriz de flexibilidad usando la estática

Para el efecto es necesario calcular la matriz $\boldsymbol{T_1}$, matriz que relaciona las cargas internas $\boldsymbol{P}$ de la figura 7.9.1 con las cargas internas $\boldsymbol{P^*}$ de la figura 7.9.2. La relación es:

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{T_1}\ \boldsymbol{P^*}$$

❖ **Cálculo de la matriz $\boldsymbol{T_1}$**

- Primera columna de $\boldsymbol{T_1}$

$$\boldsymbol{P_1^*} = 1 \quad \boldsymbol{y} \quad \boldsymbol{P_i^*} = 0 \quad \boldsymbol{i} \neq 1$$

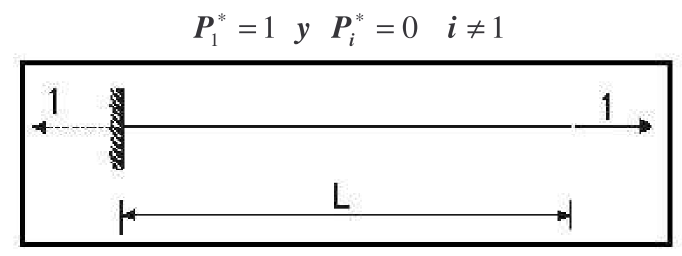


Figura 7.9.6 Fuerza axial en el voladizo igual a 1.

$$P_1 = 0 \qquad P_2 = 0 \qquad P_3 = 1$$

- Segunda columna de $\boldsymbol{T_1}$

$$P_2^* = 1 \quad y \quad P_i^* = 0 \quad i \neq 2$$

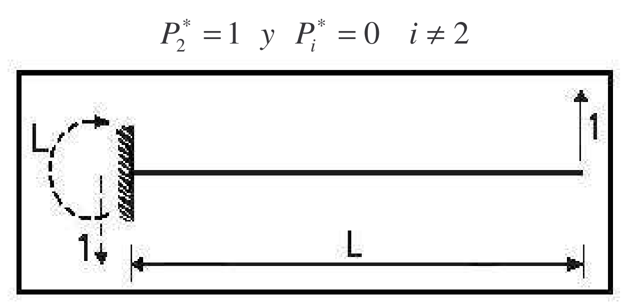


Figura 7.9.7 Fuerza de corte en el voladizo igual a 1.

$$P_1 = 0 \qquad P_2 = 0 \qquad P_3 = 1$$

- Tercera columna de $\boldsymbol{T}_1$

$$P_3^* = 1 \quad y \quad P_i^* = 0 \quad i \neq 3$$

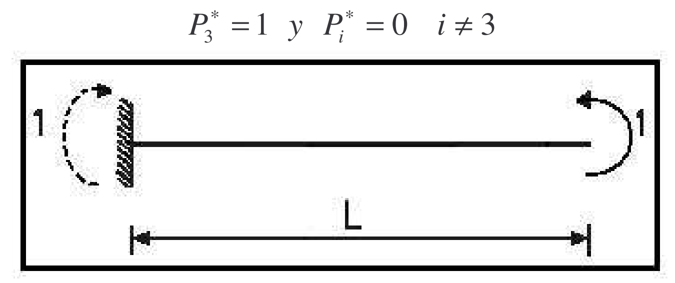


Figura 7.9.8 Momento en el voladizo igual a 1.

$$P_1 = -1 \qquad P_2 = 1 \qquad P_3 = 0$$

Por lo tanto la matriz $\boldsymbol{T}_1$ vale:

$$\boldsymbol{T}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -L & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz de flexibilidad resulta:

$$\boldsymbol{f}^* = \boldsymbol{T}_1^t \ \boldsymbol{f} \ \boldsymbol{T}_1$$

$$\boldsymbol{f}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -L & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{L}{3EI} & -\frac{L}{6EI} & 0 \\ -\frac{L}{6EI} & \frac{L}{3EI} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{EA} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -L & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{f}^* = \begin{bmatrix} \frac{L}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^3}{3EI} & \frac{L^2}{2EI} \\ 0 & \frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} \end{bmatrix}$$

Cuando se considera el efecto de corte se tiene:

$$f^* = \begin{bmatrix} \frac{L}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^3}{3EI}(1+\phi) & \frac{L^2}{2EI} \\ 0 & \frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} \end{bmatrix}$$

7.3.5 Obtención de k y f cuando se cambia la numeración del sistema de coordenadas

Si el sistema de coordenadas del elemento lineal de la figura 7.7 se numera en forma diferente, por ejemplo según lo expresado en la figura 7.10, y si se desea obtener la matriz de rigidez o la matriz de flexibilidad en éste nuevo sistema de coordenadas, evidentemente que la forma más fácil de lograr éste objetivo es a través de la matriz de transformación de coordenadas.

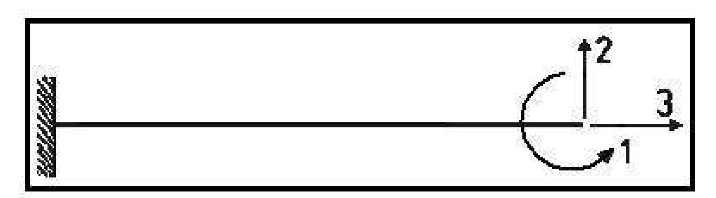


Figura 7.10 Nuevo sistema $P^* - p^*$

En el sistema mostrado en la figura 7.10, p_3^* es la deformación axial mientras que en el sistema de la figura 7.7 ésta corresponde a p_1. Es decir se cambio la numeración de la deformación **uno por tres y viceversa**. Ahora el sistema *viejo* de coordenadas corresponde al de la figura 7.7

Para presentar el método directo de cálculo de la matriz de rigidez y de la matriz de flexibilidad cuando se cambia el sistema de numeración se va a explicar a continuación el procedimiento de cálculo pero orientado a la matriz de rigidez únicamente pero el procedimiento es similar para la matriz de flexibilidad.

Por didáctica se indican nuevamente estos dos sistemas de coordenadas en las figuras 7.11.1 y 7.11.2 con el objeto de tener una mejor compresión.

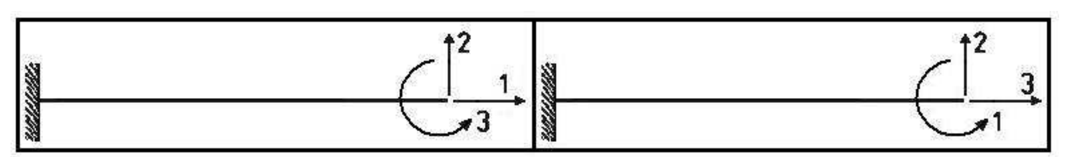


Figura 7.11.1 Sistema viejo de coordenadas **Figura 7.11.2** Sistema nuevo de coordenadas.

La nueva matriz de rigidez $\boldsymbol{k}^*$ es igual a $\boldsymbol{T}^t\ \boldsymbol{k}\ \boldsymbol{T}$ siendo $\boldsymbol{k}$ la matriz de rigidez para el sistema de coordenadas de la figura 7.11.1 y la matriz $\boldsymbol{T}$ es la matriz de paso desde las coordenadas de la figura 7.11.1 a las coordenadas de la figura 7.11.2. La matriz $\boldsymbol{T}$ que se obtiene es:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Al efectuar la operación $\boldsymbol{k}^* = \boldsymbol{T}^t\ \boldsymbol{k}\ \boldsymbol{T}$, se obtiene:

$$\boldsymbol{k}^* = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}$$

Se llega al mismo resultado con la siguiente regla: se cambian los elementos de la primera fila a la tercera fila y posteriormente los elementos de la primera columna a la tercera columna en el sistema *viejo* de coordenadas. A continuación se indica el cambio de los elementos de la primera fila a la tercera fila.

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{EA}{L} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora se cambia la primera columna a la tercera y viceversa, con lo que se halla $\boldsymbol{k}^*$

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{EA}{L} & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}$$

En consecuencia **para obtener la matriz de rigidez de un elemento en el cual se ha cambiado el sistema de numeración de sus coordenadas, se deberá intercambiar las filas y columnas de acuerdo al cambio de numeración que se haya efectuado**. Lo propio se hace para obtener la matriz de flexibilidad. La regla indicada no solo se aplica a un elemento sino también a una estructura.

7.4 EJERCICIOS RESUELTOS

- **EJEMPLO N.- 1**

Encontrar el coeficiente de forma β de la sección rectangular de la figura 7.4 si el momento estático S y el momento de inercia a flexión I se calculan con respecto al eje X que se indica en la figura 7.12.

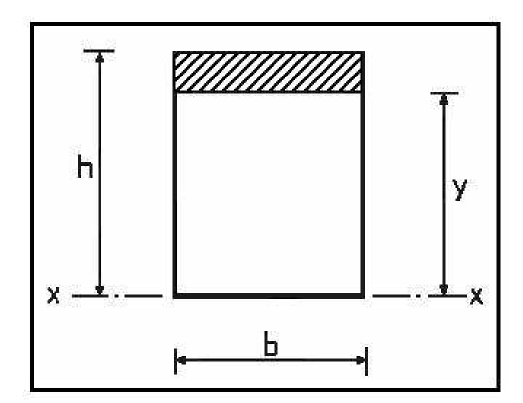


Figura 7.12 Ubicación del X para ejemplo N.- 1

- **SOLUCIÓN**

Por ser de sección constante:

$$\beta = \frac{A}{I_X^2 \; b^2} \int S_X^2 \; dA$$

$$dA = b\; dY \qquad A = b\; h \qquad I = \frac{b\; h^3}{3}$$

$$S_X = b(h-Y)\left(Y + \frac{h-Y}{2}\right) = \frac{b}{2}(h-y)(h+y)$$

$$S_X = \frac{b}{2}\left(h^2 - Y^2\right)$$

$$\beta = \frac{b\; h}{\left(\frac{b\; h^3}{3}\right)^2 b^2} \int_0^h \left(\frac{b}{2}\left(h^2 - Y^2\right)\right)^2 b\; dY$$

$$\beta = \frac{9b^4 h}{4b^4 h^6} \int_0^h \left(h^4 - 2h^2Y^2 + Y^4\right) dY = \frac{9}{4h^5} \left| h^4 Y - 2h^2 \frac{Y^3}{3} + \frac{Y^5}{5} \right|_0^h$$

$$\beta = \frac{9}{4h^5}\left(h^5 - 2\frac{h^5}{3} + \frac{h^5}{5}\right) = \frac{9}{4}\left(\frac{15-10+3}{15}\right) = \frac{9}{4} * \frac{8}{15} = \frac{6}{5} = 1.2$$

- **EJEMPLO N.- 2**

Encontrar el valor de ϕ para una columna cuadrada de 30 cm. por 30 cm. (b x h) y para una columna rectangular de 30 cm. por 150 cm. Si $E = 2173706.5\, T/m^2$ y $G = 869482.6\, T/m^2$. En los dos casos la longitud es de 3.0 m.

- **SOLUCIÓN**

  - **Columna de b=30 cm. y h=30 cm.**

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{0.3 * 0.3^3}{12} = 0.000675\ m^4$$
$$A = b\ h = 0.3 * 0.3 = 0.09\ m^2$$
$$\phi = \frac{3\beta EI}{GAL^2} = \frac{3 * 1.2 * 2173706.5 * 0.000675}{869482.6 * 0.09 * 3.0^2} = 0.0075$$

  - **Columna de b=30 cm. y h=150 cm.**

$$I = \frac{b\ h^3}{12} = \frac{0.3 * 1.5^3}{12} = 0.084375\ m^4$$
$$A = b\ h = 0.3 * 1.5 = 0.45\ m^2$$
$$\phi = \frac{3\beta EI}{GAL^2} = \frac{3 * 1.2 * 2173706.5 * 0.084375}{869482.6 * 0.45 * 3^2} = 0.1875$$

En columnas de pequeñas dimensiones el valor de ϕ es muy pequeño y se lo puede despreciar, en el ejemplo desarrollado se ha visto que para la columna cuadrada de 30 cm. de lado el valor de ϕ es 0.0075 prácticamente cero. En cambio en columnas de grandes dimensiones o en muros de corte el valor de ϕ tiene importancia, su omisión puede conducir a errores apreciables, lo propio sucede en vigas esbeltas. En la columna de 30/150 el valor de ϕ es 0.1875 cantidad distante de cero.

- **EJEMPLO N.- 3**

Para la columna rectangular de 30 cm. por 150 cm. (b x h) del ejemplo anterior, determinar la matriz de rigidez del elemento para el sistema de coordenadas del elemento de la figura 7.1. Calcular de dos formas: i) Sin considerar el efecto de corte, y, ii) Considerando el efecto de corte.

- **SOLUCIÓN**

  - **Sin considerar el efecto de corte**

$$\frac{4EI}{L} = \frac{4 * 2173706.5 * 0.084375}{3} = 244541.97\ Tm.$$

$$\frac{2EI}{L}=\frac{2173706.5*0.084375}{3}=122270.98\ Tm.$$

$$\frac{EA}{L}=\frac{2173706.5*0.45}{3}=326055.97\frac{T}{m}$$

$$\boldsymbol{k}=\begin{bmatrix}\frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0\\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & 0\\ 0 & 0 & \frac{EA}{L}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}244541.97 & 122270.98 & 0.00\\ 122270.98 & 244541.97 & 0.00\\ 0.00 & 0.00 & 326055.97\end{bmatrix}$$

- **Considerar el efecto de corte**

$$\frac{1+\phi}{1+4\phi}=\frac{1+0.1875}{1+4*0.1875}=0.67857 \quad\Rightarrow\quad \frac{4EI}{L}\frac{1+\phi}{1+4\phi}=244541.97*0.67857=165938.84$$

$$\frac{1-2\phi}{1+4\phi}=\frac{1-2*0.1875}{1+4*0.1875}=0.35714 \quad\Rightarrow\quad \frac{2EI}{L}\frac{1-2\phi}{1+4\phi}=122270.98*0.35714=43667.857$$

$$\boldsymbol{k}=\begin{bmatrix}\frac{4EI}{L}\frac{(1+\phi)}{(1+4\phi)} & \frac{2EI}{L}\frac{(1-2\phi)}{(1+4\phi)} & 0\\ \frac{2EI}{L}\frac{(1-2\phi)}{(1+4\phi)} & \frac{4EI}{L}\frac{(1+\phi)}{(1+4\phi)} & 0\\ 0 & 0 & \frac{EA}{L}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}165938.84 & 43667.857 & 0.00\\ 43667.857 & 165938.84 & 0.00\\ 0.00 & 0.00 & 326055.97\end{bmatrix}$$

Al comparar las dos matrices de rigidez del elemento se observa que existe una diferencia notable en los valores. Por lo tanto es importante considerar el efecto de corte. Actualmente se disponen ordenadores con mucha capacidad de memoria de tal manera que es mejor considerar el efecto de corte para cualquier tipo de elemento su programación es muy sencilla. En el libro únicamente por efecto de escritura no se considerará el efecto de corte.

- **EJEMPLO N.- 4**

Encontrar el giro en el nudo inicial de la viga de la figura 7.13 si se aplica un Momento de 5Tm. La viga es de 30/30 cm., y tiene un módulo de elasticidad de 2173706.5 T/m2.

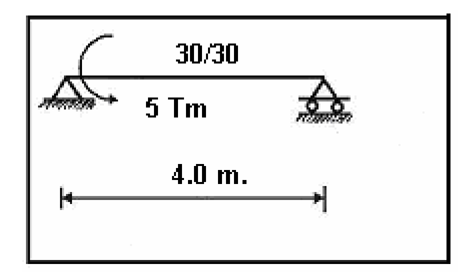


Figura 7.13 Viga de sección constante de ejemplo 4.

- **SOLUCIÓN**

Sea α el giro en el nudo inicial debido al Momento de 5 Tm. Por otro lado se conoce que al aplicar un momento unitario el giro en el nudo inicial es de $\frac{L}{3EI}$. Como se está trabajando en el rango elástico al aplicar un momento de 5 Tm. el giro será $\alpha = \frac{5L}{3EI}$

$$EI = 2173706.5 * 0.000675 = 1467.2518\ Tm^2$$

$$\alpha = \frac{5L}{3EI} = \frac{5\ Tm * 4m}{3 * 1467.2518\ Tm^2} = 0.0045436\ rad.$$

- **EJEMPLO N.- 5**

Encontrar la rigidez $\frac{4EI}{L}$ para una viga de sección constante a partir de la solución del problema de flexión y empleando la definición de rigidez.

- **SOLUCIÓN**

Por definición el valor de $\frac{4EI}{L}$ es el momento que hay que aplicar en el nudo inicial para que ese nudo rote la unidad y la rotación en el nudo final sea cero.

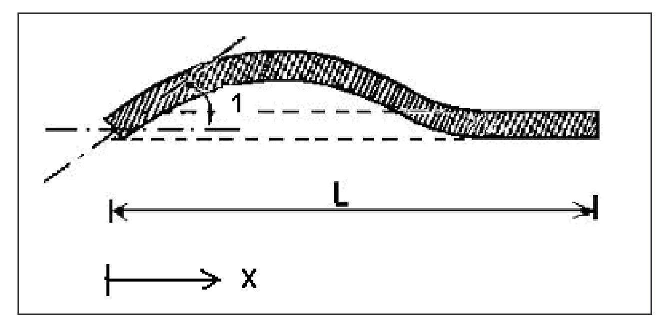


Figura 7.14 Planteamiento del problema para encontrar la rigidez $\frac{4EI}{L}$

En el capítulo 3 se estudio que la deformación $v(x)$ cuando solo existe un giro θ_1 vale:

$$v(x) = \theta_1\ \phi_3(x) = \theta_1\ X\left(1 - \frac{X}{L}\right)^2 = \theta_1 X\left(1 - \frac{2X}{L} + \frac{X^2}{L^2}\right) = \theta_1\left(X - \frac{2X^2}{L} + \frac{X^3}{L^2}\right)$$

Para el presente caso $\theta_1 = 1$. Luego la ordenada de la elástica para el caso que nos interesa vale:

$$v(x) = X - \frac{2X^2}{L} + \frac{X^3}{L^2}$$

La derivada de $v(x)$ es el giro $\theta(x)$ y la derivada del giro es la curvatura $\phi(x)$ y a su vez la curvatura es igual a $\frac{M}{EI}$, donde M es el momento a flexión y EI es la rigidez a flexión.

$$\theta(x) = \frac{dv(x)}{dx} = 1 - \frac{4X}{L} + \frac{3X^2}{L^2}$$

$$\phi(x) = \frac{d^2v(x)}{dx^2} = -\frac{4}{L} + \frac{6X}{L^2}$$

Por la convención de signos con la que se está trabando se tiene que:

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$$

De tal forma que el momento que se aplica en el nudo inicial se obtiene al reemplazar $X = 0$ en la ecuación de la curvatura y al despejar el momento de ésta última ecuación se tiene:

$$M = \frac{4EI}{L}$$

De tal manera que el momento que produce el giro unitario en el nudo inicial vale $\frac{4EI}{L}$ que es el término de rigidez que se está buscando.

7.5 EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicio N.- 1

Determinar el coeficiente de forma β de una columna de sección constante en forma de "L".

Ejercicio N.- 2

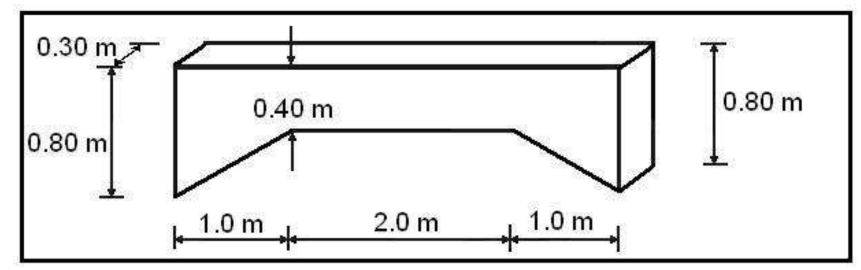
Encontrar el elemento de rigidez $\frac{2EI}{L}$ a partir de los resultados presentados en el ejemplo 5.

Ejercicio N.- 3

Encontrar la matriz de rigidez asociado al sistema de coordenadas de la figura 7.1 para un muro de corte de 20 por 400 cm. (b x h). La altura del elemento es de 3.0 m. El modulo de elasticidad es de 2173706.5 T/m2. Calcular sin considerar el efecto de corte y considerando el efecto de corte.

Ejercicio N.- 4

Con la ayuda de las tablas de Guldan determinar la matriz de rigidez del elemento para el sistema de coordenadas de la figura 7.5. Para la viga de sección variable que se indica a continuación. Considerar el módulo de elasticidad igual al del ejercicio anterior.



Viga de Sección Variable para los ejercicios 4 y 5.

Ejercicio N.- 5

Determinar los términos f_{11} y f_{21} utilizando las ecuaciones (7.4.1) y (7.4.2) de la viga amartelada. Se recomienda resolver las integrales empleando métodos numéricos. Concretamente utilizar 5 puntos de la cuadratura de Gauss.

CAPITULO 8

MATRIZ DE RIGIDEZ Y DE FLEXIBILIDAD DE UN ESTRUCTURA A PARTIR DEL CONCEPTO

RESUMEN

Se presenta el cálculo de las matrices de rigidez $\boldsymbol{K}$ y de flexibilidad $\boldsymbol{F}$ de una estructura usando el concepto. En los capítulos posteriores a partir del concepto se obtendrá en forma práctica la matriz de rigidez.

Posteriormente se trabaja con la matriz de transformación de coordenadas para encontrar las matrices $\boldsymbol{K}$ y $\boldsymbol{F}$. Finalmente se presenta un algoritmo orientado al uso del computador para estructuras con elementos flexibles para encontrar las matrices indicadas en otro sistema de coordenadas.

8. 1 MATRIZ DE RIGIDEZ DE UNA ESTRUCTURA K

8.1.1 Definición

En el capítulo 6 se indicó que un término cualquiera de la matriz de rigidez de una estructura k_{ij}, es el valor de la carga generalizada Q_i correspondiente a la deformada elemental $q_j = 1$ y demás nulas. Por consiguiente si se desea calcular, por ejemplo, los elementos de la primera columna de la matriz de rigidez de una estructura se deberá calcular el vector de cargas generalizadas que corresponde al estado de desplazamiento elemental $q_1 = 1$ y $q_i = 0, i \neq 1$. De igual forma se procederá con las demás columnas de $\boldsymbol{K}$ **.**

8.1.2 Procedimiento de cálculo

El procedimiento de cálculo para hallar la matriz de rigidez de una estructura $\boldsymbol{K}$ a partir del concepto es el siguiente:

1) Construir la deformada elemental cuya columna se desea calcular.

2) Encontrar las deformaciones $\boldsymbol{p}$ en cada uno de los elementos asociados a la deformada elemental. Es un problema de geometría.

3) Transformar las deformaciones $\boldsymbol{p}$ de cada elemento en cargas internas $\boldsymbol{P}$ por medio de la matriz de rigidez del elemento $\boldsymbol{k}$. La ecuación matricial que se utiliza es: $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{k}\ \boldsymbol{p}$.

4) Usando la estática se realiza el equilibrio de cada uno de los elementos que conforman la estructura.

5) Encontrar el equilibrio de cada una de las juntas de la estructura.

6) En el paso anterior se obtienen las cargas que actúan sobre la estructura y el vector de cargas generalizadas que son los elementos de la matriz de rigidez de la estructura.

8.1.3 Primera forma de cálculo numérico

Por didáctica únicamente se denomina primera forma de cálculo de la matriz de rigidez de una estructura a aquella en que se utiliza como sistema de coordenadas del elemento el indicado en la figura 8.1

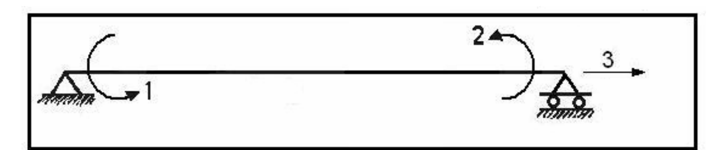


Figura 8.1 Sistema $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}$ para la primera forma de cálculo.

Se recuerda que las deformaciones $\boldsymbol{p}$ se obtienen con las siguientes ecuaciones:

$$p_1 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L} \qquad p_2 = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{L} \qquad p_3 = u_2 - u_1$$

La matriz de rigidez de un elemento para el sistema de coordenadas indicado es:

$$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}$$

- **EJEMPLO N.- 1**

Encontrar la primera columna de la matriz de rigidez de la estructura indicada en la figura 8.2.1 si todos los elementos tienen la misma sección transversal y la misma longitud. Encontrar aplicando el concepto y no considerar el efecto de corte.

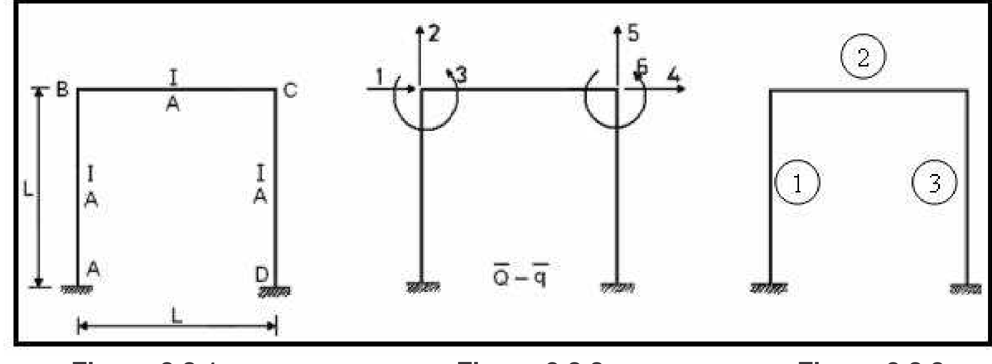


Figura 8.2.1 Figura 8.2.2 Figura 8.2.3

- **SOLUCIÓN**

Por ser todos sus elementos flexibles se tiene seis grados de libertad. En consecuencia el sistema de coordenadas de la estructura $\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{q}$ es el indicado en la figura 8.2.2. Para una mejor compresión en la figura 8.2.3 se indica la numeración de los elementos.

En la figura 8.2.4 se indica el sistema de coordenadas de miembro $\boldsymbol{P}-\boldsymbol{p}$ de cada uno de los elementos de la estructura.

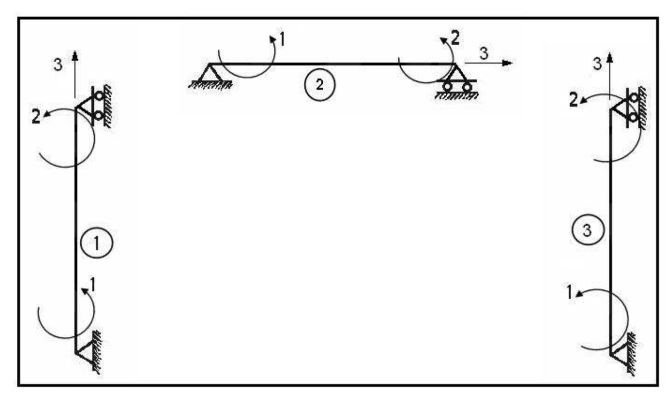


Figura 8.2.4 Sistema $\boldsymbol{P}-\boldsymbol{p}$ de la estructura.

Para diferenciar las deformaciones y cargas internas se escribe entre paréntesis y como subíndice el número del elemento al cual corresponde.

De acuerdo al procedimiento indicado en el apartado anterior para encontrar los elementos de la primera columna de la matriz de rigidez de la estructura se procede de la siguiente manera:

1) Deformada elemental $q_1 = 1$ y $q_i = 0, i \neq 1$.

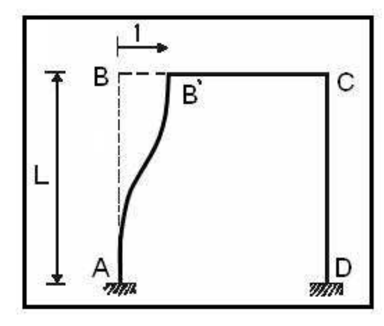


Figura 8.2.5 Diagrama elemental q_1

2) Cálculo de las deformaciones $\boldsymbol{p}$.

$$p_1^{(1)} = \frac{1}{L} \qquad p_1^{(2)} = 0 \qquad p_1^{(3)} = 0$$

$$p_2^{(1)} = \frac{1}{L} \qquad p_2^{(2)} = 0 \qquad p_2^{(3)} = 0$$

$$p_3^{(1)} = 0 \qquad p_3^{(2)} = -1 \qquad p_3^{(3)} = 0$$

Para encontrar las deformaciones del elemento 1, se procedió de la siguiente manera:

$$u_1 = 0 \qquad u_2 = 0$$

$$v_1 = 0 \qquad v_2 = -1$$

$$\theta_1 = 0 \qquad \theta_2 = 0$$

$$p_1^{(1)} = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L} = 0 - \frac{-1-0}{L} = \frac{1}{L}$$

$$p_2^{(1)} = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{L} = 0 - \frac{-1-0}{L} = \frac{1}{L}$$

$$p_3^{(1)} = u_2 - u_1 = 0 - 0 = 0$$

Se puede obtener éstos mismos valores directamente sin necesidad de aplicar las ecuaciones si se recuerda que las deformaciones p_1 y p_2 son los ángulos comprendidos entre la cuerda y la tangente de los nudos inicial y final respectivamente como se indicó en el capítulo 6. Para el elemento 1 en la figura 8.2.6 se ha separado la deformada elemental correspondiente a la columna izquierda en ella se ha unido la cuerda entre B y B', luego se han trazado las tangentes en el nudo inicial y final se observa que el ángulo entre la cuerda y la tangente es antihorario luego las deformaciones p_1 y p_2 son positivas.

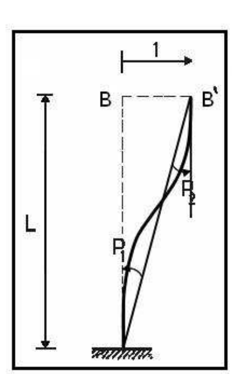


Figura 8.2.6 Regla para encontrar las deformaciones del elemento 1.

En la figura 8.2.6 se aprecia que el ángulo p_1 es igual al ángulo p_2 por ser alternos e internos y que p_1 es igual al cateto opuesto sobre el cateto adyacente. Por lo tanto se tiene:

$$p_1^{(1)} = \frac{1}{L} \qquad p_2^{(1)} = \frac{1}{L}$$

3) Se obtienen las cargas internas $\boldsymbol{P}$ en cada uno de los elementos del pórtico plano. Como todos los elementos tienen la misma sección transversal y la misma longitud, la matriz de rigidez de cada uno de ellos es la misma y vale:

$$k^{(1)} = k^{(2)} = k^{(3)} \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}$$

Las cargas internas del elemento 1 se obtienen del producto matricial $P^{(1)} = k^{(1)} \; p^{(1)}$. Donde $P^{(1)}$ es de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} P_1^{(1)} \\ P_2^{(1)} \\ P_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}$$

De donde:

$$P_1^{(1)} = \frac{6EI}{L^2} \qquad P_2^{(1)} = \frac{6EI}{L^2} \qquad P_3^{(1)} = 0$$

Lo propio se realiza con los elementos 2 y 3 es decir se multiplica la matriz de rigidez del respectivo elemento por su vector de deformaciones, los resultados que se obtienen, son:

$$P_1^{(2)} = 0 \qquad P_2^{(2)} = 0 \qquad P_3^{(2)} = -\frac{EA}{L}$$

$$P_1^{(3)} = 0 \qquad P_2^{(3)} = 0 \qquad P_3^{(3)} = 0$$

4) Se encuentra el equilibrio de cada elemento.

En la figura 8.2.7 se indica con línea continua las cargas internas $\boldsymbol{P}$ obtenidas en el paso anterior y con línea entrecortada las diferentes fuerzas que equilibran cada uno de los elementos.

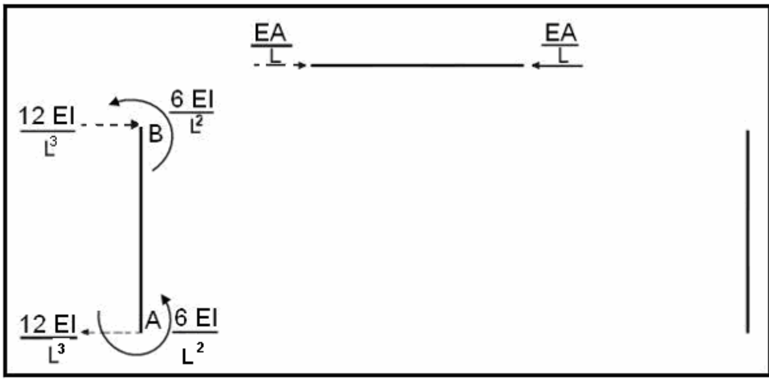


Figura 8.2.7 Equilibrio de elementos.

El cortante en la columna se obtiene sumando los momentos y dividiendo para la longitud.

5) Se realiza el equilibrio de juntas.

En las juntas de la estructura las fuerzas y momentos internos de cada elemento actúan con sentido contrario, éstas se han representado con línea continua y las cargas exteriores que equilibran cada uno de los nudos se presentan con línea entrecortada en la figura 8.2.8.

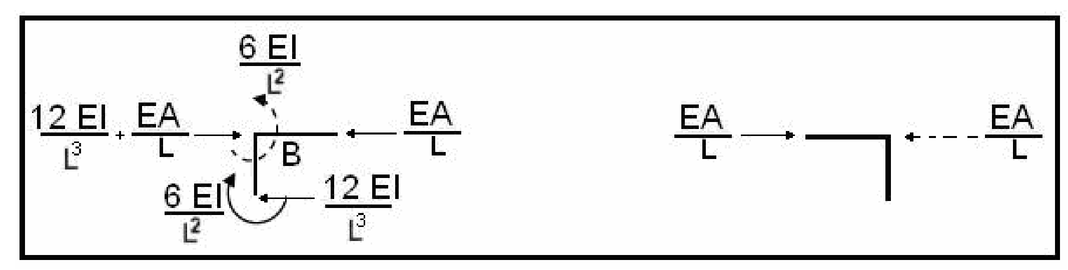


Figura 8.2.8 Equilibrio de juntas o nudos.

Nótese que para equilibrar la fuerza horizontal del nudo B se ha sumado el cortante proveniente de la columna y la fuerza axial que viene de la viga.

6) Finalmente se determinan las cargas exteriores y el vector de cargas generalizadas.

En la figura 8.2.9 se presentan las fuerzas y momentos exteriores que se deben aplicar a la estructura para que produzcan el diagrama elemental de la figura 8.2.5.

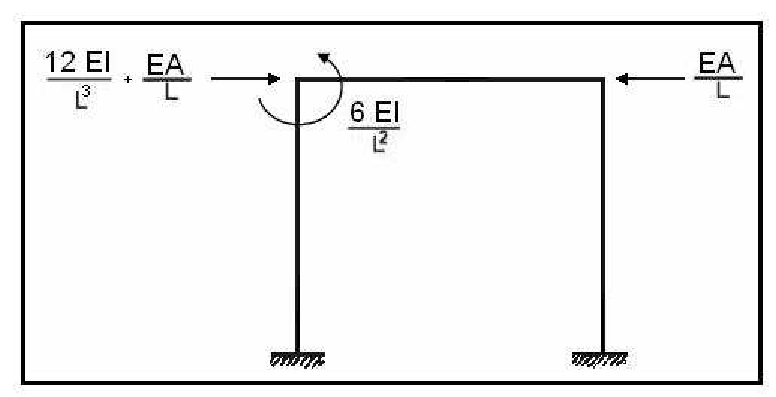


Figura 8.2.9 Valores de la primera columna de $\boldsymbol{K}$

Por consiguiente el vector de cargas generalizadas $\boldsymbol{Q}$ resulta:

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \dfrac{12EI}{L^3} + \dfrac{EA}{L} \\ 0 \\ \dfrac{6EI}{L^2} \\ -\dfrac{EA}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{21} \\ K_{31} \\ K_{41} \\ K_{51} \\ K_{61} \end{bmatrix}$$

Por definición los elementos de $\boldsymbol{Q}$ son los términos de la primera columna de la matriz de rigidez de la estructura. Se deja al estudiante el obtener las demás columnas de $\boldsymbol{K}$ aplicando el concepto. El resultado total es el siguiente:

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3}+\frac{EA}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3}+\frac{EA}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{8EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{12EI}{L^3}+\frac{EA}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3}+\frac{EA}{L} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{8EI}{L} \end{bmatrix}$$

8.1.4 Segunda forma de cálculo numérico

Se puede considerar otro sistema de coordenadas del elemento para encontrar la matriz de rigidez de la estructura, por ejemplo el presentado en la figura 8.3

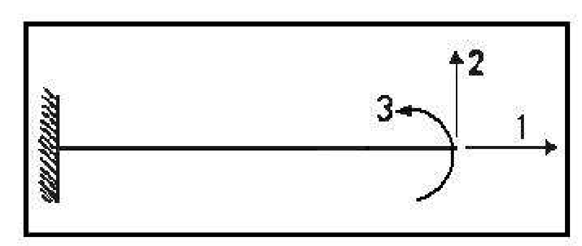


Figura 8.3 Otro sistema de coordenadas del elemento $\boldsymbol{P}-\boldsymbol{p}$

- **EJEMPLO N.- 2**

Calcular la primera columna de la matriz de rigidez de la estructura mostrada en la figura 8.2.1, considerando el sistema de coordenadas del elemento el indicado en la figura 8.3. En las figuras 8.2.2 y 8.2.3 se indican el sistema de coordenadas de la estructura $\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{q}$ y la numeración de los elementos respectivamente.

- **SOLUCIÓN**

En la figura 8.4.1 se presenta las coordenadas de cada uno de los elementos que forman la estructura.

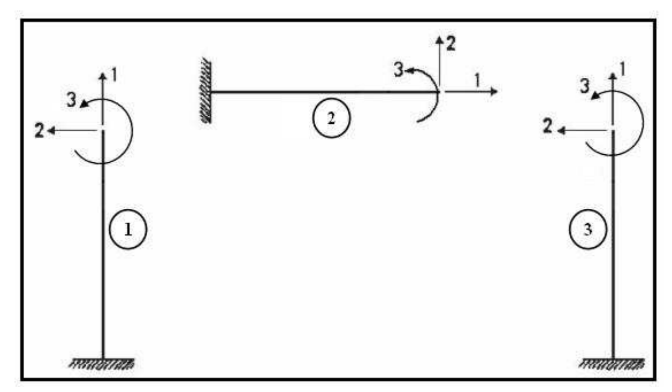


Figura 8.4.1 Sistema de coordenadas de los elementos del ejemplo 2.

Se resume a continuación el procedimiento de cálculo.

1) Deformada elemental q_1

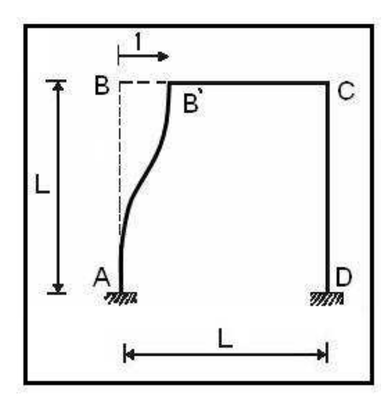


Figura 8.4.2 Deformada elemental q_1

Las fórmulas con las cuales se obtienen las deformaciones de un elemento se obtuvieron en el capítulo 6, en el apartado 6.3.4, éstas son:

$$p_1 = u_2 - u_1$$
$$p_2 = v_2 - v_1 - L\,\theta_1$$
$$p_3 = \theta_2 - \theta_1$$

2) Deformaciones de los elementos

Las deformaciones en cada uno de los elementos son las siguientes:

$$p_1^{(1)} = 0 \qquad p_1^{(2)} = -1 \qquad p_1^{(3)} = 0$$
$$p_2^{(1)} = -1 \qquad p_2^{(2)} = 0 \qquad p_2^{(3)} = 0$$
$$p_3^{(1)} = 0 \qquad p_3^{(2)} = -1 \qquad p_3^{(3)} = 0$$

3) Cargas Internas

La matriz de rigidez de elemento para el sistema de coordenadas $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}$ de la figura 8.3 fue deducida en el capítulo anterior en el apartado 7.3.3 y es la siguiente:

$$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Por los datos del ejemplo la matriz de rigidez es igual para todos los elementos. Al realizar el producto matricial $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{k}\ \boldsymbol{p}$ en cada uno de los elementos de la estructura se obtiene:

$$P_1^{(1)} = 0 \qquad P_1^{(2)} = -\frac{EA}{L} \qquad P_1^{(3)} = 0$$

$$P_2^{(1)} = -\frac{12EI}{L^3} \qquad P_2^{(2)} = 0 \qquad P_2^{(3)} = 0$$

$$P_3^{(1)} = \frac{6EI}{L^2} \qquad P_3^{(2)} = 0 \qquad P_3^{(3)} = 0$$

4) Equilibrio de elementos

En la figura 8.4.3 se presenta con línea continua las cargas $\boldsymbol{P}$ obtenidas en cada uno de los elementos y con línea entrecortada las diferentes fuerzas que equilibran los elementos.

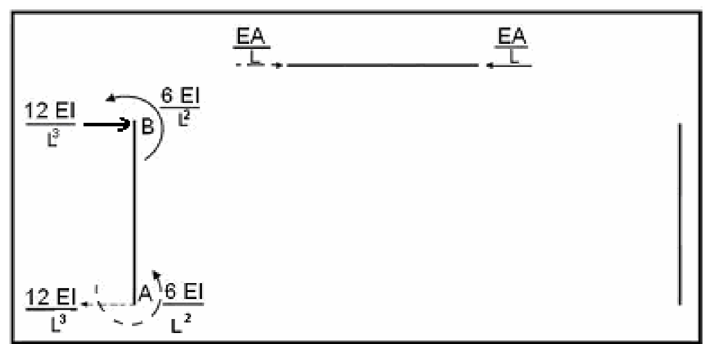


Figura 8.4.3 Equilibrio de elementos

Las figuras 8.4.3 y 8.2.7 son iguales. En consecuencia los siguientes pasos que faltan para hallar los elementos de la primera columna de la matriz de rigidez de la estructura son los dados en el ejemplo anterior. De idéntica forma se obtendrán las demás columnas de la matriz de rigidez.

El haber obtenido la misma matriz de rigidez de la estructura, utilizando diferentes sistemas de coordenadas de elemento, no es un hecho casual. Esto es debido a que la inmovilización de los desplazamientos como cuerpo rígido, que se estudió en el capítulo 6, utilizando diferentes tipos de vínculos es un artificio. Si se utiliza otro sistema de coordenadas de miembro se obtendrá la misma matriz de rigidez $\boldsymbol{K}$.

Finalmente, se puede resolver la estructura utilizando sistemas de coordenadas de elemento $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}$, diferentes para cada uno de los elementos, por ejemplo el que se indica en la figura 8.5.

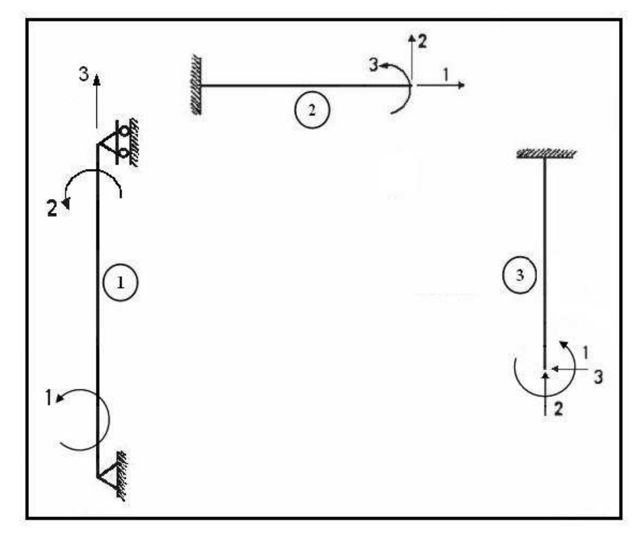


Figura 8.5 Nuevo sistema de coordenadas de los elementos para la estructura de los ejemplos 1 y 2.

8. 2 MATRIZ DE FLEXIBILIDAD DE UNA ESTRUCTURA F

8.2.1 Definición

Se conoce que $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{F}\ \boldsymbol{Q}$. Por lo tanto un elemento cualquiera de la matriz de flexibilidad de una estructura F_{ij} será el valor del desplazamiento o giro q_i correspondiente al estado de cargas $Q_j = 1$ y las demás nulas.

La matriz de flexibilidad $\boldsymbol{F}$ transforma las cargas generalizadas $\boldsymbol{Q}$ en coordenadas generalizadas $\boldsymbol{q}$.

8.2.2 Procedimiento de cálculo

Para encontrar la matriz de flexibilidad $\boldsymbol{F}$ a partir de su definición, se realizan los siguientes pasos:

1) Para el estado de carga elemental $Q_i = 1$ y las demás nulas, se debe hallar las cargas internas $\boldsymbol{P}$ que actúan en cada uno de los elementos. Esto es un procedimiento de estática.

2) Conocido el vector $\boldsymbol{P}$ se encuentran las deformaciones $\boldsymbol{p}$, por medio de la siguiente ecuación: $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{f}\ \boldsymbol{P}$.

3) A partir de las deformaciones internas en cada uno de los elementos de la estructura se determina el vector de coordenadas generalizadas $\boldsymbol{q}$. Este es un problema de geometría. Al encontrar $\boldsymbol{q}$ se tienen ya los elementos de la columna de $\boldsymbol{F}$ que se está calculando.

- **EJEMPLO N.- 3**

En la figura 8.6 se presenta un pórtico plano con todos sus elementos completamente flexibles, se pide calcular los elementos de la primera columna de la matriz de flexibilidad.

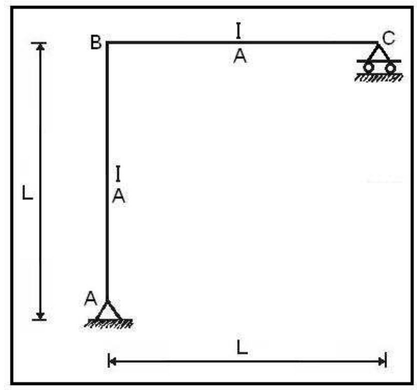


Figura 8.6 Estructura de ejemplo 3.

- **SOLUCIÓN**

Por facilidad se ha considerado que los dos elementos tienen la misma sección transversal y la misma longitud. En consecuencia la matriz de flexibilidad de sus elementos es igual.

En la figura 8.7.1 se indican los 6 grados de libertad que tiene el pórtico y en la figura 8.7.2 se indica la numeración de los elementos.

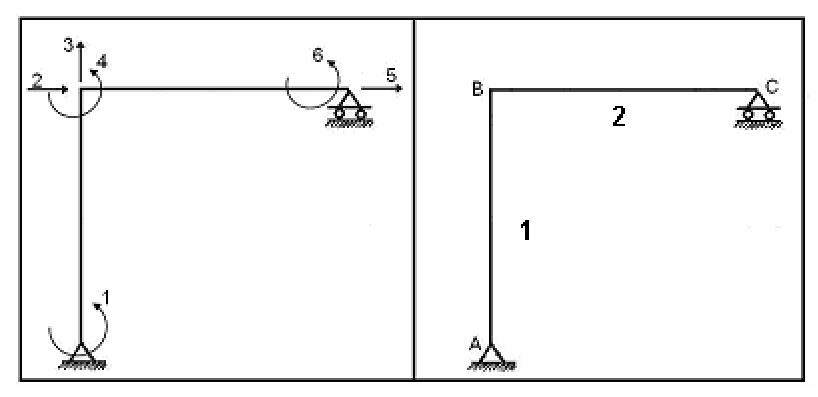


Figura 8.7.1 Sistema $Q-q$ **Figura 8.7.2**

De acuerdo al procedimiento de cálculo indicado en el apartado 8.2.2 se tiene:

1) $Q_1 = 1 \quad y \quad Q_i = 0 \quad i \neq 1$

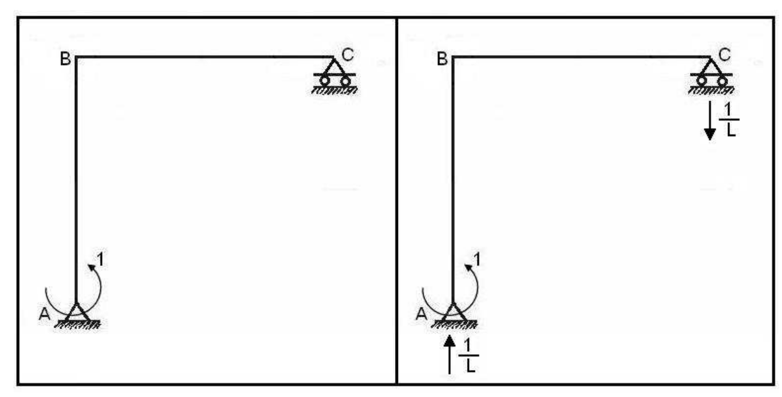


Figura 8.7.3 Momento unitario en A. **Figura 8.7.4** Equilibrio de fuerzas externas

Debido al momento unitario que actúa en el nudo A de la estructura, se generan reacciones en los vínculos A y C que valen $\frac{1}{L}$ con lo cual la estructura está en equilibrio. En la figura 8.7.4 se muestran éstas reacciones.

Por efecto del sistema de cargas en cada uno de los elementos se tienen fuerzas y momentos internos los mismos que se indican en la figura 8.7.5. Con línea continua se indican las acciones que vienen de las reacciones de los nudos y con línea entrecortada las acciones que conducen al equilibrio en los elementos.

Para el equilibrio de las juntas se colocan en primer lugar las fuerzas externas que actúan en la junta las mismas que están indicadas en la figura 8.7.4. Luego se equilibra el nudo con fuerzas y momentos. Estas fuerzas son las que pasan a los elementos con sentido contrario y son las que se han indicado en la figura 8.7.5.

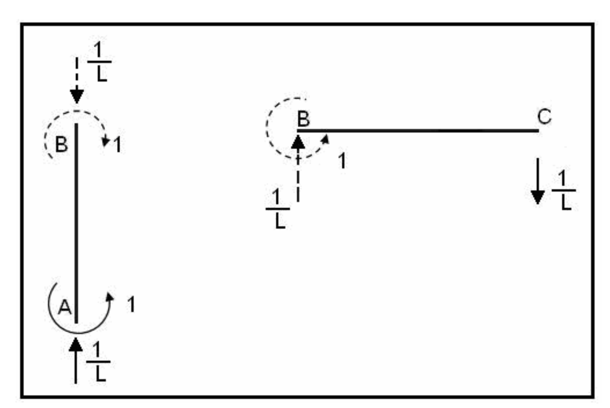


Figura 8.7.5 Equilibrio de los elementos.

Se deja al lector la verificación del equilibrio de juntas y de elementos. Por otra parte se trabaja con el sistema de coordinas de miembro de la figura 8.1, en la cual se tiene que P_1 es el momento en el nudo inicial y es positivo si es antihorario, P_2 es el momento en el nudo final y es positivo si es antihorario y P_3 es la fuerza axial en el nudo final y es positiva si produce tracción en el elemento. Con éstas indicaciones las cargas internas en los elementos que se obtienen de la figura 8.7.5 son las siguientes:

$$P_1^{(1)} = 1 \qquad P_1^{(2)} = 1$$
$$P_2^{(1)} = -1 \qquad P_2^{(2)} = 0 \qquad \Rightarrow \boldsymbol{P}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -\frac{1}{L} \end{bmatrix} \qquad P^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$P_3^{(1)} = -\frac{1}{L} \qquad P_3^{(2)} = 0$$

2) Cálculo de las deformaciones de los elementos.

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{f} \ \boldsymbol{P}$$

$$\boldsymbol{f}^{(1)} = \boldsymbol{f}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{L}{3EI} & -\frac{L}{6EI} & 0 \\ -\frac{L}{6EI} & \frac{L}{3EI} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{EA} \end{bmatrix}$$

$$p^{(1)} = f^{(1)}\, P^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{L}{3EI} & -\frac{L}{6EI} & 0 \\ -\frac{L}{6EI} & \frac{L}{3EI} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{EA} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -\frac{1}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L}{2EI} \\ -\frac{L}{2EI} \\ -\frac{1}{EA} \end{bmatrix}$$

$$p^{(2)} = f^{(2)}\, P^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{L}{3EI} & -\frac{L}{6EI} & 0 \\ -\frac{L}{6EI} & \frac{L}{3EI} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{EA} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L}{3EI} \\ -\frac{L}{6EI} \\ 0 \end{bmatrix}$$

En consecuencia se tiene:

$$p_1^{(1)} = \frac{L}{2EI} \qquad p_1^{(2)} = \frac{L}{3EI}$$

$$p_2^{(1)} = -\frac{L}{2EI} \qquad p_2^{(2)} = -\frac{L}{6EI}$$

$$p_3^{(1)} = -\frac{1}{EA} \qquad p_3^{(2)} = 0$$

3) Cálculo de los desplazamientos y giros q

Esta es la parte más difícil del cálculo de la matriz de flexibilidad de una estructura. Se quiere hallar los desplazamientos y giros que experimentan las juntas de tal forma que los elementos tengan las deformaciones p indicadas. Para facilitar la explicación, se denomina:

$$\alpha = \frac{L}{2EI} \qquad \delta = \frac{1}{EA}$$

Con ésta nomenclatura las deformaciones en los elementos valen:

$$p_1^{(1)} = \alpha \qquad p_1^{(2)} = \frac{2}{3}\alpha$$

$$p_2^{(1)} = -\alpha \qquad p_2^{(2)} = -\frac{\alpha}{3}$$

$$p_3^{(1)} = -\delta \qquad p_3^{(2)} = 0$$

En la figura 8.7.6 se indican éstas deformaciones y en la misma se aprecia que se está violando dos reglas básicas en el nudo B que son:

i) El nudo B es discontinuo ; se aprecia que el nudo B por parte de la columna ha bajado.

ii) El nudo B antes de deformarse medía 90 grado, ahora no.

Figura 8.7.6 Deformaciones de los elementos obtenidos.

Para solucionar éstos dos problemas se deben dar ciertos desplazamientos y giros a la estructura. En primer lugar para corregir la anomalía de la discontinuidad en el nudo B, al elemento BC se desplaza verticalmente una magnitud igual a δ como se indica en la figura 8.7.7.

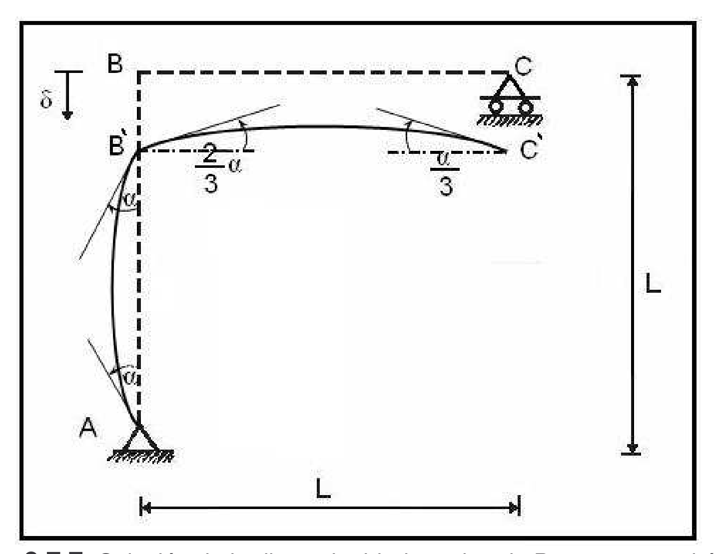


Figura 8.7.7 Solución de la discontinuidad en el nudo B pero no en el ángulo.

Si bien se ha solucionado un problema, ahora se ha creado otro que es la posición del nudo C' ya que debido al tipo de vínculo existente en esa junta el nudo C no debe bajar. Esto se va a resolver posteriormente, se concentra la atención en resolver el problema de que la junta B antes de deformarse medía 90 grados y después de deformarse debe medir 90 grados.

En la figura 8.7.7 se aprecia que el ángulo B' vale $\alpha + 90 + \frac{2}{3}\alpha = 90 + \frac{5}{3}\alpha$. Pero el ángulo B' debe valer 90 grados luego el elemento B'C' se rota $\frac{5}{3}\alpha$ haciendo centro en B' esto se presenta en la figura 8.7.8.

Luego de la rotación el punto C' se ha desplazado verticalmente $\frac{5}{3}\alpha\, L$ hasta llegar a C''.

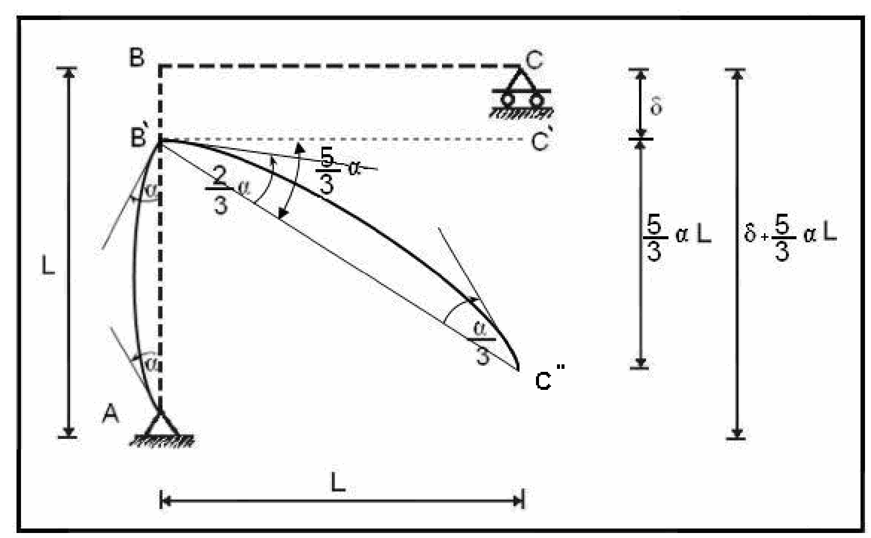


Figura 8.7.8 Solución de la rotación del nudo B.

La posición final del nudo C no puede ser C'' como está indicado en la figura 8.7.8 debe estar en cualquier parte de la recta BC, para lograr éste objetivo se debe rotar el nudo A un ángulo Φ.

$$\Phi = \frac{\delta + \frac{5}{3}\alpha\, L}{L} = \frac{\delta}{L} + \frac{5}{3}\alpha$$

Esta rotación Φ se indica en la figura 8.7.9, se observa que la posición final del nudo C es C'''. El nudo C se ha desplazado horizontalmente ΦL igual corrimiento experimenta el nudo B como se aprecia en la figura mencionada.

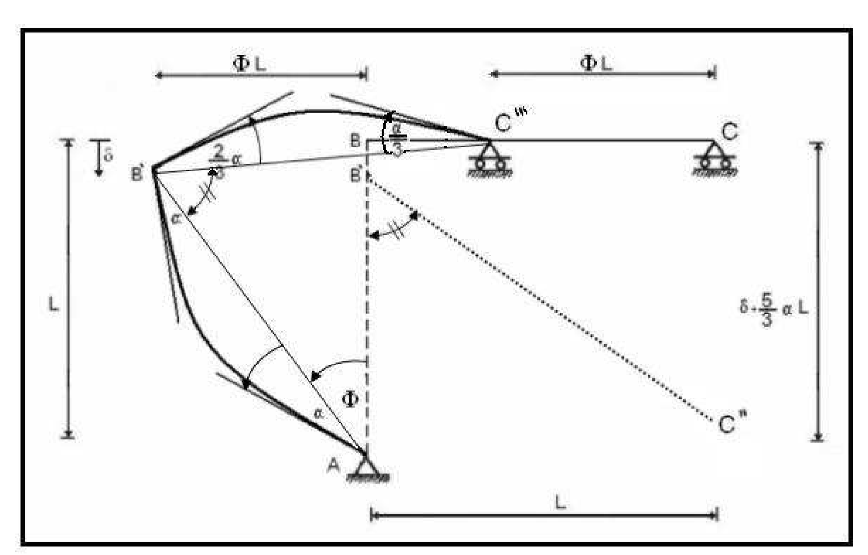


Figura 8.7.9 Posición final de la estructura.

En resumen, los desplazamientos y giros de los nudos son los siguientes:

$q_1 = \alpha + \Phi$ Rotación del nudo A.

$q_2 = -\Phi\ L$ Desplazamiento horizontal del nudo B.

$q_3 = -\delta$ Desplazamiento vertical del nudo B.

$q_4 = -\alpha + \Phi$ Rotación del nudo B.

$q_5 = -\Phi L$ Desplazamiento horizontal del nudo C.

$q_6 = -\frac{\alpha}{3} - \frac{5}{3}\alpha + \Phi$ Rotación del nudo C.

Al reemplazar Φ, α, δ, se encuentra:

$$q_1 = \alpha + \frac{\delta}{L} + \frac{5}{3}\alpha = \frac{8}{3}\alpha + \frac{\delta}{L} = \frac{4L}{3EI} + \frac{1}{EAL}$$

$$q_2 = -\left(\frac{\delta}{L} + \frac{5}{3}\alpha\right)L = -\delta - \frac{5}{3}\alpha L = -\frac{1}{EA} - \frac{5L^2}{6EI}$$

$$q_3 = -\delta = -\frac{1}{EA}$$

$$q_4 = -\alpha + \frac{\delta}{L} + \frac{5}{3}\alpha = \frac{\delta}{L} + \frac{2}{3}\alpha = \frac{1}{EAL} + \frac{L}{3EI}$$

$$q_5 = -\Phi L = -\frac{1}{EA} - \frac{5L^2}{6EI}$$

$$q_6 = -2\alpha + \frac{\delta}{L} + \frac{5}{3}\alpha = \frac{\delta}{L} - \frac{\alpha}{3} = \frac{1}{EAL} - \frac{L}{6EI}$$

Por definición se tiene:

$$q_1 = F_{11} = \frac{4L}{3EI} + \frac{1}{EAL}$$

$$q_2 = F_{21} = -\frac{1}{EA} - \frac{5L^2}{6EI}$$

$$q_3 = F_{31} = -\frac{1}{EA}$$

$$q_4 = F_{41} = \frac{1}{EAL} + \frac{L}{3EI}$$

$$q_5 = F_{51} = -\frac{1}{EA} - \frac{5L^2}{6EI}$$

$$q_6 = F_{61} = \frac{1}{EAL} - \frac{L}{6EI}$$

Las restantes columnas de la matriz de flexibilidad $\boldsymbol{F}$ se obtienen en forma similar. Con el propósito de que el estudiante calcule cualquiera de las columnas de la matriz de flexibilidad a partir de su definición, se indica el resultado completo pero únicamente se presenta la matriz triangular superior debido a que la matriz es simétrica.

$$
F = \begin{bmatrix}
\frac{4L}{3EI}+\frac{1}{EAL} & -\frac{1}{EA}-\frac{5L^2}{EI} & -\frac{1}{EA} & \frac{1}{EAL}+\frac{L}{3EI} & -\frac{1}{EA}-\frac{5L^2}{6EI} & \frac{1}{EAL}-\frac{L}{6EI} \\
 & \frac{2L^3}{3EI}+\frac{L}{EA} & \frac{L}{EA} & -\frac{L^2}{3EI}-\frac{1}{EA} & \frac{2L^3}{3EI}-\frac{L}{EA} & \frac{L^2}{6EI}-\frac{1}{EA} \\
 & & \frac{L}{EA} & -\frac{1}{EA} & \frac{L}{EA} & -\frac{1}{EA} \\
 & & & \frac{L}{3EI}+\frac{1}{LEA} & -\frac{L^2}{3EI}-\frac{1}{EA} & -\frac{L}{6EI}+\frac{1}{LEA} \\
 & & & & \frac{2L^3}{3EI}+\frac{2L}{EA} & \frac{L^2}{6EI}-\frac{1}{EA} \\
 & & & & & \frac{L}{3EI}+\frac{1}{LEA}
\end{bmatrix}
$$

8.2.3 Principio de superposición

Como se indicó la parte más difícil del cálculo de la matriz de flexibilidad de una estructura a partir de su definición es calcular los desplazamientos y giros $\boldsymbol{q}$ luego que se han obtenido las deformaciones $\boldsymbol{p}$. Si se emplea el principio de superposición se puede hacer esto de una forma sencilla como se ilustra con el ejemplo 4.

- **EJEMPLO N.- 4**

Encontrar la primera columna de la matriz de flexibilidad del ejemplo 3, aplicando el principio de superposición para calcular el vector de coordenadas $\boldsymbol{q}$.

- **SOLUCIÓN**

Para el ejemplo que se está analizando se tiene:

$$p_1^{(1)} = \alpha \qquad p_1^{(2)} = \frac{2}{3}\alpha$$

$$p_2^{(1)} = -\alpha \qquad p_2^{(2)} = -\frac{\alpha}{3}$$

$$p_3^{(1)} = -\delta \qquad p_3^{(2)} = 0$$

En el cálculo del vector de coordenadas generalizadas $\boldsymbol{q}$ se consideran dos etapas, a saber:

Etapa 1.- Actúan sólo las deformaciones del elemento uno, por lo tanto se considera al elemento dos como totalmente rígido.

Etapa 2.- El elemento uno es totalmente rígido y sólo hay deformaciones en el miembro dos.

A los desplazamientos y giros de la etapa uno se los denomina $q^{(1)}$ y a los desplazamientos y giros de la etapa dos $q^{(2)}$. En consecuencia:

$$q = q^{(1)} + q^{(2)}$$

- **Etapa 1.-** En la figura 8.8.1 se presenta ésta fase del cálculo que consiste en tener deformaciones únicamente en el elemento vertical.

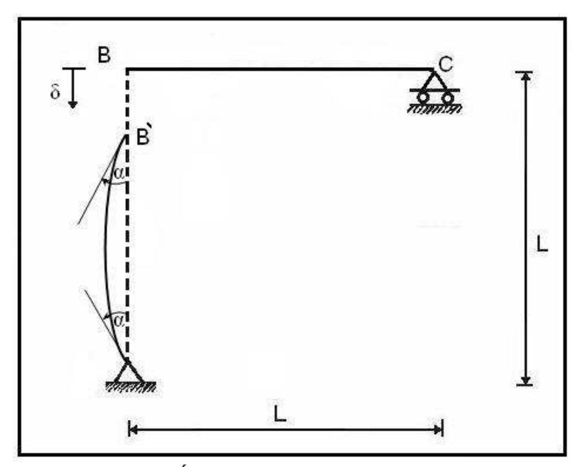


Figura 8.8.1 Únicamente se deforma elemento AB

Al igual que en el ejemplo anterior, en la figura 8.8.1 hay que rectificar dos errores que se tienen y son los siguientes:

i) El nudo B es discontinuo.

ii) El ángulo del nudo B antes de la deformación es diferente al obtenido después de la deformación.

Para corregir el primer error se desplaza el elemento BC una cantidad δ como lo indica la figura 8.8.2 y para solucionar el segundo error haciendo centro en B se rota el elemento BC una magnitud igual a α como lo ilustra la figura 8.8.3. Nótese que el punto C' se ha desplazado hasta C'' una cantidad αL.

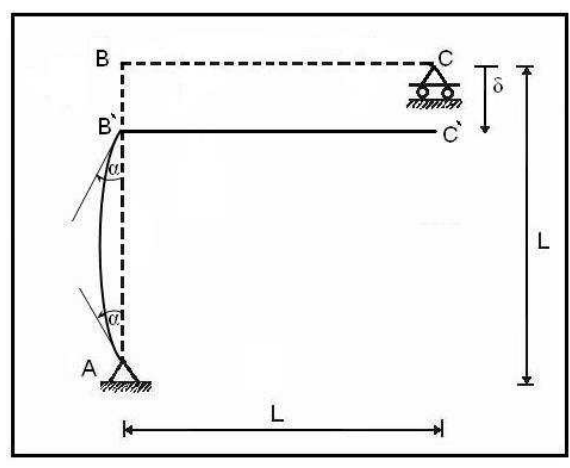


Figura 8.8.2

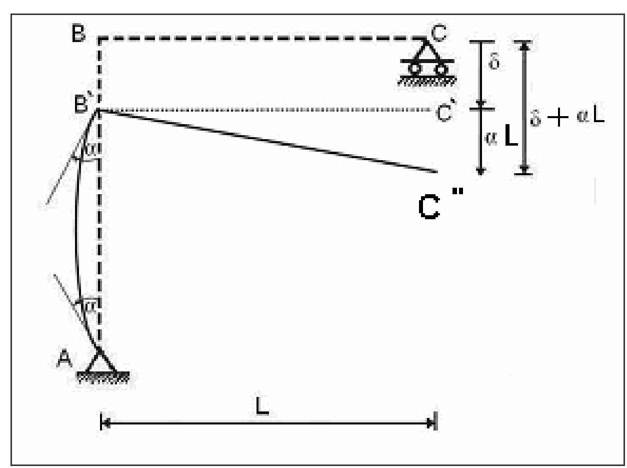


Figura 8.8.3

Pero la posición final del nudo C tiene que estar a lo largo de BC ya que no puede desplazarse verticalmente para lograr esto haciendo centro en el nudo A se rota la estructura un ángulo Φ_1.

$$\Phi_1 = \frac{\delta + \alpha L}{L} = \frac{\delta}{L} + \alpha$$

Por lo tanto la ubicación final del nudo C al terminar ésta etapa es C''' como se indica en la figura 8.8.4.

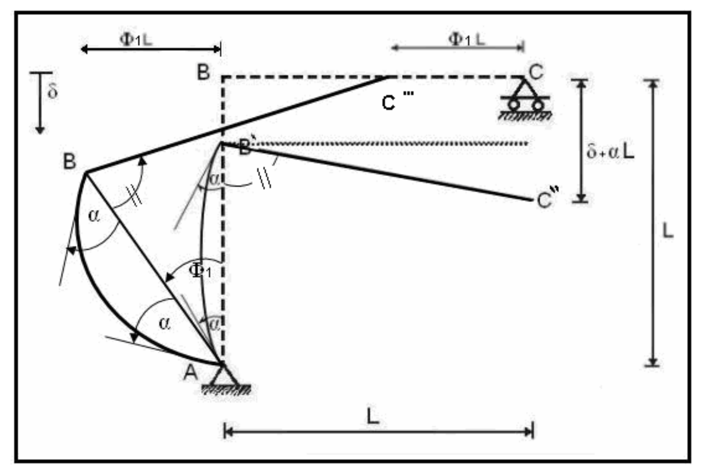


Figura 8.8.4 Fin de etapa uno

Por lo tanto los desplazamientos y giros encontrados en la etapa uno son:

$$q_1^{(1)} = \alpha + \Phi_1 = 2\alpha + \frac{\delta}{L}$$
$$q_2^{(1)} = -\Phi_1 L = -\delta - \alpha\ L$$
$$q_3^{(1)} = -\delta$$
$$q_4^{(1)} = -\alpha + \Phi_1 = \frac{\delta}{L}$$
$$q_5^{(1)} = -\Phi_1 L = -\delta - \alpha\ L$$
$$q_6^{(1)} = -\alpha + \Phi_1 = \frac{\delta}{L}$$

- **Etapa 2.-** En ésta etapa actúan las deformaciones en el elemento 2 ya que el miembro 1 se considera como elemento rígido, estas deformaciones iniciales se indican en la figura 8.9.1

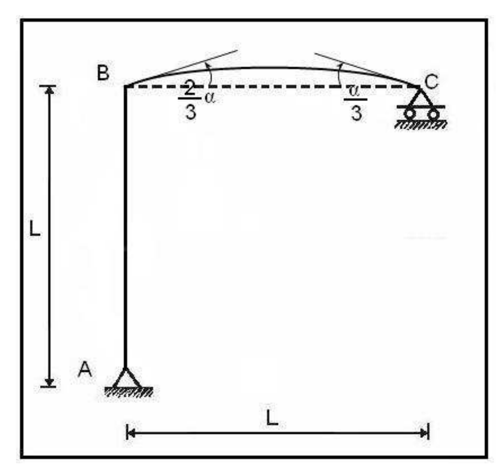


Figura 8.9.1 Sólo se deforma elemento BC.

El ángulo final del nudo B en la figura 8.9.1 se aprecia que es $90^o + \frac{2}{3}\alpha$. Esto no puede ser. Se deja al estudiante que justifique las figuras 8.9.2 y 8.9.3 con las cuales se corrige ésta anomalía.

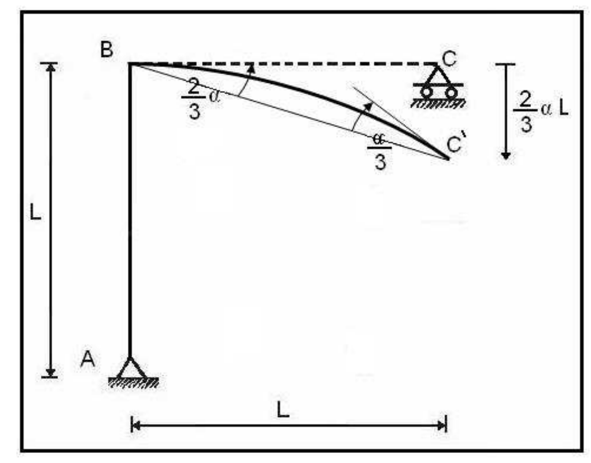


Figura 8.9.2

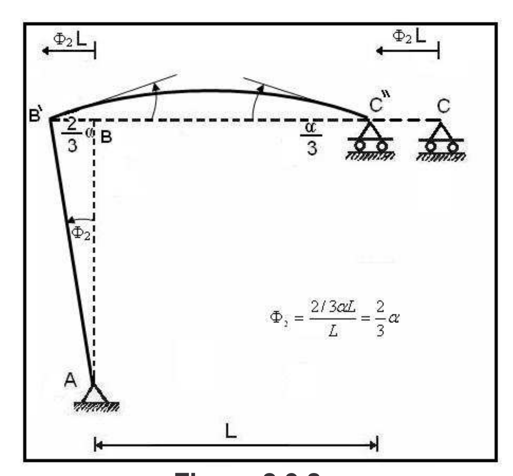


Figura 8.9.3

Luego de la geometría realizada se tiene:

$$q_1^{(2)} = \Phi_2 = \frac{2}{3}\alpha$$

$$q_2^{(2)} = -\Phi_2 L = -\frac{2}{3}\alpha L$$

$$q_3^{(2)} = 0$$

$$q_4^{(2)} = \frac{2}{3}\alpha - \frac{2}{3}\alpha + \Phi_2 = \frac{2}{3}\alpha$$

$$q_5^{(2)} = -\Phi_2 L = -\frac{2}{3}\alpha\ L$$

$$q_6^{(2)} = -\frac{\alpha}{3} - \frac{2}{3}\alpha + \Phi_2 = -\frac{\alpha}{3}$$

Al sumar los desplazamientos y giros obtenidos en las dos etapas se tiene:

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}^{(1)} + \boldsymbol{q}^{(2)}$$

$$\boldsymbol{q}_1 = 2\alpha + \frac{\delta}{\boldsymbol{L}} + \frac{2}{3}\alpha = \frac{8}{3}\alpha + \frac{\delta}{\boldsymbol{L}}$$

$$\boldsymbol{q}_2 = -\delta - \alpha\ \boldsymbol{L} - \frac{2}{3}\alpha\ \boldsymbol{L} = -\delta - \frac{5}{3}\alpha\ \boldsymbol{L}$$

$$\boldsymbol{q}_3 = -\delta + 0 = -\delta$$

$$\boldsymbol{q}_4 = \frac{\delta}{\boldsymbol{L}} + \frac{2}{3}\alpha$$

$$\boldsymbol{q}_5 = -\delta - \alpha\ \boldsymbol{L} - \frac{2}{3}\alpha\ \boldsymbol{L} = -\delta - \frac{5}{3}\alpha\ \boldsymbol{L}$$

$$\boldsymbol{q}_6 = -\frac{\delta}{\boldsymbol{L}} - \frac{\alpha}{3}$$

Al sustituir $\alpha = \dfrac{L}{2EI}$ y $\delta = \dfrac{1}{EA}$ se obtienen los valores de la primera columna de la matriz de flexibilidad anotados en el ejemplo 3.

8. 3 TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS DE UNA ESTRUCTURA

8.3.1 Cálculo de la matriz de rigidez y de flexibilidad

Conocida la matriz de rigidez $\boldsymbol{K}$ para un determinado sistema de coordenadas $\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{q}$ de una estructura, se desea ahora calcular la matriz de rigidez $\boldsymbol{K}^*$ en otro sistema de coordenadas $\boldsymbol{Q}^* - \boldsymbol{q}^*$. Este cálculo se lo va a realizar utilizando la matriz de transformación de coordenadas.

- **EJEMPLO N.- 5**

El pórtico plano de la figura 8.10.1 está compuesto por una columna de altura H y una viga de longitud L, los dos elementos se consideran axialmente rígidos y el sistema de coordenadas $\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{q}$ es el indicado en la figura 8.10.2. La matriz de rigidez $\boldsymbol{K}$ asociado a éste sistema de coordenadas es la siguiente:

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} \dfrac{12EI_o}{H^3} & \dfrac{6EI_o}{H^2} & 0 \\ \dfrac{6EI_o}{H^2} & \dfrac{4EI_o}{H} + \dfrac{4EI_1}{L} & \dfrac{2EI_1}{L} \\ 0 & \dfrac{2EI_1}{L} & \dfrac{4EI_1}{L} \end{bmatrix}$$

Se desea encontrar la matriz de rigidez $\boldsymbol{K}^*$ para el sistema de coordenadas $\boldsymbol{Q}^* - \boldsymbol{q}^*$ de la figura 8.10.3 por medio de la matriz de transformación de coordenadas $\boldsymbol{T}$.

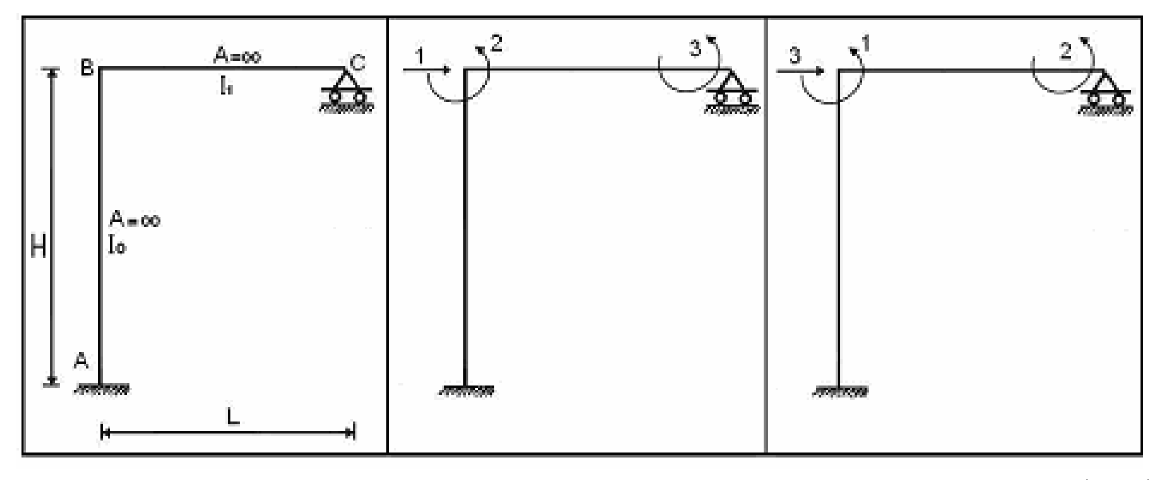


Figura 8.10.1 **Figura 8.10.2** Sistema $\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{q}$ **Figura 8.10.3** Sistema $\boldsymbol{Q}^* - \boldsymbol{q}^*$

- **SOLUCIÓN**

Se establece una relación entre los dos sistemas de coordenadas de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{T}\ \boldsymbol{q}^*$$

La relación así definida fue estudiada en el capítulo 5 por consiguiente el estudiante deberá dibujar cada una de las deformadas elementales y encontrar la siguiente matriz $\boldsymbol{T}$.

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

En el apartado 7.3.2 del capítulo anterior se demostró que la matriz de rigidez de un elemento en otro sistema de coordenadas se obtiene con la siguiente ecuación:

$$\boldsymbol{k}^* = \boldsymbol{T}^t\ \boldsymbol{k}\ \boldsymbol{T} \qquad (8.1)$$

La ecuación (8.1) que fue deducida para un elemento es aplicable a una estructura. Por lo tanto para hallar la matriz de rigidez de la estructura $\boldsymbol{K}^*$ (mayúscula) se utilizará la siguiente ecuación.

$$\boldsymbol{K}^* = \boldsymbol{T}^t\ \boldsymbol{K}\ \boldsymbol{T}$$

Para el ejemplo se tiene:

$$\boldsymbol{K}^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{12EI_o}{H^3} & \frac{6EI_o}{H^2} & 0 \\ \frac{6EI_o}{H^2} & \frac{4EI_o}{H} + \frac{4EI_1}{L} & \frac{2EI_1}{L} \\ 0 & \frac{2EI_1}{L} & \frac{4EI_1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto la matriz de rigidez $\boldsymbol{K}^*$ para el sistema de coordenadas de la figura 8.10.3 es:

$$\boldsymbol{K}^* = \begin{bmatrix} \frac{4EI_o}{H} + \frac{4EI_1}{L} & \frac{2EI_1}{L} & \frac{6EI_o}{H^2} \\ \frac{2EI_1}{L} & \frac{4EI_1}{L} & 0 \\ \frac{6EI_o}{H^2} & 0 & \frac{12EI_o}{H^3} \end{bmatrix}$$

Si se desea calcular la matriz de flexibilidad $\boldsymbol{F}^*$ para el sistema de coordenadas de la figura 8.10.3, conocida la matriz de flexibilidad $\boldsymbol{F}$ para el sistema $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{q}$ de la figura 8.10.2, hay que hacerlo por medio de la matriz $\boldsymbol{T}_1$ estudiada en el capítulo 5.

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{T}_1\ \boldsymbol{Q}^*$$

La matriz de flexibilidad buscada se obtiene del siguiente triple producto matricial.

$$\boldsymbol{F}^* = \boldsymbol{T}_1^t \ \boldsymbol{F} \ \boldsymbol{T}_1$$

Se deja al lector la demostración de las formulas con las cuales se obtiene $\boldsymbol{K}^*$ y $\boldsymbol{F}^*$ en base a la teoría presentada en el capítulo 5.

8.3.2 Regla práctica

Se puede obtener directamente la matriz de rigidez y de flexibilidad de una estructura cuyos elementos son totalmente flexibles, cuando se cambia el sistema de coordenadas generalizadas, por consiguiente no es necesario calcular las matrices $\boldsymbol{T}$ y $\boldsymbol{T}_1$ respectivamente.

En efecto, para hallar $\boldsymbol{K}^*$ para el sistema de coordenadas $\boldsymbol{Q}^* - \boldsymbol{q}^*$ de la figura 8.10.3 a partir de la matriz $\boldsymbol{K}$ calculado para las coordenadas de la figura 8.10.2 se han de intercambiar las filas y columnas de ésta matriz de acuerdo al cambio de numeración del nuevo sistema de coordenadas.

La forma de pasar las coordenadas de la figura 8.10.2 a la 8.10.3 se presenta en dos fases a saber:

1) Se cambian la numeración de los dígitos uno y tres en el sistema $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{q}$ esto se presenta en la figura 8.10.4. Por lo tanto ahora q_1 es la rotación en el rodillo C y q_3 es el desplazamiento horizontal de la junta B.

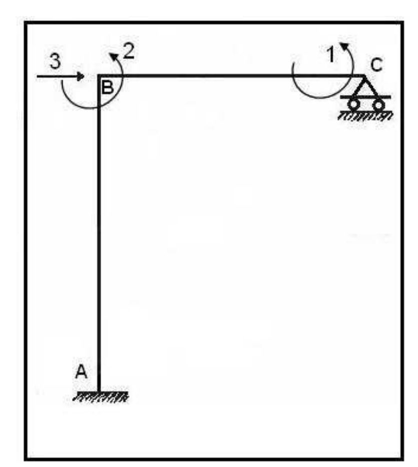


Figura 8.10.4 Sistema de coordenadas generalizadas de fase uno.

La matriz de rigidez para este nuevo sistema de coordenadas se obtiene intercambiando las columnas y las filas uno y tres de la matriz de rigidez, con lo que se halla:

$$\boldsymbol{K} \text{ de la fase uno} = \begin{bmatrix} \frac{4EI_1}{L} & \frac{2EI_1}{L} & 0 \\ \frac{2EI_1}{L} & \frac{4EI_o}{H} + \frac{4EI_1}{L} & \frac{6EI_o}{H^2} \\ 0 & \frac{6EI_o}{H^2} & \frac{12EI_o}{H^3} \end{bmatrix}$$

2) Por último para pasar de las coordenadas de la figura 8.10.4 a las coordenadas de la figura 8.10.3 se intercambian los dígitos uno y dos. Por lo tanto en la matriz de rigidez de la fase uno se intercambian los elementos de la fila uno a la fila dos y luego los elementos de la columna uno a la columna dos, obteniendo de ésta manera la matriz K^* que ya fue presentada en el ejemplo anterior.

Un procedimiento similar se sigue para calcular la matriz de flexibilidad de una estructura en un nuevo sistema de coordenadas. El procedimiento de cálculo presentado es muy fácil programarlo.

8. 4 EJERCICIOS RESUELTOS

En los ejercicios que se van a resolver en éste capítulo al igual que en el próximo, el lector deberá justificar cada uno de los pasos dados, toda vez que ya se han indicado la teoría respectiva.

- **EJEMPLO N.- 6**

Obtener directamente a partir de su definición los elementos de la segunda columna de la matriz de rigidez de la estructura mostrada en la figura 8.11.1, las vigas son totalmente rígidas y las columnas son axialmente rígidas. Todas las columnas tienen la misma sección transversal y longitud.

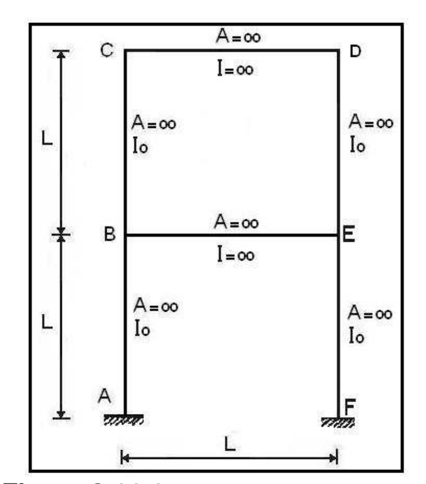


Figura 8.11.1 Estructura de ejemplo 6.

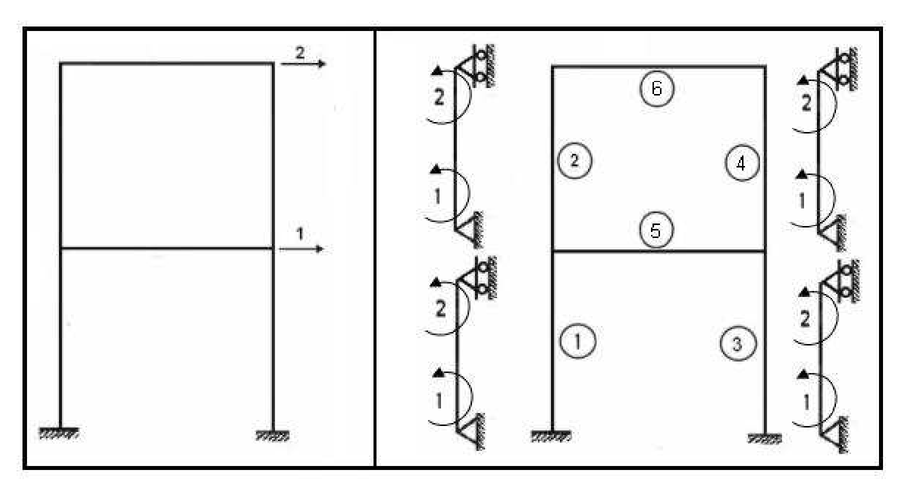


Figura 8.11.2 Sistema $Q-q$ **Figura 8.11.3** Sistema $P-p$

- **SOLUCIÓN**

La estructura tiene dos grados de libertad que son los desplazamientos horizontales de cada uno de los pisos. Estos grados de libertad se indican en la figura 8.11.2. Por ser los elementos verticales axialmente rígidos no existe deformación axial luego hay dos coordenadas en el sistema $\boldsymbol{P}-\boldsymbol{p}$ de cada elemento. En la figura 8.11.3 se muestra el sistema de coordenadas de los elementos de la estructura analizada y la numeración de los elementos. Nótese que no existe sistema $\boldsymbol{P}-\boldsymbol{p}$ en los elementos horizontales esto se debe a que son elementos completamente rígidos.

De acuerdo al procedimiento de cálculo indicado en el apartado 8.1.2 se construye la deformada elemental q_2 ya que se va a encontrar los elementos de la segunda columna de la matriz de rigidez.

- $q_2 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 2$

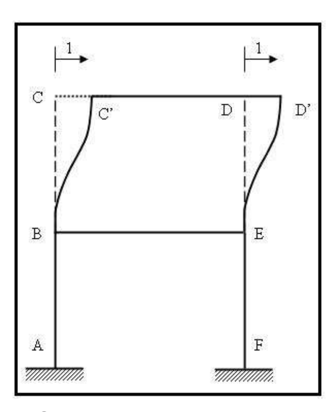


Figura 8.11.4 Deformada elemental q_2

$$p_1^{(1)} = 0 \qquad p_1^{(2)} = \frac{1}{L} \qquad p_1^{(3)} = 0 \qquad p_1^{(4)} = \frac{1}{L}$$

$$p_2^{(1)} = 0 \qquad p_2^{(2)} = \frac{1}{L} \qquad p_2^{(3)} = 0 \qquad p_2^{(4)} = \frac{1}{L}$$

- Cargas Internas $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{k}\ \boldsymbol{p}$. Únicamente los elementos dos y cuatro tienen deformaciones.

$$\boldsymbol{P}^{(2)} = \boldsymbol{P}^{(4)} = \begin{bmatrix} \frac{4EI_o}{L} & \frac{2EI_o}{L} \\ \frac{2EI_o}{L} & \frac{4EI_o}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6EI_0}{L^2} \\ \frac{6EI_0}{L^2} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$P_1^{(1)} = 0 \qquad P_1^{(2)} = \frac{6EI_o}{L^2} \qquad P_1^{(3)} = 0 \qquad P_1^{(4)} = \frac{6EI_o}{L^2}$$

$$P_2^{(1)} = 0 \qquad P_2^{(2)} = \frac{6EI_o}{L^2} \qquad P_2^{(3)} = 0 \qquad P_2^{(4)} = \frac{6EI_o}{L^2}$$

- Equilibrio de elementos

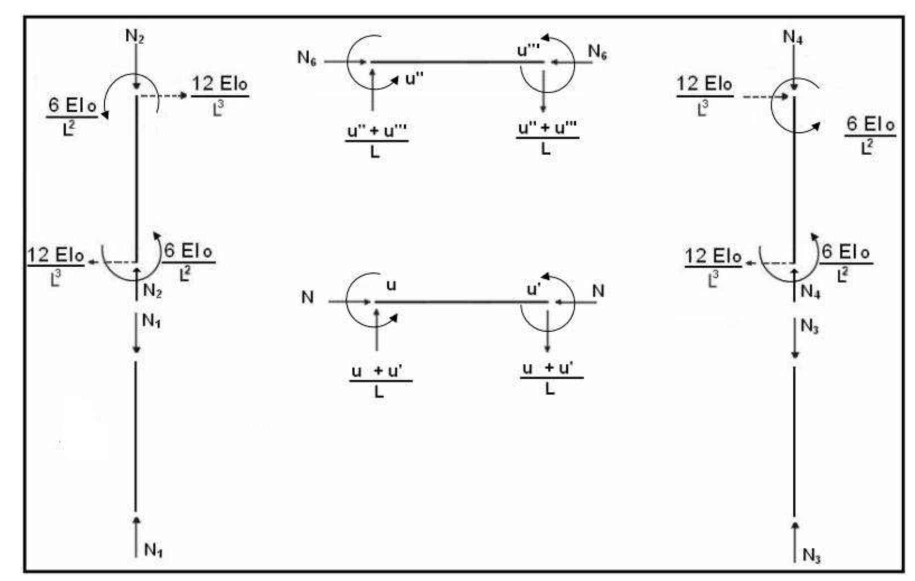


Figura 8.11.5 Equilibrio de los elementos

- Equilibrio de Juntas

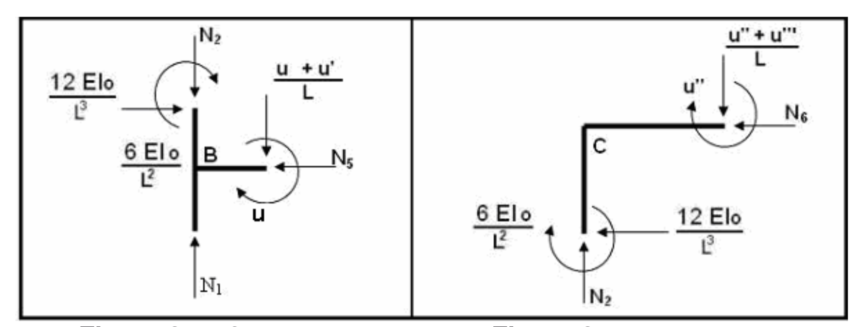


Figura 8.11.6 Junta B **Figura 8.11.7** Junta C

- **Junta B**

$$\sum F_X = 0 = \frac{12EI_o}{L^3} - N_5$$

$$\sum F_Y = 0 = N_1 - N_2 - \frac{u + u'}{L}$$

$$\sum M = 0 = \frac{6EI_o}{L^2} + u$$

- **Junta C**

$$\sum F_X = 0 = N_6 + \frac{12EI_o}{L^3}$$

$$\sum F_Y = 0 = N_2 - \frac{u'' + u'''}{L}$$

$$\sum M = 0 = u'' + \frac{6EI_o}{L^2}$$

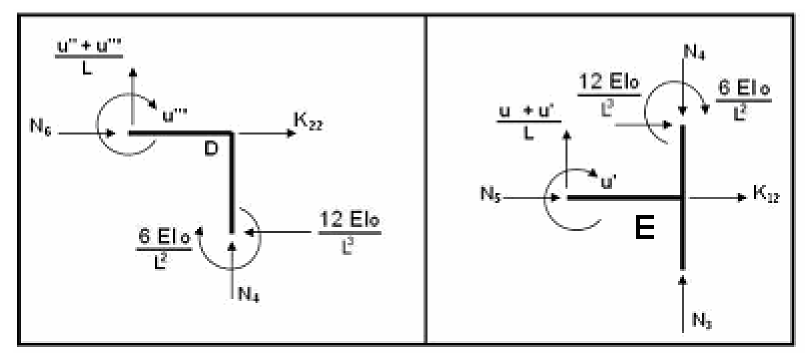


Figura 8.11.8 Junta D **Figura 8.11.9** Junta E

- **Junta D**

$$\sum F_X = 0 = K_{22} + N_6 - \frac{12EI_o}{L^3}$$

$$\sum F_Y = 0 = N_4 + \frac{u'' + u'''}{L}$$

$$\sum M = 0 = \frac{6EI_o}{L^2} + u'''$$

- **Junta E**

$$\sum F_X = 0 = \frac{12EI_o}{L^3} + N_5 + K_{12}$$

$$\sum F_Y = 0 = N_3 - N_4 + \frac{u + u'}{L}$$

$$\sum M = 0 = \frac{6EI_o}{L^2} + u'$$

Al resolver las 12 ecuaciones con 12 incógnitas que se han presentado, se encuentra:

$$N_1 = -\frac{24EI_o}{L^3} \qquad N_2 = -\frac{12EI_o}{L^3} \qquad N_3 = \frac{24EI_o}{L^3} \qquad N_4 = \frac{12EI_o}{L^3}$$

$$N_5 = \frac{12EI_o}{L^3} \qquad N_6 = -\frac{12EI_o}{L^3} \qquad u = -\frac{6EI_o}{L^2} \qquad u' = -\frac{6EI_o}{L^2}$$

$$u'' = -\frac{6EI_o}{L^2} \qquad u''' = -\frac{6EI_o}{L^2} \qquad K_{12} = -\frac{24EI_o}{L^3} \qquad K_{22} = \frac{24EI_o}{L^3}$$

- Fuerzas exteriores

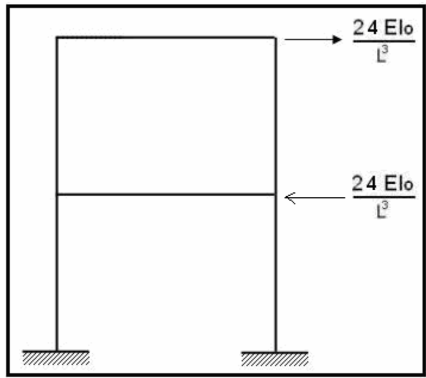


Figura 8.11.10 Elementos de la segunda columna de $\boldsymbol{K}$

De ésta manera se ha obtenido los elementos de la segunda columna de la matriz de rigidez a partir de su definición, se deja al estudiante el obtener los elementos de la primera columna de $\boldsymbol{K}$. El resultado completo es:

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} \dfrac{48EI_o}{L^3} & -\dfrac{24EI_o}{L^3} \\ -\dfrac{24EI_o}{L^3} & \dfrac{24EI_o}{L^3} \end{bmatrix}$$

- **EJEMPLO N.- 7**

Encontrar a partir de su definición los elementos de la segunda columna de la matriz de flexibilidad de la estructura presentada en la figura 8.11.1

- **SOLUCIÓN**

De acuerdo al procedimiento de cálculo indicado en el apartado 8.2.2 se tiene:

- $Q_2 = 1 \quad y \quad Q_i = 0 \quad i \neq 2$

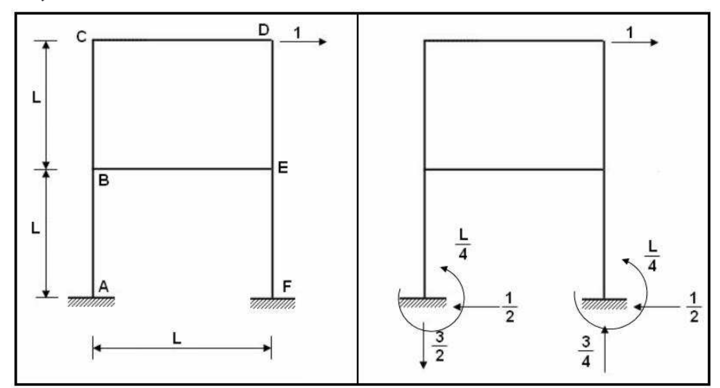


Figura 8.12.1 Fuerza unitaria **Figura 8.12.2** Equilibrio de estructura.

- Equilibrio de elementos

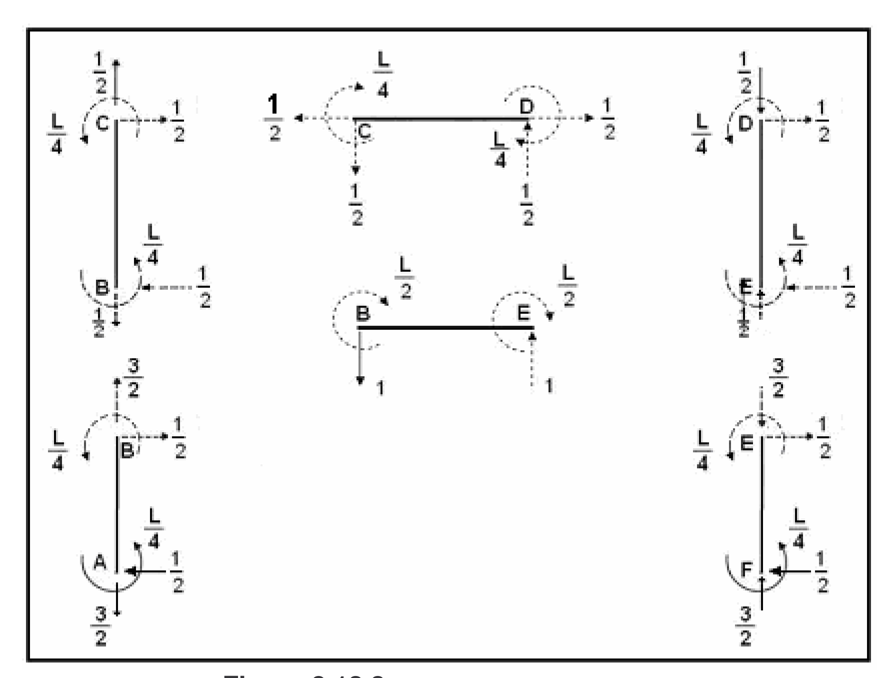


Figura 8.12.3 Fuerzas internas

Por consiguiente:

$$P_1^{(1)} = \frac{L}{4} \qquad P_1^{(2)} = \frac{L}{4} \qquad P_1^{(3)} = \frac{L}{4} \qquad P_1^{(4)} = \frac{L}{4}$$

$$P_2^{(1)} = \frac{L}{4} \qquad P_2^{(2)} = \frac{L}{4} \qquad P_2^{(3)} = \frac{L}{4} \qquad P_2^{(4)} = \frac{L}{4}$$

- Cálculo de las deformaciones

$$\boldsymbol{f}^{(1)} = \boldsymbol{f}^{(2)} = \boldsymbol{f}^{(3)} = \boldsymbol{f}^{(4)} = \frac{L}{6EI_o}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{f}\ \boldsymbol{P}$$

$$p_1^{(1)} = \frac{L^2}{24EI_o} \qquad p_1^{(2)} = \frac{L^2}{24EI_o} \qquad p_1^{(3)} = \frac{L^2}{24EI_o} \qquad p_1^{(4)} = \frac{L^2}{24EI_o}$$

$$p_2^{(1)} = \frac{L^2}{24EI_o} \qquad p_2^{(2)} = \frac{L^2}{24EI_o} \qquad p_2^{(3)} = \frac{L^2}{24EI_o} \qquad p_2^{(4)} = \frac{L^2}{24EI_o}$$

- Cálculo del vector $\boldsymbol{q}$

Se denomina $\alpha = \frac{L^2}{24EI_o}$. Por lo tanto las deformaciones a flexión en cada uno de los elementos valen α toda vez que tienen ese valor.

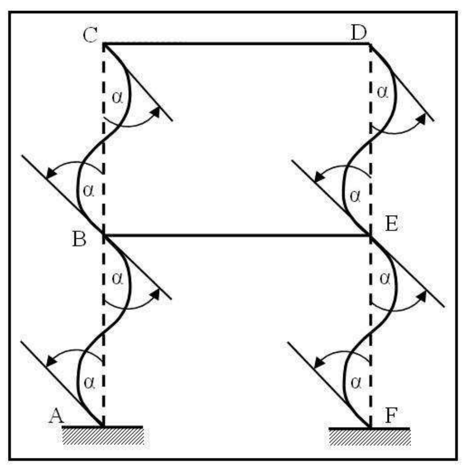


Figura 8.12.4 Deformaciones obtenidas

La estructura de la figura 8.12.4 no cumple con la geometría de deformación, para esto se procede de la siguiente forma:

i) El nudo D se desplaza verticalmente una magnitud igual a $\alpha\ L$ como lo indica la figura 8.12.5 de esa manera las vigas giran un ángulo α y ya cumplen con el principio de Williot. Pero el nudo F se ha desplazado a F'. En consecuencia se solucionó un problema pero se creó otro y para solucionarlo se da el siguiente paso.

ii) Con centro en el nudo A, se rota a la estructura en sentido horario un ángulo α como lo ilustra la figura 8.12.6.

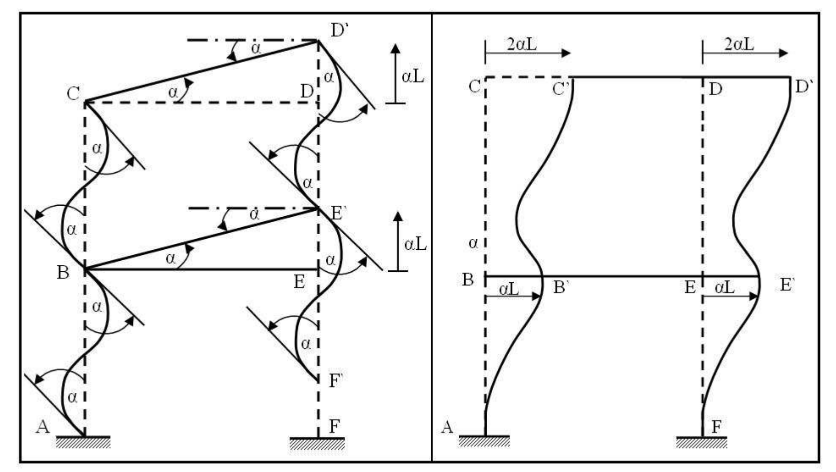


Figura 8.12.5 **Figura 8.12.6**

De la figura 8.12.6 se tiene:

$$q_1 = \alpha\ L = \frac{L^3}{24EI_o} \qquad\qquad q_2 = 2\ \alpha\ L = \frac{L^3}{12EI_o}$$

Pero

$$q_1 = F_{12} = \frac{L^3}{24EI_o} \qquad\qquad q_2 = F_{22} = \frac{L^3}{12EI_o}$$

- **EJEMPLO N.- 8**

Si en conexión con el problema 6, la matriz $\boldsymbol{T}$ define una transformación de coordenadas de la forma $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{T}\ \boldsymbol{q}^*$. Interpretar las nuevas coordenadas $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{q}$ y encontrar la matriz de rigidez usando la ley de transformación de coordenadas de éste nuevo sistema.

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- **SOLUCIÓN**

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{T}\ \boldsymbol{q}^*$$

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1^* \\ q_2^* \end{bmatrix}$$

$$q_1 = 1 * q_1^* + 0 * q_2^* = q_1^*$$

$$q_2 = 1 * q_1^* + 1 * q_2^* = q_1^* + q_2^*$$

De donde:

$$q_1^* = q_1$$

$$q_2^* = q_2 - q_1$$

Por lo tanto las coordenadas $\boldsymbol{q}^*$ miden desplazamientos relativos.

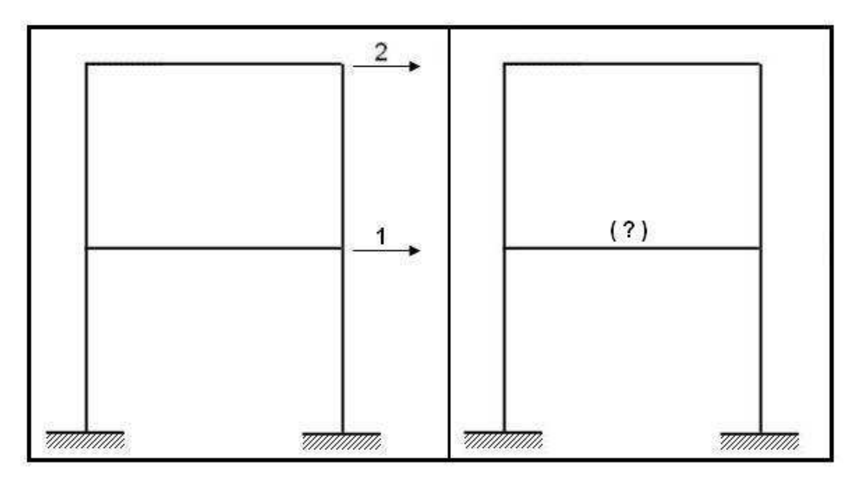


Figura 8.13.1 Sistema $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{q}$ **Figura 8.13.2** Sistema $\boldsymbol{Q}^* - \boldsymbol{q}^*$

- Cálculo de $\boldsymbol{K}^*$

$$\boldsymbol{K}^* = \boldsymbol{T}^t \ \boldsymbol{K} \ \boldsymbol{T}$$

$$\boldsymbol{K}^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{48EI_o}{L^3} & -\frac{24EI_o}{L^3} \\ -\frac{24EI_o}{L^3} & \frac{24EI_o}{L^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}^* = \begin{bmatrix} \frac{24EI_o}{L^3} & 0 \\ 0 & \frac{24EI_o}{L^3} \end{bmatrix}$$

- **EJEMPLO N.- 9**

La matriz de flexibilidad $\boldsymbol{F}$ para la estructura del problema 7 es:

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \frac{L^3}{24EI_o} & \frac{L^3}{24EI_o} \\ \frac{L^3}{24EI_o} & \frac{L^3}{12EI_o} \end{bmatrix}$$

En este caso el sistema de coordenadas $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{q}$ es el presentado en la figura 8.11.2. Se pide calcular la matriz de flexibilidad $\boldsymbol{F}^*$ para el sistema de coordenadas de la figura 8.14, utilizando la regla práctica.

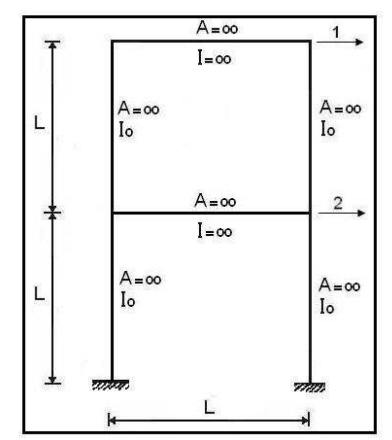


Figura 8.14 Coordenadas generalizadas del ejemplo 14

- **SOLUCIÓN**

Se cambia la fila uno a la fila dos.

$$\begin{bmatrix} \frac{L^3}{24EI_o} & \frac{L^3}{12EI_o} \\ \frac{L^3}{24EI_o} & \frac{L^3}{24EI_o} \end{bmatrix}$$

Finalmente se cambia la columna uno por la columna dos.

$$\begin{bmatrix} \frac{L^3}{12EI_o} & \frac{L^3}{24EI_o} \\ \frac{L^3}{24EI_o} & \frac{L^3}{24EI_o} \end{bmatrix}$$

8. 5 EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicio N.- 1

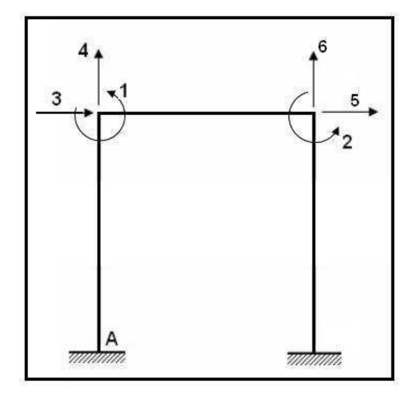
Encontrar la matriz de rigidez utilizando el concepto, de la estructura del ejemplo 8, empleando las coordenadas $\boldsymbol{Q}^* - \boldsymbol{q}^*$.

Ejercicio N.- 2

Generar directamente de su definición los términos de la primera columna de la matriz de flexibilidad de la estructura mostrada en la figura 8.11.1

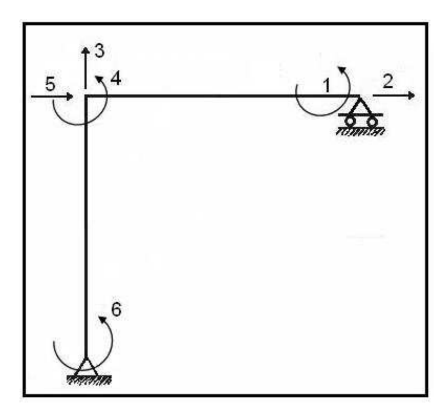
Ejercicio N.- 3

Calcular la matriz de rigidez para el pórtico de la figura 8.2.1, empleando la transformación de coordenadas. Si el nuevo sistema de coordenadas es:



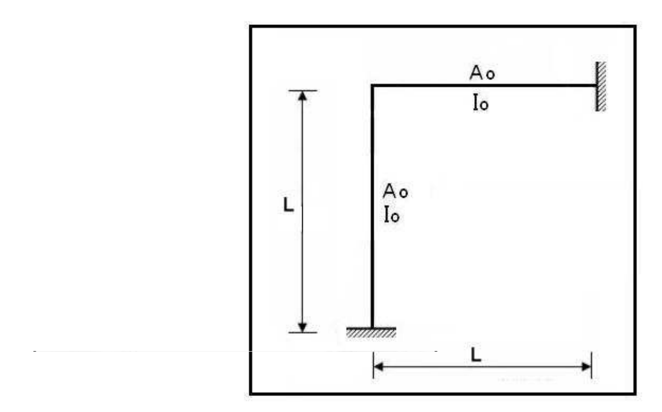
Ejercicio N.- 4

Para la estructura de la figura 8.6 obtener la matriz de flexibilidad si el sistema de coordenadas generalizadas es el mostrado a continuación. Utilice la regla práctica.



Ejercicio N.- 5

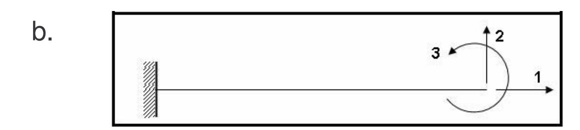
Hallar la matriz de rigidez usando el concepto del siguiente pórtico plano.



Emplear como sistemas de coordenadas del elemento:

a.

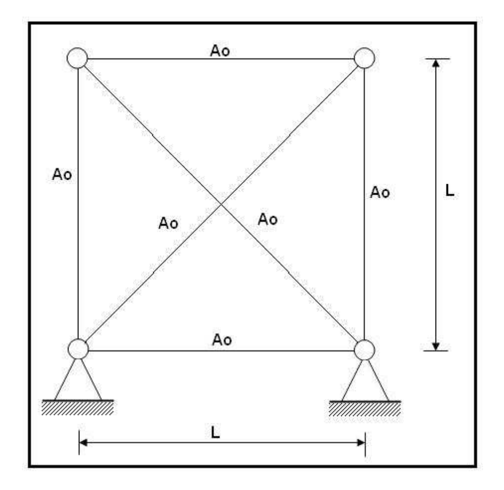
b.



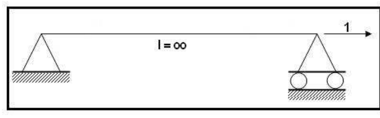
c. Sistema a. para elemento vertical y sistema b. para elemento horizontal.

Ejercicio N.- 6

Obtener la matriz de rigidez para la armadura presentada.



Usar como sistema de coordenadas del elemento el siguiente:



Sistema **P-p**

CAPITULO 9

MATRICES A Y B

RESUMEN

Se presenta el cálculo de las matrices $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ las mismas que sirven para obtener las matrices de rigidez $\boldsymbol{K}$ y de flexibilidad $\boldsymbol{F}$ de estructuras. En éste capítulo se trabaja con pórticos planos y armaduras planas.

La matriz $\boldsymbol{B}$ se obtiene únicamente en estructuras isostáticas. Por ser muy importante su estudio se resuelven 11 ejemplos del cálculo de las matrices $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$.

9. 1 RELACIÓN ENTRE DESPLAZAMIENTOS Y DEFORMACIONES

9.1.1 Introducción

En el capítulo anterior la numeración de las deformaciones que experimentan los elementos de una estructura se realizó utilizando un subíndice para indicar el número del elemento. Ahora se va a omitir éste subíndice y se tendrá por ejemplo que el sistema de coordenadas $\boldsymbol{P-p}$ para la estructura de la figura 9.1.1 es el presentado en la figura 9.1.2.

Es decir que la numeración del sistema $\boldsymbol{P-p}$ se lo hará de corrido, se entiende que las tres primeras deformaciones corresponden al elemento AB, las tres subsiguientes (4,5 y 6) al elemento BC y las tres últimas (7,8 y 9) al elemento CD. En éste caso por ser los elementos totalmente flexibles se tienen tres coordenadas por elemento. Es necesario recordar que el sistema $\boldsymbol{P-p}$ con el cual se trabaja es arbitrario, el que más se utiliza es el indicado en la figura 9.1.2.

En la figura 9.1.3 se indica el sistema de coordenadas $\boldsymbol{Q-q}$ para el pórtico analizado. Se quiere establecer una relación entre los desplazamientos $\boldsymbol{q}$ y las deformaciones $\boldsymbol{p}$. Esto se lo consigue por medio de la matriz $\boldsymbol{A}$, definida de la siguiente manera:

$$p = A\, q \qquad (10.1)$$

donde A es la matriz de compatibilidad que transforma los desplazamientos de una estructura en deformaciones, en general será de orden m x n. Siendo m el número de filas que es igual a las coordenadas p y n el número de columnas que es igual a las coordenadas q.

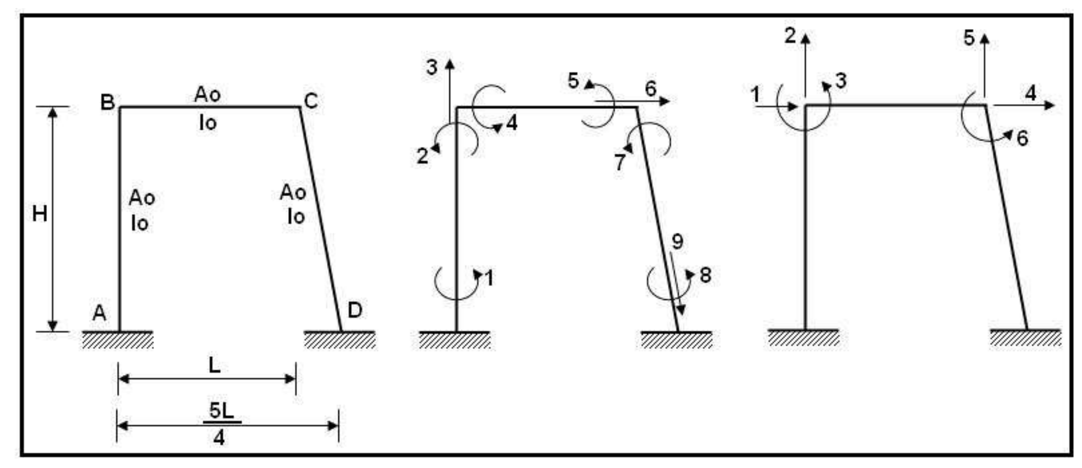


Figura 9.1.1 **Figura 9.1.2** Sistema $P - p$ **Figura 9.1.3** Sistema $Q - q$

De la definición de la matriz A se puede ver que un término A_{ij} no es más que el valor de la deformación p_i correspondiente a la deformada elemental $q_j = 1$ y las demás nulas. En consecuencia se la obtiene utilizando exclusivamente la geometría de deformación. Finalmente cada elemento A_{ij} representa el coeficiente de influencia de las deformaciones para los desplazamientos.

9.1.2 Definición

Cuando la matriz A se determina usando solo la geometría se dice que el sistema es *cinemáticamente determinado.*

9.1.3 Matriz fuerza carga A^t

Si $p = A\, q$ se puede demostrar utilizando el principio de los trabajos virtuales que $Q = A^t\ P$. Donde A^t es la matriz transpuesta de A que relaciona las cargas internas P con el vector de cargas generalizadas Q.

Otra forma de demostrar es igualando la energía de deformación externa con la energía de deformación interna. En efecto se tiene:

- Energía de deformación externa $= \frac{1}{2} q^t\ Q$
- Energía de deformación interna $= \frac{1}{2} p^t P$

Por lo tanto: $q^t Q = p^t P$

Pero $p = A\,q \qquad \Rightarrow \qquad q^t Q = (A\,q)^t\ P$

De donde: $q^t\ Q = q^t\ A^t\ P \qquad \Rightarrow Q = A^t\ P$

9. 2 CÁLCULO DE LA MATRIZ A

9.2.1 Pórticos Planos

La matriz A sirve para encontrar la matriz de rigidez de una estructura, con este objetivo el sistema de coordenadas de elemento que más se emplea es el presentado en la figura 9.2.1 para el caso de un elemento totalmente flexible.

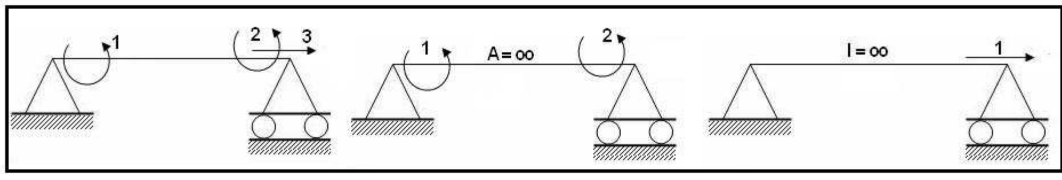


Figura 9.2.1 **Figura 9.2.2** **Figura 9.2.3**

Si el elemento es axialmente rígido se emplean las coordenadas de la figura 9.2.2 y si el elemento es transversalmente rígido las coordenadas indicadas en la figura 9.2.3. Las ecuaciones con las cuales se calcula las deformaciones para un elemento totalmente flexible son:

$$p_1 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L}$$

$$p_2 = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{L}$$

$$p_3 = u_2 - u_1$$

En éste apartado se desarrollan tres ejercicios en los cuales se usa las coordenadas indicadas pero se puede calcular la matriz A empleando cualquier sistema de coordenadas $P - p$ como se ilustra en el apartado 9.2.3.

- **EJEMPLO N.- 1**

Hallar la matriz A de la estructura de la figura 9.3.1 compuesta por elementos totalmente flexibles.

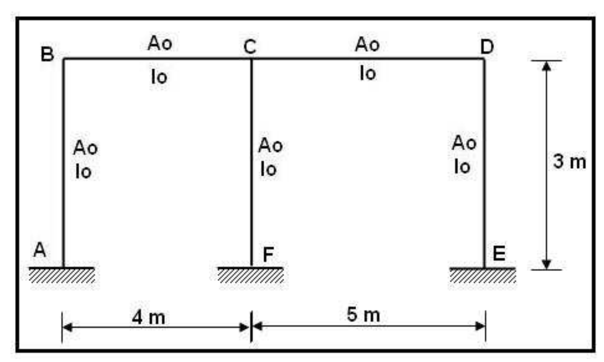


Figura 9.3.1 Estructura de ejemplo 1

- **SOLUCIÓN**

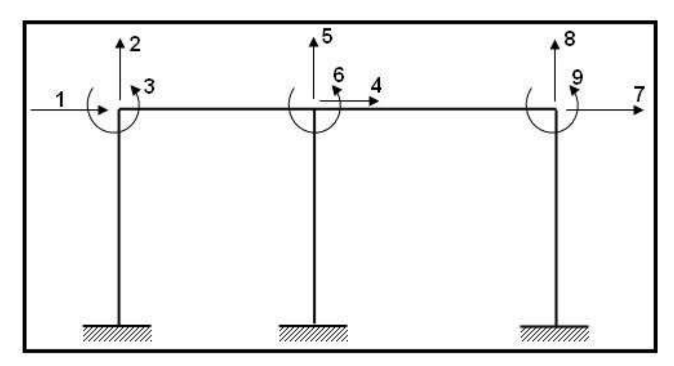


Figura 9.3.2 Sistema $Q-q$

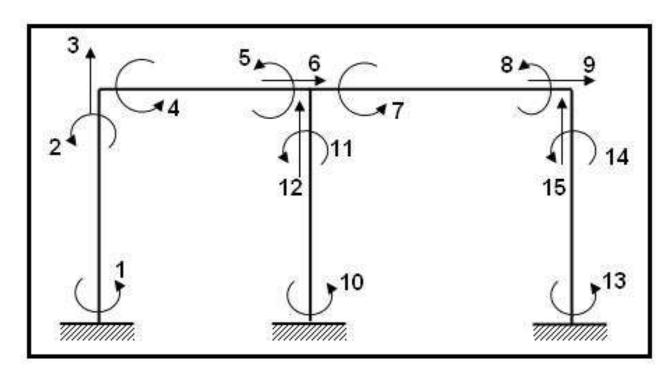


Figura 9.3.3 Sistema $P-p$

- Primera columna de A

$$q_1 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 1$$

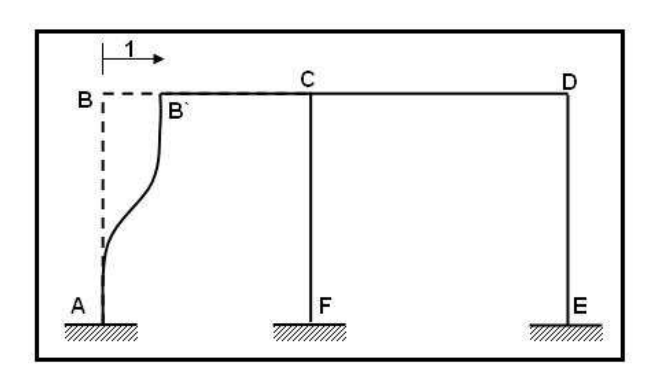


Figura 9.3.4 Deformada elemental q_1

$$p_1 = \frac{1}{3} \qquad p_4 = 0 \qquad p_7 = 0 \qquad p_{10} = 0 \qquad p_{13} = 0$$

$$p_2 = \frac{1}{3} \qquad p_5 = 0 \qquad p_8 = 0 \qquad p_{11} = 0 \qquad p_{14} = 0$$

$$p_3 = 0 \qquad p_6 = -1 \qquad p_9 = 0 \qquad p_{12} = 0 \qquad p_{15} = 0$$

- Segunda columna de $\boldsymbol{A}$



$$q_2 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 2$$

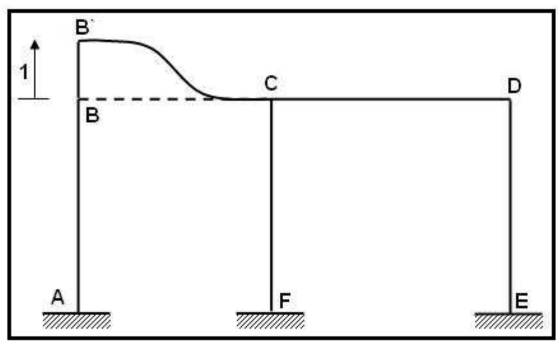


Figura 9.3.5 Deformada elemental q_2

$$p_1 = 0 \qquad p_4 = \frac{1}{4} \qquad p_7 = 0 \qquad p_{10} = 0 \qquad p_{13} = 0$$
$$p_2 = 0 \qquad p_5 = \frac{1}{4} \qquad p_8 = 0 \qquad p_{11} = 0 \qquad p_{14} = 0$$
$$p_3 = 1 \qquad p_6 = 0 \qquad p_9 = 0 \qquad p_{12} = 0 \qquad p_{15} = 0$$

- Tercera columna de $\boldsymbol{A}$

$$q_3 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 3$$

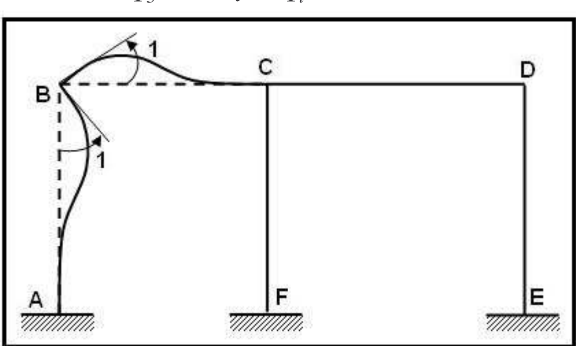


Figura 9.3.6 Deformada elemental q_3

$$p_1 = 0 \qquad p_4 = 1 \qquad p_7 = 0 \qquad p_{10} = 0 \qquad p_{13} = 0$$
$$p_2 = 1 \qquad p_5 = 0 \qquad p_8 = 0 \qquad p_{11} = 0 \qquad p_{14} = 0$$
$$p_3 = 0 \qquad p_6 = 0 \qquad p_9 = 0 \qquad p_{12} = 0 \qquad p_{15} = 0$$

- Cuarta columna de $\boldsymbol{A}$

$$q_4 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 4$$

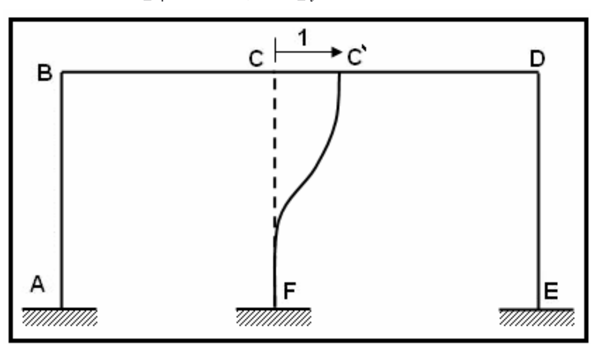


Figura 9.3.7 Deformada elemental q_4

$$p_1 = 0 \quad p_4 = 0 \quad p_7 = 0 \quad p_{10} = \frac{1}{3} \quad p_{13} = 0$$
$$p_2 = 0 \quad p_5 = 0 \quad p_8 = 0 \quad p_{11} = \frac{1}{3} \quad p_{14} = 0$$
$$p_3 = 0 \quad p_6 = 1 \quad p_9 = -1 \quad p_{12} = 0 \quad p_{15} = 0$$

- Quinta columna de $\boldsymbol{A}$

$$q_5 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 5$$

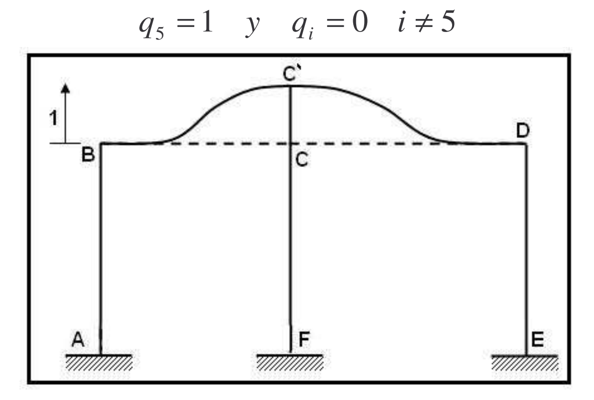


Figura 9.3.8 Deformada elemental q_5

$$p_1 = 0 \quad p_4 = -\frac{1}{4} \quad p_7 = \frac{1}{5} \quad p_{10} = 0 \quad p_{13} = 0$$
$$p_2 = 0 \quad p_5 = -\frac{1}{4} \quad p_8 = \frac{1}{5} \quad p_{11} = 0 \quad p_{14} = 0$$
$$p_3 = 0 \quad p_6 = 0 \quad p_9 = 0 \quad p_{12} = 1 \quad p_{15} = 0$$

- Sexta columna de $\boldsymbol{A}$

$$q_6 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 6$$

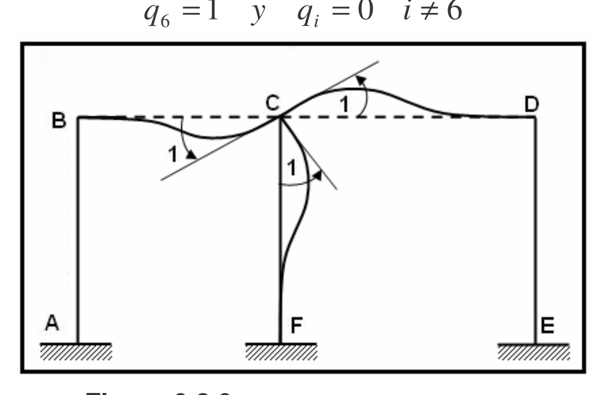


Figura 9.3.9 Deformada elemental q_6

$$p_1 = 0 \quad p_4 = 0 \quad p_7 = 1 \quad p_{10} = 0 \quad p_{13} = 0$$
$$p_2 = 0 \quad p_5 = 1 \quad p_8 = 0 \quad p_{11} = 1 \quad p_{14} = 0$$
$$p_3 = 0 \quad p_6 = 0 \quad p_9 = 0 \quad p_{12} = 0 \quad p_{15} = 0$$

- Séptima columna de $\boldsymbol{A}$



$$q_7 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 7$$

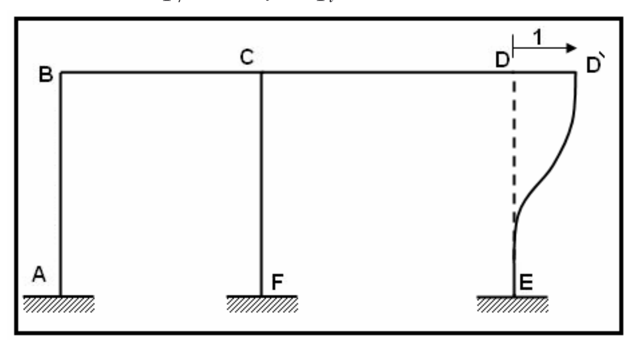


Figura 9.3.10 Deformada elemental q_7

$$p_1 = 0 \qquad p_4 = 0 \qquad p_7 = 0 \qquad p_{10} = 0 \qquad p_{13} = \frac{1}{3}$$

$$p_2 = 0 \qquad p_5 = 0 \qquad p_8 = 0 \qquad p_{11} = 0 \qquad p_{14} = \frac{1}{3}$$

$$p_3 = 0 \qquad p_6 = 0 \qquad p_9 = 1 \qquad p_{12} = 0 \qquad p_{15} = 0$$

- Octava columna de $\boldsymbol{A}$

$$q_8 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 8$$

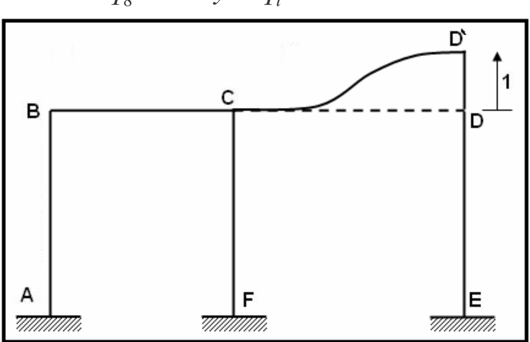


Figura 9.3.11 Deformada elemental q_8

$$p_1 = 0 \qquad p_4 = 0 \qquad p_7 = -\frac{1}{5} \qquad p_{10} = 0 \qquad p_{13} = 0$$

$$p_2 = 0 \qquad p_5 = 0 \qquad p_8 = -\frac{1}{5} \qquad p_{11} = 0 \qquad p_{14} = 0$$

$$p_3 = 0 \qquad p_6 = 0 \qquad p_9 = 0 \qquad p_{12} = 0 \qquad p_{15} = 1$$

- Novena columna de $\boldsymbol{A}$

$$q_9 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 9$$

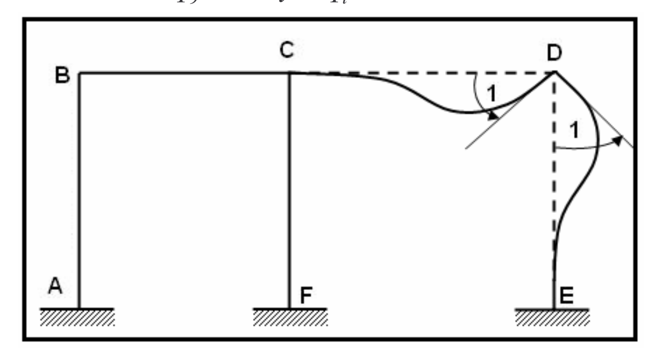


Figura 9.3.12 Deformada elemental q_9

$$
\begin{array}{lllll}
p_1 = 0 & p_4 = 0 & p_7 = 0 & p_{10} = 0 & p_{13} = 0 \\
p_2 = 0 & p_5 = 0 & p_8 = 1 & p_{11} = 0 & p_{14} = 1 \\
p_3 = 0 & p_6 = 0 & p_9 = 0 & p_{12} = 0 & p_{15} = 0
\end{array}
$$

Por lo tanto la matriz $\boldsymbol{A}$ resulta:

$$
\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}
\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & \frac{1}{4} & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & 1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}
$$

La matriz $\boldsymbol{A}$ es particionada. En efecto para la estructura que se está analizando las tres primeras columnas corresponden a las deformaciones del elemento 1, que viene a ser la columna izquierda, las tres restantes al elemento 2 que corresponde a la viga izquierda, etc.

Para encontrar la matriz de rigidez usando el concepto, se encontraba en primer lugar el diagrama elemental q_i, luego se hallaban las deformaciones del elemento. Estos dos pasos se

realizan por medio de la matriz $\boldsymbol{A}$, de tal forma que la indicada matriz sirve para encontrar la matriz de rigidez de la estructura.

- **EJEMPLO N.- 2**

Para la estructura de la figura 9..4.1. Se pide:

i) Seleccionar un sistema de coordenadas $\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{q}$ apropiado.

ii) Seleccionar un sistema de coordenadas $\boldsymbol{P}-\boldsymbol{p}$ apropiado.

iii) Calcular la matriz $\boldsymbol{A}$.

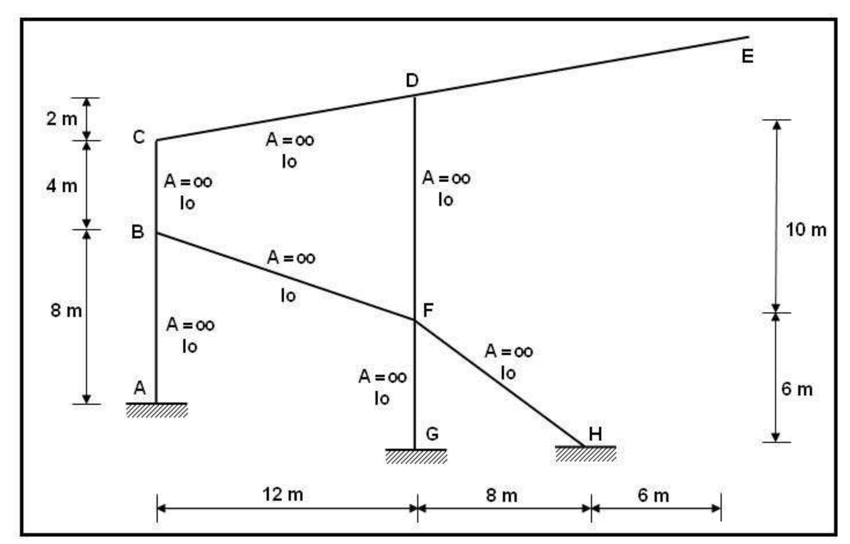


Figura 9.4.1 Estructura de ejemplo 2.

- **SOLUCIÓN**

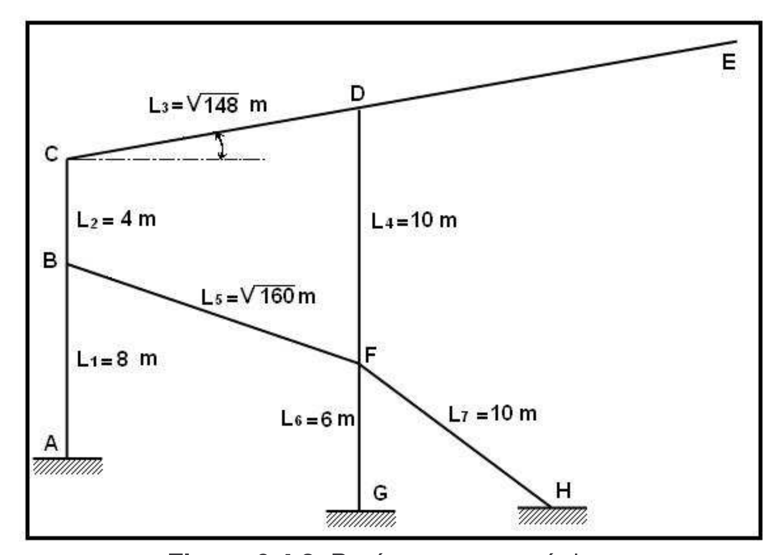


Figura 9.4.2 Parámetros geométricos

$$sen\alpha = \frac{2}{\sqrt{148}} \qquad \cos\alpha = \frac{12}{\sqrt{148}} \qquad tg\alpha = \frac{1}{6}$$

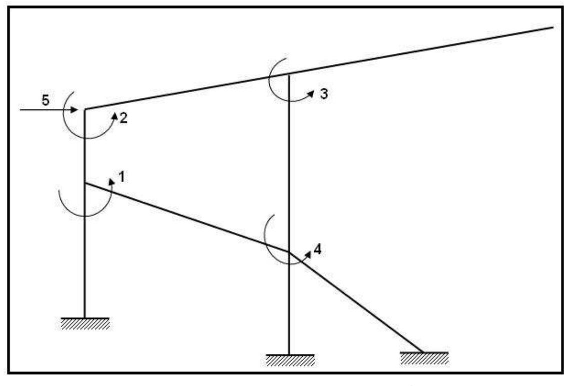


Figura 9.4.3 Sistema $Q-q$

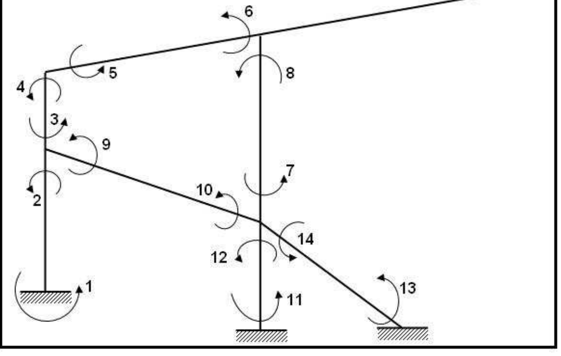


Figura 9.4.4 Sistema $P-p$

Nótese que no se consideran coordenadas de elemento en el voladizo. Esta es una forma de resolver el problema. Las cargas que gravitan en los voladizos se los calculan aparte como que están empotrados y las reacciones de empotramiento se colocan con sentido contrario en la junta y se elimina el voladizo.

- Primera columna de A

$$q_1 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 1$$

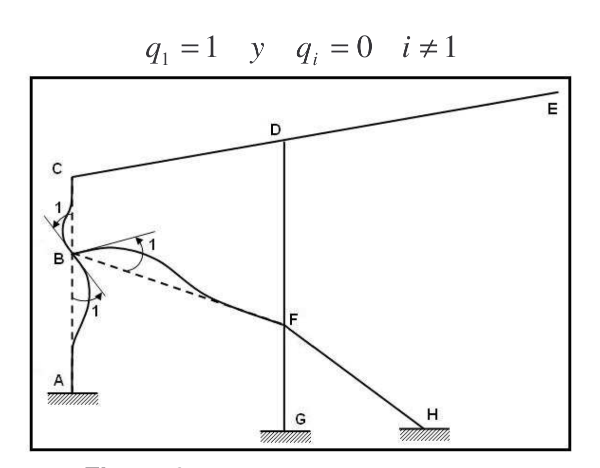


Figura 9.4.5 Deformada elemental q_1

$$p_1 = 0 \quad p_3 = 1 \quad p_5 = 0 \quad p_7 = 0 \quad p_9 = 1 \quad p_{11} = 0 \quad p_{13} = 0$$
$$p_2 = 1 \quad p_4 = 0 \quad p_6 = 0 \quad p_8 = 0 \quad p_{10} = 0 \quad p_{12} = 0 \quad p_{14} = 0$$

- Segunda columna de A

$$q_2 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 2$$

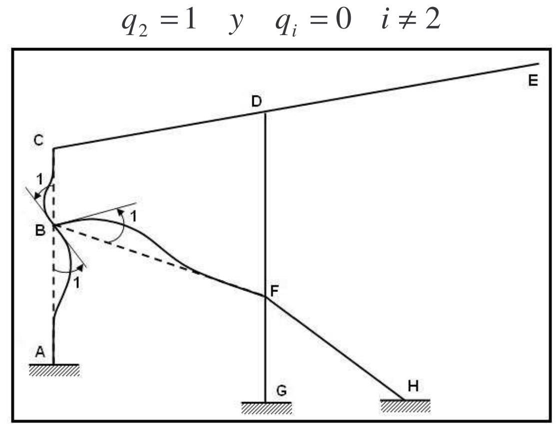


Figura 9.4.6 Deformada elemental q_2

$$p_1 = 0 \quad p_3 = 0 \quad p_5 = 1 \quad p_7 = 0 \quad p_9 = 0 \quad p_{11} = 0 \quad p_{13} = 0$$
$$p_2 = 0 \quad p_4 = 1 \quad p_6 = 0 \quad p_8 = 0 \quad p_{10} = 0 \quad p_{12} = 0 \quad p_{14} = 0$$

- Tercera columna de $\boldsymbol{A}$

$$q_3 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 3$$

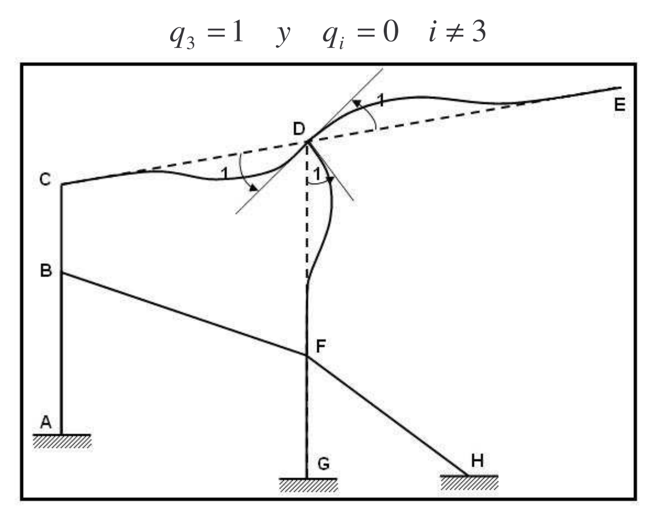


Figura 9.4.7 Deformada elemental q_3

$$p_1 = 0 \quad p_3 = 0 \quad p_5 = 0 \quad p_7 = 0 \quad p_9 = 0 \quad p_{11} = 0 \quad p_{13} = 0$$
$$p_2 = 0 \quad p_4 = 0 \quad p_6 = 1 \quad p_8 = 1 \quad p_{10} = 0 \quad p_{12} = 0 \quad p_{14} = 0$$

- Cuarta columna de $\boldsymbol{A}$

$$q_4 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 4$$

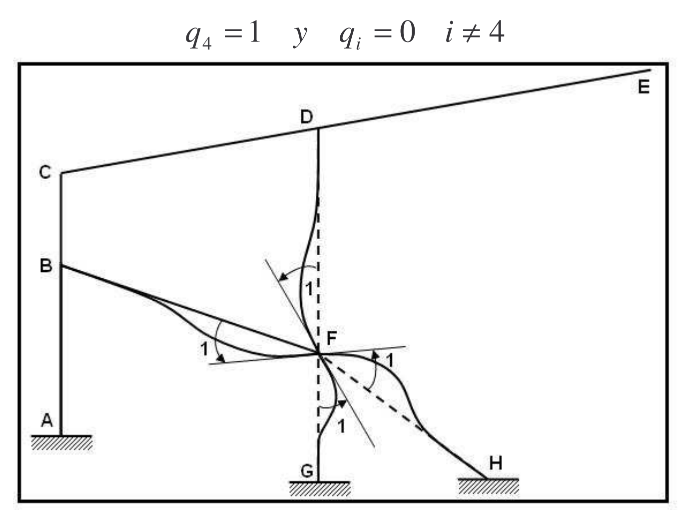


Figura 9.4.8 Deformada elemental q_4

$$p_1 = 0 \quad p_3 = 0 \quad p_5 = 0 \quad p_7 = 1 \quad p_9 = 0 \quad p_{11} = 0 \quad p_{13} = 0$$
$$p_2 = 0 \quad p_4 = 0 \quad p_6 = 0 \quad p_8 = 0 \quad p_{10} = 1 \quad p_{12} = 1 \quad p_{14} = 1$$

- Quinta columna de $\mathbf{A}$

$$q_5 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 5$$

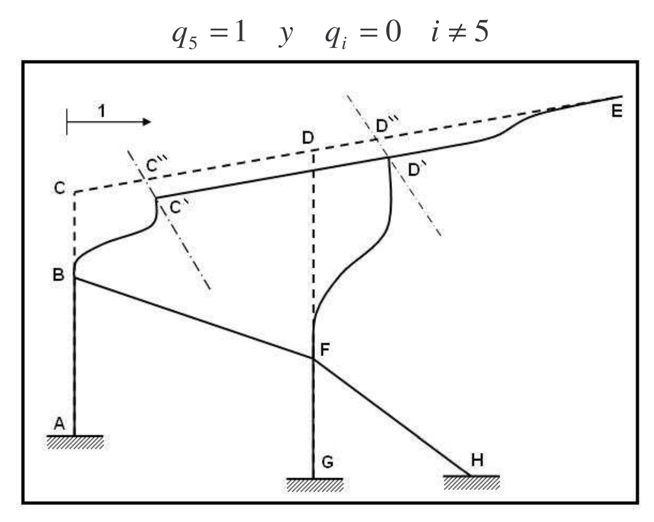


Figura 9.4.9 Deformada elemental q_5

Para las deformaciones del elemento CD, se observa en el triángulo CC'C''

$$u_1 = \cos\alpha = \frac{12}{\sqrt{148}} \qquad v_1 = -sen\alpha = -\frac{2}{\sqrt{148}}$$

Triángulo CC'C'' es igual al triángulo DD'D''. Luego:

$$u_2 = \cos\alpha = \frac{12}{\sqrt{148}} \qquad v_2 = -sen\alpha = -\frac{2}{\sqrt{148}}$$

El elemento CD no se deforma a flexión luego $p_5 = p_6 = 0$. Las deformaciones del elemento DF es igual al desplazamiento horizontal DD' que vale la unidad sobre la longitud que es de 10 m.

$$p_1 = 0 \quad p_3 = \frac{1}{4} \quad p_5 = 0 \quad p_7 = \frac{1}{10} \quad p_9 = 0 \quad p_{11} = 0 \quad p_{13} = 0$$

$$p_2 = 1 \quad p_4 = \frac{1}{4} \quad p_6 = 0 \quad p_8 = \frac{1}{10} \quad p_{10} = 0 \quad p_{12} = 0 \quad p_{14} = 0$$

En éste ejemplo la matriz $\mathbf{A}$ se particiona cada dos filas ya que cada elemento tiene dos coordenadas en su sistema $\mathbf{P} - \mathbf{p}$ por ser axialmente rígido. La matriz de compatibilidad de deformaciones $\mathbf{A}$ del ejemplo desarrollado resulta:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{10} \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- **EJEMPLO N.- 3**

Encontrar la matriz A para el pórtico plano de la figura 9.5.1. Previamente seleccionar sistemas $Q-q$ y $P-p$ que sean apropiados.

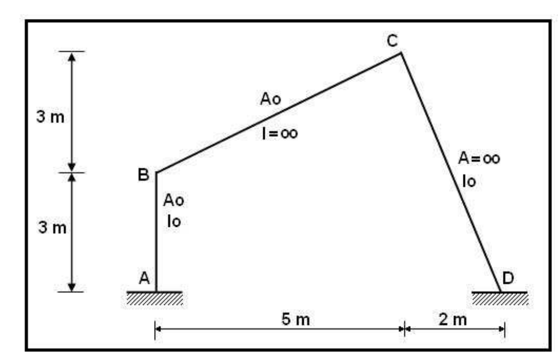


Figura 9.5.1 Estructura de ejemplo 3.

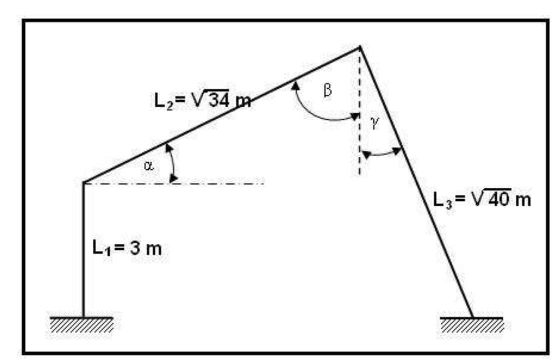


Figura 9.5.2 Parámetros Geométricos.

- **SOLUCIÓN**

En base a los ángulos presentados en la figura 9.5.2 se tiene:

$$sen\alpha = \frac{3}{\sqrt{34}} \qquad \cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{34}} \qquad tg\alpha = \frac{3}{5}$$

$$sen\beta = \frac{5}{\sqrt{34}} \qquad \cos\beta = \frac{3}{\sqrt{34}} \qquad tg\beta = \frac{5}{3}$$

$$sen\gamma = \frac{2}{\sqrt{40}} \qquad \cos\gamma = \frac{6}{\sqrt{40}} \qquad tg\gamma = \frac{1}{3}$$

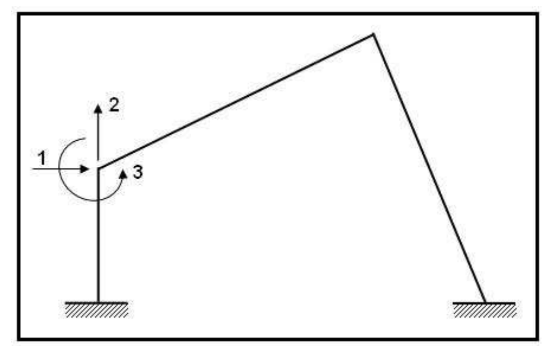


Figura 9.5.3 Sistema $Q - q$

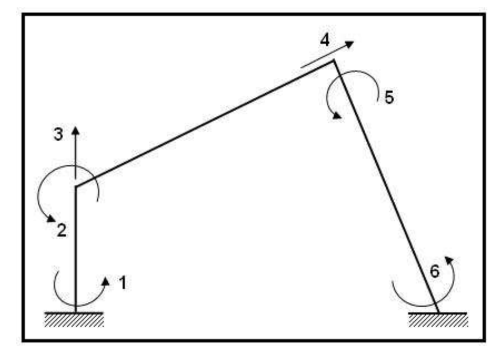


Figura 9.5.4 Sistema $P - p$

- Primera columna de A

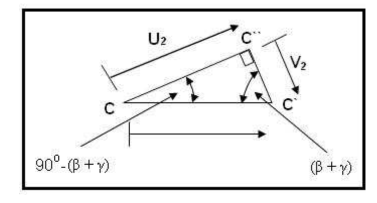
$$q_1 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 1$$

Figura 9.5.5 Deformada elemental q_1

Para analizar las deformaciones del elemento BC se examina el triángulo BB'B''

$$u_1 = \cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{34}} \qquad v_1 = -sen\alpha = -\frac{3}{\sqrt{34}}$$

En la figura 9.5.5 se observa que $v_2 = v_1 = -\frac{3}{\sqrt{34}}$



En el triángulo rectángulo CC'C'' se tiene:

$$tg(\beta+\gamma)=\frac{u_2}{v_2} \qquad u_2=v_2\ tg(\beta+\gamma)$$

El signo de u_2 es positivo (tracción en el nudo final)

$$tg(\beta+\gamma)=\frac{tg\beta+tg\gamma}{1-tg\beta\ tg\gamma}=\frac{\frac{5}{3}+\frac{1}{3}}{1-\frac{5}{3}\frac{1}{3}}=\frac{2}{\frac{4}{9}}=\frac{9}{2}$$

Luego: $u_2=\frac{3}{\sqrt{34}}\frac{9}{2}=\frac{27}{2\sqrt{34}}$ (positivo)

$$CC'=\sqrt{(CC'')^2+(C'C'')^2}=\sqrt{\frac{27^2}{2^2*34}+\frac{3^2}{34}}=\sqrt{\frac{729}{4*34}+\frac{9}{34}}=\sqrt{\frac{765}{136}}=2.37$$

Nótese que CC' es el valor de v_1 para el elemento CD, por consiguiente:

$$p_1=\frac{1}{3} \qquad p_4=u_2-u_1=\frac{27}{2\sqrt{34}}-\frac{5}{\sqrt{34}}=\frac{17}{2\sqrt{34}} \qquad p_5=\frac{v_1}{L_3}=\frac{CC'}{L_3}=\frac{2.37}{\sqrt{40}}$$

$$p_2=\frac{1}{3} \qquad p_6=\frac{2.37}{\sqrt{40}}$$

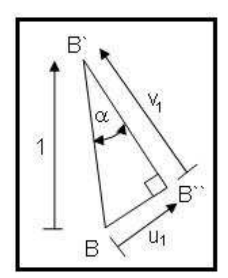
$$p_3=0$$

- Segunda columna de $\boldsymbol{A}$

$$q_2=1 \quad y \quad q_i=0 \quad i\neq 2$$

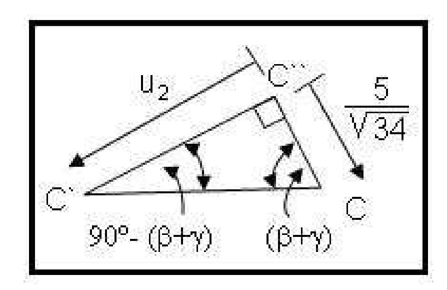
Figura 9.5.6 Deformada elemental q_2

Para encontrar las deformaciones del elemento BC se analiza el triángulo BB'B''



$$u_1 = sen\alpha = \frac{3}{\sqrt{34}} \qquad v_1 = \cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{34}}$$

$$B''B' = CC'' = v_1 = \frac{5}{\sqrt{34}}$$



$$tg(\beta+\gamma) = \frac{u_2}{\frac{5}{\sqrt{34}}}$$ (u_2 es negativo por su deformada)

$$u_2 = -\frac{5}{\sqrt{34}} tg(\beta+\gamma) = -\frac{5}{\sqrt{34}}\frac{9}{2} = -\frac{45}{2\sqrt{34}}$$

$$CC' = \sqrt{(C'C'')^2 + (C''C)^2} = \sqrt{\left(\frac{45}{2\sqrt{34}}\right)^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{34}}\right)^2} = \sqrt{\frac{2125}{136}} = 3.96$$

De igual manera CC'= v_1 para el elemento CD y en éste caso es negativo. Por lo tanto:

$$p_1 = 0 \qquad p_4 = u_2 - u_1 = -\frac{45}{2\sqrt{34}} - \frac{3}{\sqrt{34}} = -\frac{51}{2\sqrt{34}} \qquad p_5 = -\frac{v_1}{L_3} = -\frac{CC'}{L_3} = -\frac{3.96}{\sqrt{40}}$$

$$p_2 = 0 \qquad p_6 = -\frac{3.96}{\sqrt{40}}$$

$$p_3 = 1$$

- Tercera columna de $\boldsymbol{A}$

$$q_3 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 3$$

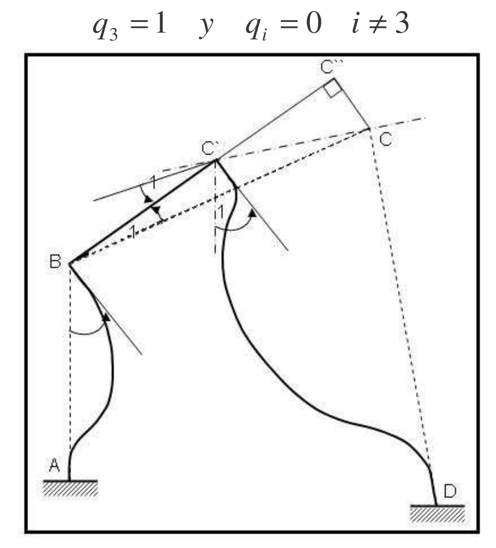
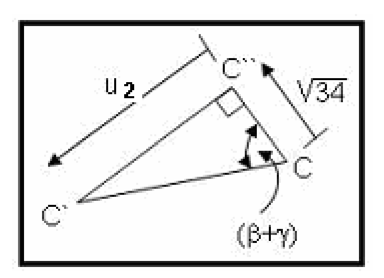


Figura 9.5.7 Deformada elemental q_3

CC''= $L_2 = \sqrt{34}$ (Arco= radio por ángulo). Por otra parte el ángulo $C'CC'' = (\beta + \gamma)$



$$tg(\beta+\gamma) = \frac{u_2}{\sqrt{34}} \qquad \Rightarrow \qquad u_2 = -\sqrt{34}\,\frac{9}{2}$$

u_2 es negativo ya que está a compresión en el nudo final.

$$CC' = \sqrt{(C'C'')^2 + (C''C)^2} = \sqrt{\left(\frac{9\sqrt{34}}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{34}\right)^2} = 26.88$$

$$p_1 = 0 \qquad p_4 = u_2 - u_1 = -\frac{9}{2}\sqrt{34} \qquad p_5 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L} = 1 - \frac{0 + 26.88}{\sqrt{40}} = -3.25$$

$$p_2 = 1 \qquad p_6 = -\frac{v_1}{L_3} = -\frac{26.88}{\sqrt{40}} = -4.25$$

$$p_3 = 0$$

$$
A = \begin{bmatrix}
\frac{1}{3} & 0 & 0 \\
\frac{1}{3} & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 \\
\hline
\frac{17}{2\sqrt{34}} & -\frac{51}{2\sqrt{34}} & -\frac{9\sqrt{34}}{2} \\
\hline
\frac{2.37}{\sqrt{40}} & -\frac{3.96}{\sqrt{40}} & -3.25 \\
\frac{2.37}{\sqrt{40}} & -\frac{3.96}{\sqrt{40}} & -4.25
\end{bmatrix}
$$

9.2.2 Armadura Plana

Ahora el sistema de coordenadas de un elemento es el presentado en la figura 9.2.3. En consecuencia cada elemento de una armadura plana tiene una sola deformación que es la axial, la ubicación de ésta coordenada es arbitraria en el sentido de que puede colocarse a la izquierda o a la derecha de un elemento horizontal. Por ejemplo para la celosía de la figura 9.6.1 se puede considera como sistema $P - p$ el presentado en la figura 9.6.2 o el indicado en la figura 9.6.3.

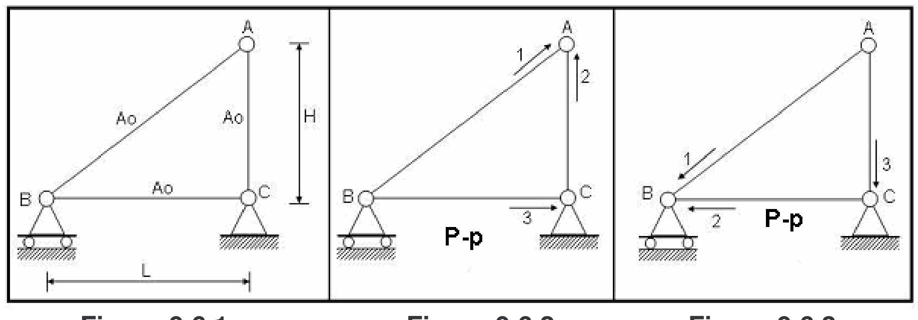


Figura 9.6.1 Figura 9.6.2 Figura 9.6.3

Se debe tener presente que la dirección de la coordenada p guarda relación con la determinación de las coordenadas u_1 y u_2. Por ejemplo para el elemento BA, cuando se trabaja con el sistema $P - p$ mostrado en la figura 9.6.2 se tiene que u_1 es el corrimiento axial en el nudo B y que u_2 es el corrimiento axial en el nudo A. En cambio cuando se trabaja con las coordenadas de la figura 9.6.3 es lo contrario.

Para calcular las deformaciones p se debe tener presente que ésta es positiva si el elemento se alarga axialmente, caso contrario es negativa.

Finalmente para la obtención del sistema $Q - q$ se recuerda que cada nudo de una armadura plana tiene dos grados de libertad. Por consiguiente la estructura de la figura 9.6.1 tiene 3 grados de libertad, dos en el nudo A y uno en el nudo B por el tipo de vínculo.

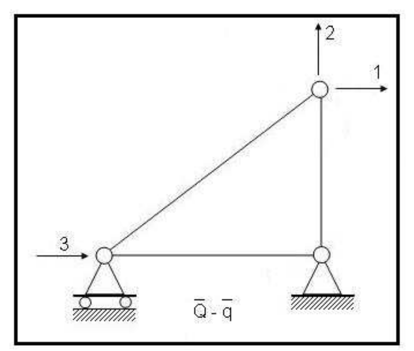


Figura 9.6.4 Coordenadas generalizadas

- **EJEMPLO N.- 4**

Para la armadura plana de la figura 9.6.1 utilizando el sistema de coordenadas $\boldsymbol{Q-q}$ y $\boldsymbol{P-p}$ mostrados en las figuras 9.6.4 y 9.6.2 respectivamente. Se pide obtener la matriz de compatibilidad de deformaciones $\boldsymbol{A}$, tal que: $\boldsymbol{p = A\ q}$. Además se conoce que H=3L/4.

- **SOLUCIÓN**

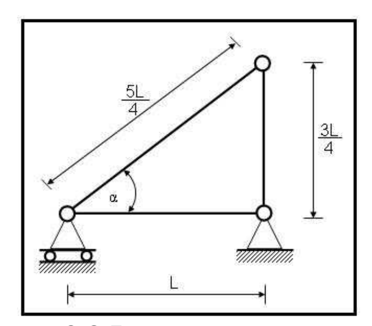


Figura 9.6.5 Parámetros Geométricos

$$sen\alpha = \frac{3}{5} \qquad \cos\alpha = \frac{4}{5} \qquad tg\alpha = \frac{3}{4}$$

- Primera columna de $\boldsymbol{A}$

$$q_1 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 1$$

Figura 9.6.6 Deformada elemental q_1

En el triángulo AA'A'' se tiene $u_2 = \cos\alpha = \frac{4}{5}$. Luego las deformaciones $\boldsymbol{p}$ son:

$$p_1 = \frac{4}{5} \qquad\qquad p_2 = 0 \qquad\qquad p_3 = 0$$

- Segunda columna de $\boldsymbol{A}$

$$q_2 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 2$$

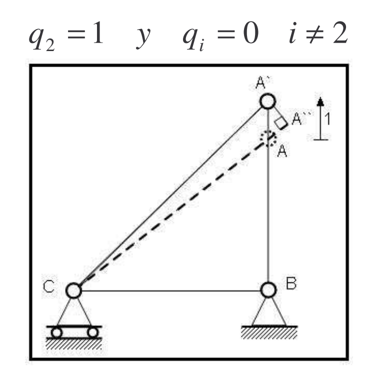
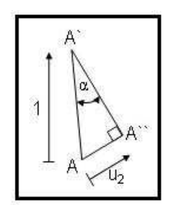


Figura 9.6.7 Deformada elemental q_2



$$u_2 = sen\alpha = \frac{3}{5}$$

$$p_1 = \frac{3}{5} \qquad\qquad p_2 = 1 \qquad\qquad p_3 = 0$$

- Tercera columna de $\boldsymbol{A}$

$$q_3 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 3$$

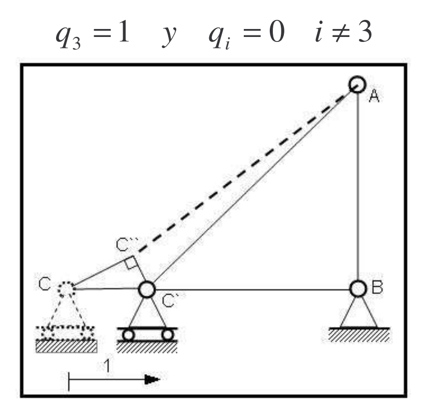
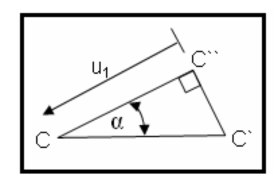


Figura 9.6.8 Deformada elemental q_3



$$u_1 = \cos\alpha = \frac{4}{5}$$

$$p_1 = -\frac{4}{5} \qquad p_2 = 0 \qquad p_3 = -1$$

Por lo tanto:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- **EJEMPLO N.- 5**

Calcular la matriz $\boldsymbol{A}$ de la siguiente armadura plana.

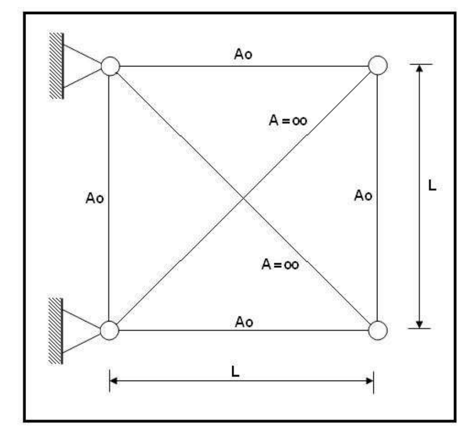


Figura 9.7.1 Armadura plana de ejemplo 5.

- **SOLUCIÓN**

Al igual que en los pórticos planos cuando se tiene elementos axialmente rígidos, el número de grados de libertad de la estructura disminuye una coordenada por cada elemento $A = \infty$. Por lo tanto en éste ejercicio se tienen 2 grados de libertad. En la figura 9.7.2 se presenta una deformada general de la armadura en la cual se aprecia que los elementos trabajan únicamente axialmente.

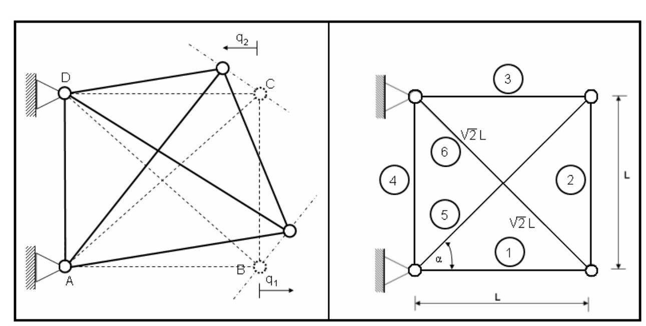


Figura 9.7.2 **Figura 9.7.3**

En la figura 9.7.3 se presenta la geometría de la armadura plana, de ésta grafica se obtiene:

$$sen\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad tg\alpha = 1$$

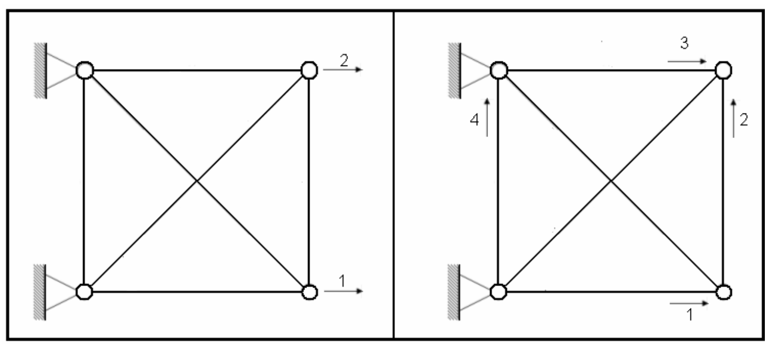


Figura 9.7.4 Sistema $Q-q$ **Figura 9.7.5** Sistema $P-p$

- Primera columna de A

$$q_1 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 1$$

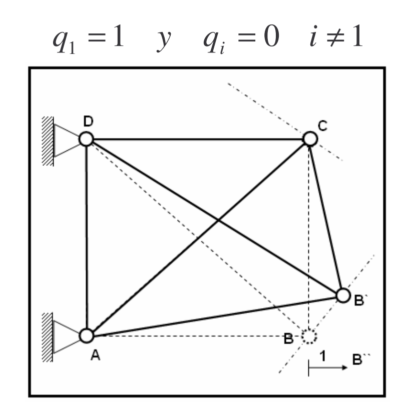
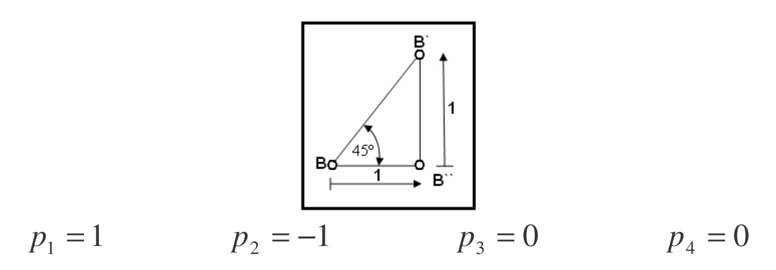


Figura 9.7.6 Deformada elemental q_1



$$p_1 = 1 \qquad p_2 = -1 \qquad p_3 = 0 \qquad p_4 = 0$$

- Segunda columna de A

$$q_2 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 2$$

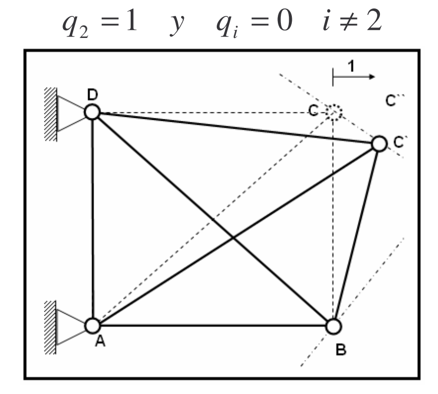
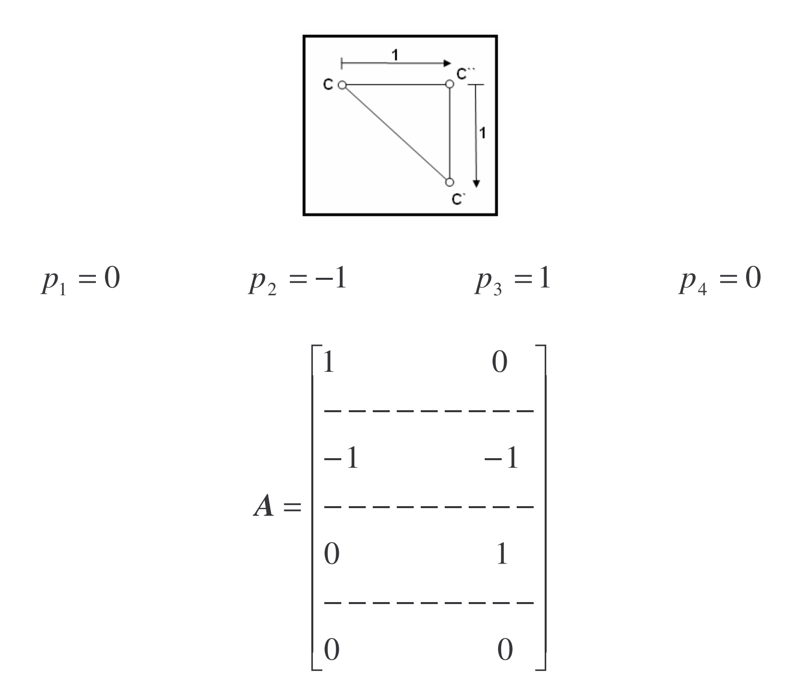


Figura 9.7.7 Deformada elemental q_2



$p_1 = 0 \qquad p_2 = -1 \qquad p_3 = 1 \qquad p_4 = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \hline -1 & -1 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **EJEMPLO N.- 6**

Para la armadura plana de la figura 9.8.1 que tiene dos elementos axialmente rígidos se pide:

a. Dibujar una deformada lo más general posible.
b. Seleccionar un sistema de coordenadas $\boldsymbol{Q-q}$ y $\boldsymbol{P-p}$ apropiado.
c. Determinar la matriz $\boldsymbol{A}$

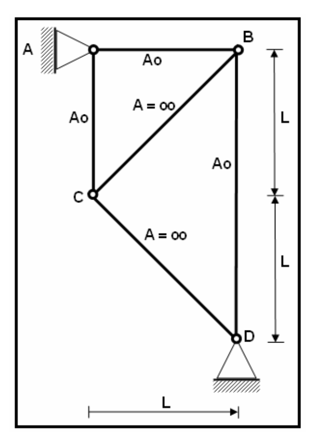


Figura 9.8.1 Armadura de ejemplo 6

- **SOLUCIÓN**

Cada nudo de la armadura plana tiene dos grados de libertad, luego se tendrían 4 grados de libertad pero como existen dos elementos que son axialmente rígidos se eliminan dos grados de libertad, uno por cada elemento $A = \infty$. En consecuencia el sistema tiene 2 grados de libertad. En la figura 9.8.2 se indica una deformada lo más general en la cual se ha colocado P.I. para indicar la posición inicial del nudo, ésta recta es perpendicular al elemento axialmente rígido y P.F. la recta en la cual se halla la posición final del nudo. En la figura 9.8.3 se indica el sistema $\boldsymbol{Q-q}$ con el cual se resuelve el ejercicio y en la figura 9.8.4 el sistema $\boldsymbol{P-p}$.

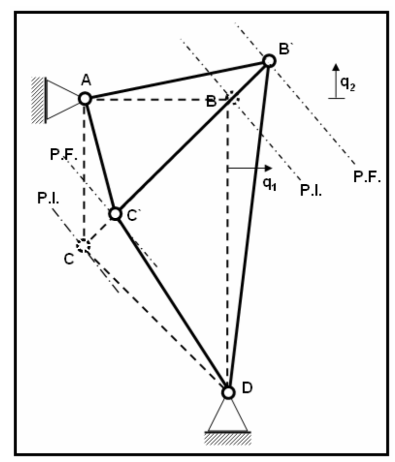


Figura 9.8.2 Deformada general.

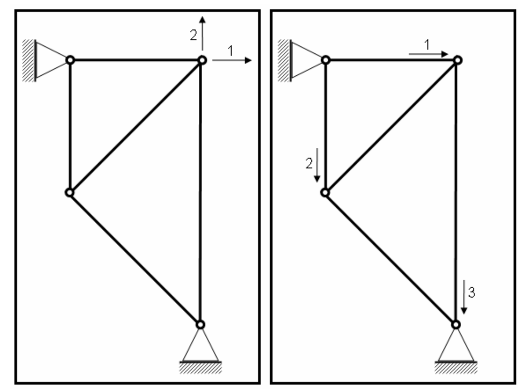


Figura 9.8.3 $Q-q$ **Figura 9.8.4** $P-p$

- Primera columna de A

$$q_1 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 1$$

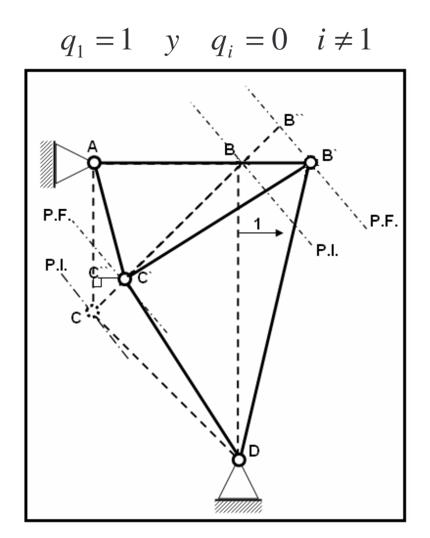
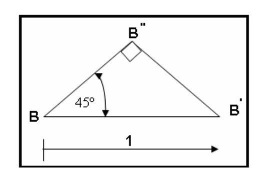
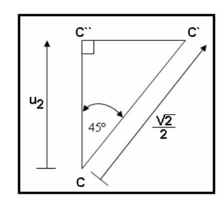


Figura 9.8.5 Deformada elemental q_1



$$BB'' = \cos 45 = \sqrt{2}/2$$

En la figura 9.8.5 se observa que BB'' = CC' debido a que el elemento BC es axialmente rígido. Luego en el triángulo CC'C'' se tiene:



$$\cos 45 = \frac{u_2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \qquad u_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$$

Pero u_2 es negativo para el elemento BC. Luego las deformaciones valen:

$$p_1 = 1 \qquad p_2 = -\frac{1}{2} \qquad p_3 = 0$$

- Segunda columna de $\boldsymbol{A}$

$$q_2 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 2$$

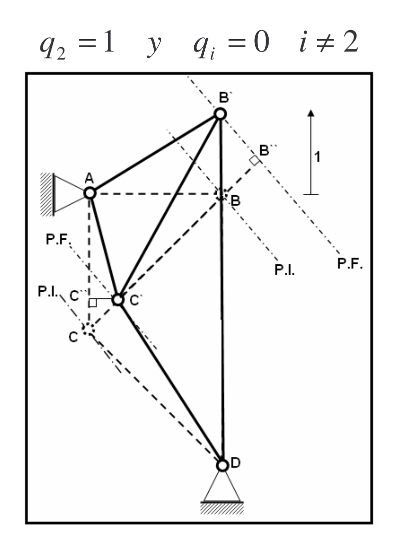
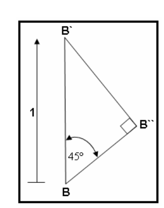
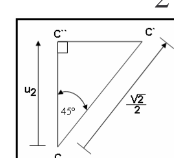


Figura 9.8.6 Deformada elemental q_2



$$BB'' = \cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$BB'' = CC' = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$u_2 = \cos 45 \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$$

Pero u_2 es negativo para el elemento AC. Con ésta consideración las deformaciones son:

$$p_1 = 0 \qquad p_2 = -\frac{1}{2} \qquad p_3 = 1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ --------- & \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ --------- & \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

9.2.3 Coordenadas $P-p$ arbitrarias

En los ejercicios anteriores se utilizó como sistema $P-p$ el presentado en las figuras 9.2.1 a 9.2.3. Para éstas coordenadas de los elementos en el capítulo 7 se encontró la respectiva matriz de rigidez, algo similar se hizo con el sistema de coordenadas de la figura 9.9 con el cual se van a resolver algunos ejercicios, para lo cual se recuerdas las deformaciones de miembro.

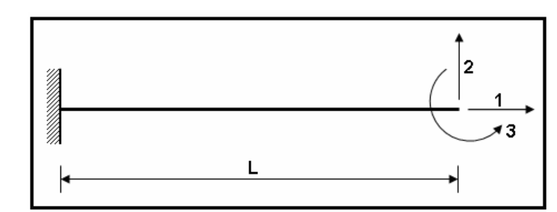


Figura 9.9 Otro sistema de coordenadas de elemento.

$$p_1 = u_2 - u_1$$
$$p_2 = v_2 - v_1 - \theta_1 \ L$$
$$p_3 = \theta_2 - \theta_1$$

En consecuencia se podía haber calculado la matriz A para los ejercicios resueltos en éste capítulo empleando estas coordenadas. Si éste es el caso para la estructura de la figura 9.3.1, el sistema $P-p$ sería el siguiente.

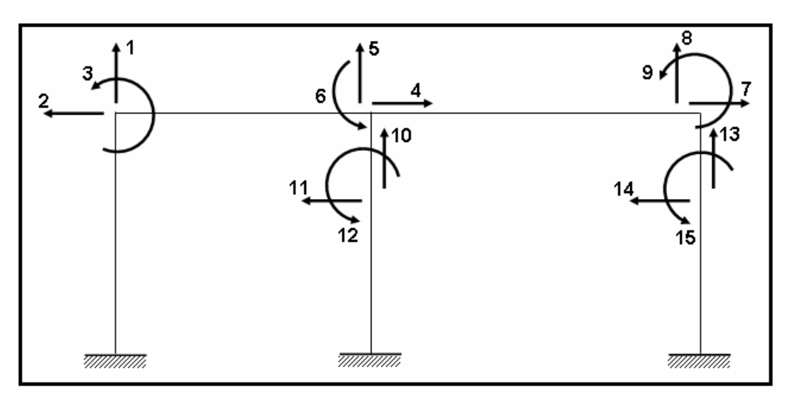


Figura 9.10 Otro sistema $P-p$ para ejemplo 1.

Es evidente que ahora se obtendrá una matriz $\boldsymbol{A}$ diferente, lo cual se debe a la diferencia como se obtienen las deformaciones $\boldsymbol{p}$.

Por último se debe indicar que se puede calcular la matriz $\boldsymbol{A}$ empleando cualquier sistema de coordenadas $\boldsymbol{P}-\boldsymbol{p}$ lo que se ilustra con el desarrollo del siguiente problema.

- **EJEMPLO N.- 7**

Para el pórtico de la figura 9.11.1 se pide calcular la matriz $\boldsymbol{A}$ empleando como sistemas $\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{q}$ y $\boldsymbol{P}-\boldsymbol{p}$ los presentados en las figuras 9.11.2 y 9.11.3, respectivamente. Si la longitud de todos los elementos es la misma. Para los elementos inclinados se considera como sistema de coordinas el indicado en la figura 9.9 y para el elemento horizontal se tiene dos giros a flexión considerado positivo si el nudo inicial rota en forma horario y el nudo final rota antihorario y dos cortantes considerados positivos si van hacia arriba.

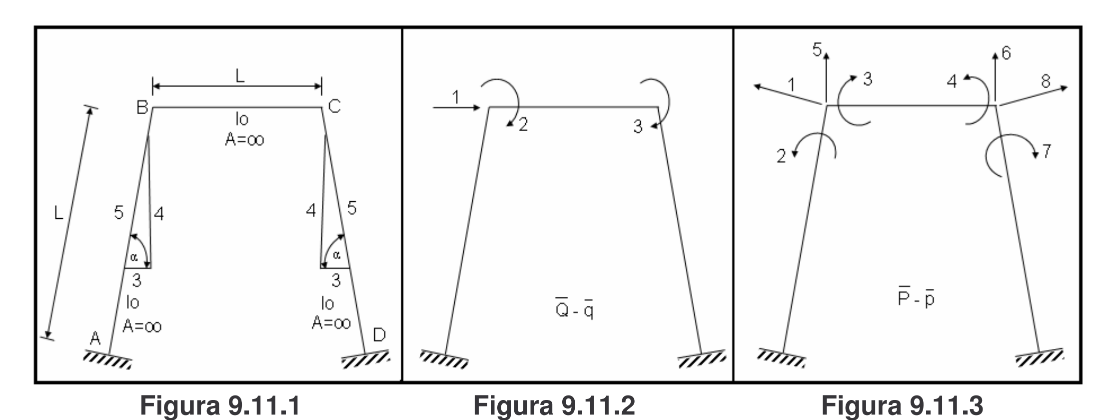


Figura 9.11.1 Figura 9.11.2 Figura 9.11.3

Nótese en éste ejercicio que las rotaciones se consideran horario positivo.

- **SOLUCIÓN**

- Primera columna de $\boldsymbol{A}$

$$q_1 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 1$$

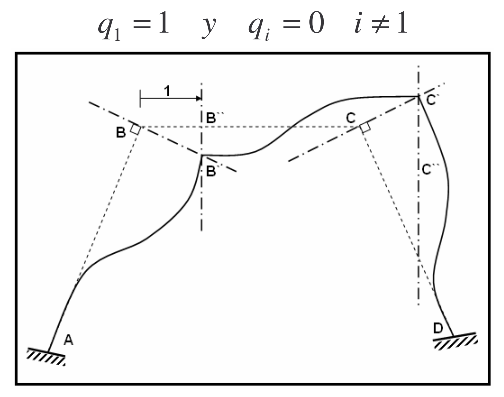
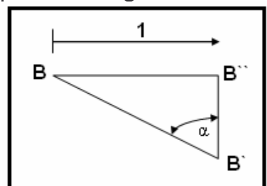


Figura 9.11.4 Deformada elemental q_1

En la figura 9.11.4 se observa que el triángulo BB'B'' es igual al triángulo CC'C''.



$$BB' = CC' = \cos c\alpha = \frac{5}{4}$$

$$B'B'' = C'C'' = \cot g\alpha = \frac{3}{4}$$

Por lo tanto:

$$p_1 = -BB' = -\frac{5}{4} \qquad p_3 = 0 \qquad p_7 = 0$$

$$p_2 = 0 \qquad p_4 = 0 \qquad p_8 = CC' = \frac{5}{4}$$

$$p_5 = B''B' = -\frac{3}{4}$$

$$p_6 = CC' = \frac{5}{4}$$

- Segunda columna de $\boldsymbol{A}$

$$q_2 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 2$$

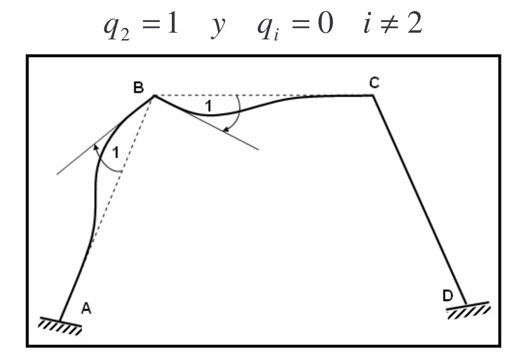


Figura 9.11.5 Deformada elemental q_2

En el ejemplo la rotación se considera horario positivo, de ahí la forma de las deformadas elementales indicadas en las figuras 9.11.5 y 9.11.6.

$$p_1 = -1 \qquad p_3 = 1 \qquad p_7 = 0$$

$$p_2 = 0 \qquad p_4 = 0 \qquad p_8 = 0$$

$$p_5 = 0$$

$$p_6 = 0$$

- Tercera columna de $\boldsymbol{A}$

$$q_3 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 3$$

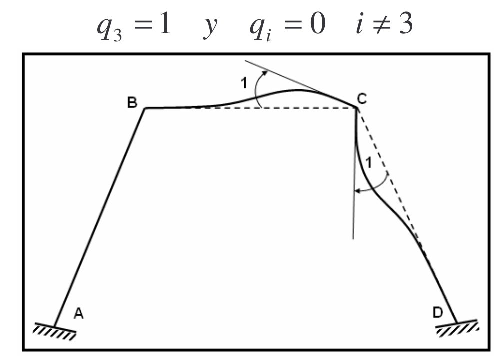


Figura 9.11.6 Deformada elemental q_3

$p_1 = 0 \qquad p_3 = 0 \qquad p_7 = 1$

$p_2 = 0 \qquad p_4 = -1 \qquad p_8 = 0$

$p_5 = 0$

$p_6 = 0$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{5}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -\frac{3}{4} & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \frac{5}{4} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

9.3 RELACIÓN ENTRE CARGAS GENERALIZADAS Y FUERZAS INTERNAS

9.3.1 Introducción

Las cargas generalizadas $\boldsymbol{Q}$ de una estructura pueden transformarse en cargas internas $\boldsymbol{P}$ por medio de la matriz $\boldsymbol{B}$. En efecto se tiene por definición que:

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{Q} \qquad (9.3)$$

donde $\boldsymbol{B}$ es una matriz de equilibrio de orden mxn, siendo m el número de filas que será igual al número de coordenadas $\boldsymbol{P}$ y n el número de columnas que es igual al número de grados de libertad de la estructura. Un término cualquiera B_i es el valor de la carga interna del elemento P_i correspondiente al estado de cargas generalizado $Q_j = 1$ y las demás nulas.

Si $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{Q}$ se puede demostrar fácilmente, aplicando el principio de los trabajos virtuales que: $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{B}^t\ \boldsymbol{p}$ con lo que se obtiene otra ecuación de compatibilidad, ahora se obtendrá $\boldsymbol{B}^t$ por geometría de deformación siendo más difícil su cálculo.

Finalmente se destaca que mediante la matriz $\boldsymbol{B}$ se obtiene la matriz de flexibilidad de la estructura $\boldsymbol{F}$.

9.3.2 Definición

Cuando la matriz $\boldsymbol{B}$ se puede determinar usando solo la estática el sistema se llama: "Estáticamente Determinado".

9.3.3 Relación entre $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{A}$

Se puede establecer una relación entre las dos matrices de la siguiente manera. Se sabe que:

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{k} \ \boldsymbol{p} \qquad (9.4)$$

pero $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{A} \ \boldsymbol{q}$. Al reemplazar en (9.4) se tiene:

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{k} \ \boldsymbol{A} \, \boldsymbol{q}$$

a su vez $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{F} \ \boldsymbol{Q}$, sustituyendo se tiene:

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{k} \ \boldsymbol{A} \ \boldsymbol{F}) \, \boldsymbol{Q}$$

comparando ésta última expresión con la ecuación (9.3) se tiene:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{k} \ \boldsymbol{A} \ \boldsymbol{F} \qquad (9.5)$$

En la ecuación (9.5) la matriz $\boldsymbol{k}$ es diagonal y está compuesta por la matriz de rigidez de cada uno de los elementos de la estructura. Un ejemplo de aplicación de ésta relación se presenta en el ejemplo 10 del apartado 9.4.1.

9.4 CÁLCULO DE LA MATRIZ B

9.4.1 Coordenadas $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}$ usuales

Para diferenciar del sistema de coordenadas $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}$ arbitrario, se denominan coordenadas usuales de los elementos a las presentadas en las figuras 9.2.1 a 9.2.3.

- **EJEMPLO N.- 8**

Obtener la matriz $\boldsymbol{B}$ del pórtico plano indicado en la figura 9.12.1, cuyos elementos se consideran totalmente flexibles.

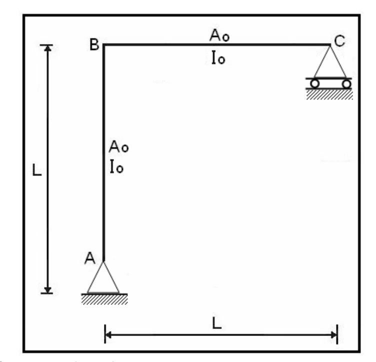


Figura 9.12.1 Estructura de ejemplo 8

- **SOLUCIÓN**

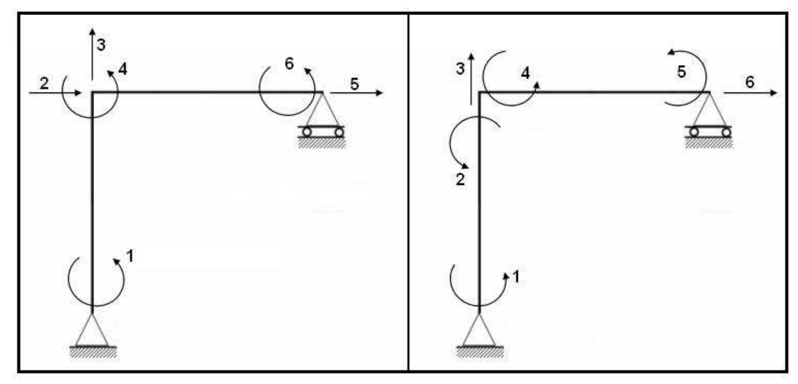


Figura 9.12.2 Sistema $Q - q$ **Figura 9.12.3** Sistema $P - p$

- Primera columna de la matriz $\boldsymbol{B}$

$$Q_1 = 1 \quad y \quad Q_i = 0 \quad i \neq 1$$

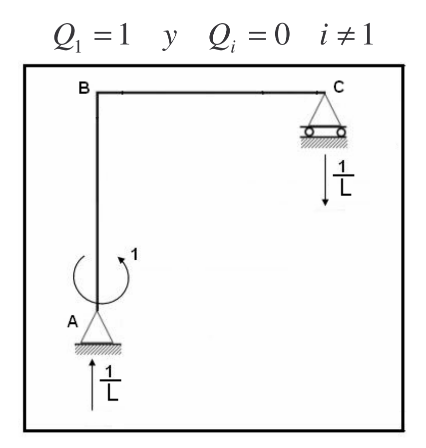
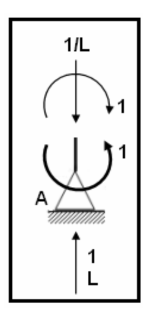


Figura 9.12.4 Carga unitaria Q_1

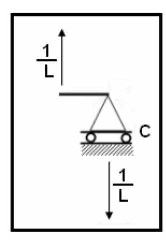
Al aplicar un momento unitario en el nudo A se producen dos reacciones que valen $\frac{1}{L}$.

- Equilibrio del nudo A



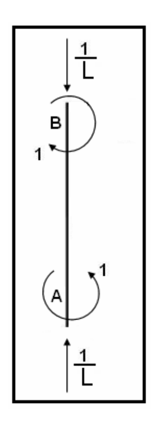
Del equilibrio de la junta A se obtiene que en el elemento AB actúa una fuerza axial de compresión que vale $\frac{1}{L}$ y un momento unitario. Nótese que estas acciones luego pasan al elemento cambiadas de signo, como se verá más adelante.

- Equilibrio del nudo C



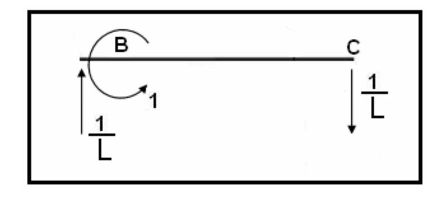
Para equilibrar el nudo C en el elemento BC existe una fuerza vertical de magnitud $\frac{1}{L}$.

- Equilibrio del elemento AB



Para equilibrar el elemento AB se requiere que en el extremo superior actúe un momento horario unitario y una fuerza de compresión igual a $\frac{1}{L}$.

- Equilibrio del elemento BC



Para tener equilibrio de las fuerzas verticales es necesario que en el extremo izquierdo del elemento BC actúe una fuerza vertical $\frac{1}{L}$ hacia arriba y para obtener el equilibrio de momentos se necesita que en ese punto exista un momento unitario. Se deja al lector que verifique el equilibrio de la junta B. Del equilibrio de miembros se determinan las cargas de cada elemento de acuerdo a lo indicado en la figura 9.12.3, éstas valen:

$$P_1 = 1 \qquad P_4 = 1$$

$$P_2 = -1 \qquad P_5 = 0$$

$$P_3 = -\frac{1}{L} \qquad P_6 = 0$$

Los elementos encontrados corresponden a los términos de la primera columna de $\boldsymbol{B}$.

Para hallar las demás columnas de la matriz $\boldsymbol{B}$ se procede en forma similar. En lo posterior se presenta el estado de carga elemental con las reacciones que actúan en la estructura y el equilibrio de elementos, dejando al lector la justificación de los pasos intermedios.

- Segunda columna de la matriz $\boldsymbol{B}$

$$Q_2 = 1 \quad y \quad Q_i = 0 \quad i \neq 2$$

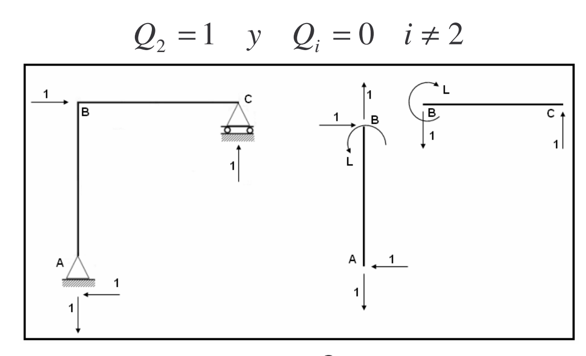


Figura 9.12.5 Carga unitaria Q_2 y equilibrio de elementos

$$P_1 = 0 \qquad P_4 = -L$$
$$P_2 = L \qquad P_5 = 0$$
$$P_3 = 1 \qquad P_6 = 0$$

- Tercera columna de la matriz $\boldsymbol{B}$

$$Q_3 = 1 \quad y \quad Q_i = 0 \quad i \neq 3$$

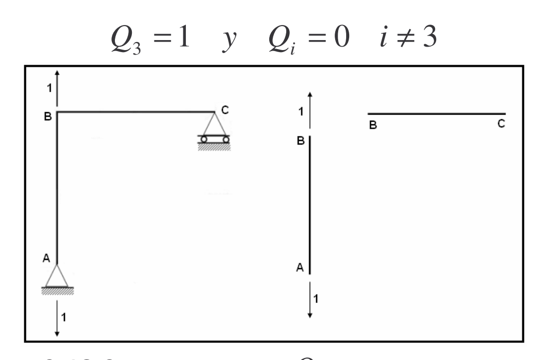


Figura 9.12.6 Carga unitaria Q_3 y equilibrio de elementos

$$P_1 = 0 \qquad P_4 = 0$$
$$P_2 = 0 \qquad P_5 = 0$$
$$P_3 = 1 \qquad P_6 = 0$$

- Cuarta columna de la matriz $\boldsymbol{B}$

$$Q_4 = 1 \quad y \quad Q_i = 0 \quad i \neq 4$$

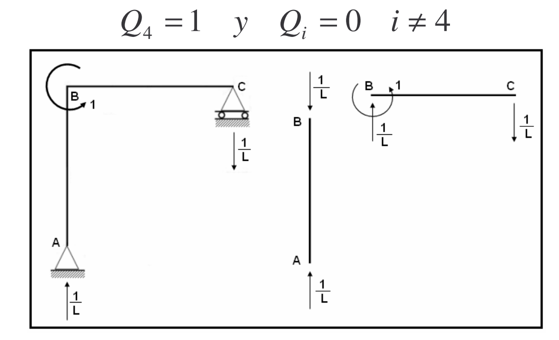


Figura 9.12.7 Carga unitaria Q_4 y equilibrio de elementos

$$P_1 = 0 \qquad P_4 = 1$$
$$P_2 = 0 \qquad P_5 = 0$$
$$P_3 = -\frac{1}{L} \qquad P_6 = 0$$

- Quinta columna de la matriz $\boldsymbol{B}$

$$Q_5 = 1 \quad y \quad Q_i = 0 \quad i \neq 5$$

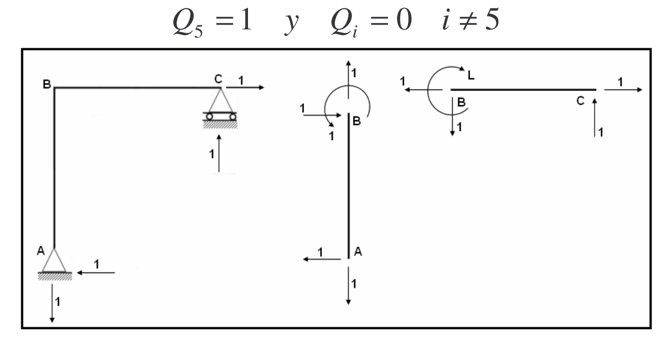


Figura 9.12.8 Carga unitaria Q_5 y equilibrio de elementos

$$P_1 = 0 \qquad P_4 = -L$$
$$P_2 = L \qquad P_5 = 0$$
$$P_3 = 1 \qquad P_6 = 1$$

- Sexta columna de la matriz $\boldsymbol{B}$

$$Q_5 = 1 \quad y \quad Q_i = 0 \quad i \neq 5$$

Figura 9.12.8 Carga unitaria Q_5 y equilibrio de elementos

$$P_1 = 0 \qquad P_4 = -L$$
$$P_2 = L \qquad P_5 = 0$$
$$P_3 = 1 \qquad P_6 = 1$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & L & 0 & 0 & L & 0 \\ -\frac{1}{L} & 1 & 1 & -\frac{1}{L} & 1 & -\frac{1}{L} \\ \hdashline 1 & -L & 0 & 1 & -L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- **EJEMPLO N.- 9**

Hallar la matriz $\boldsymbol{B}$ para la estructura de la figura 9.13.1 en la cual sus elementos son axialmente rígidos. Si los sistemas $\boldsymbol{Q-q}$ y $\boldsymbol{P-p}$ son los indicados en las figuras 9.13.2 y 9.13.3.

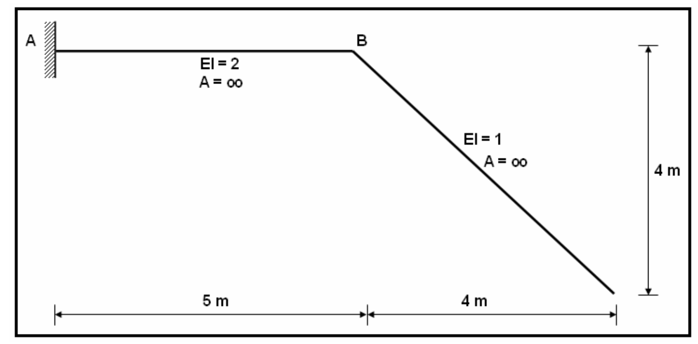


Figura 9.13.1 Estructura de ejemplo 9

- **SOLUCIÓN**

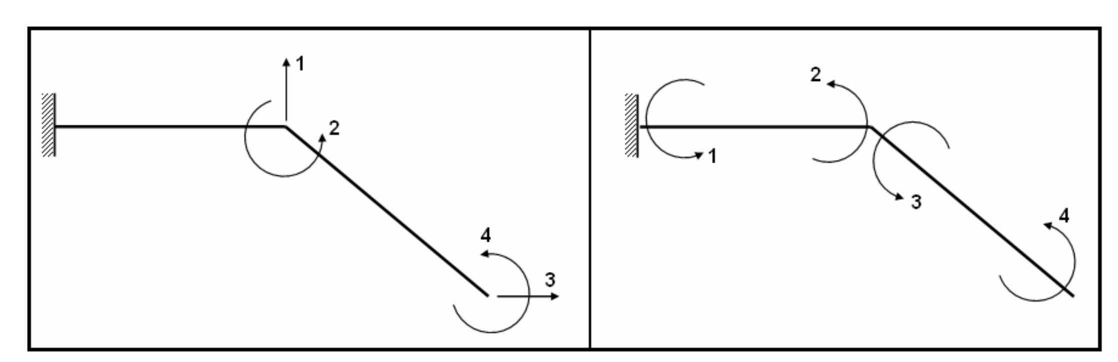


Figura 9.13.2 Sistema $\boldsymbol{Q-q}$ **Figura 9.13.3** Sistema $\boldsymbol{P-p}$

- Primera columna de la matriz $\boldsymbol{B}$

$$Q_1 = 1 \quad y \quad Q_i = 0 \quad i \neq 1$$

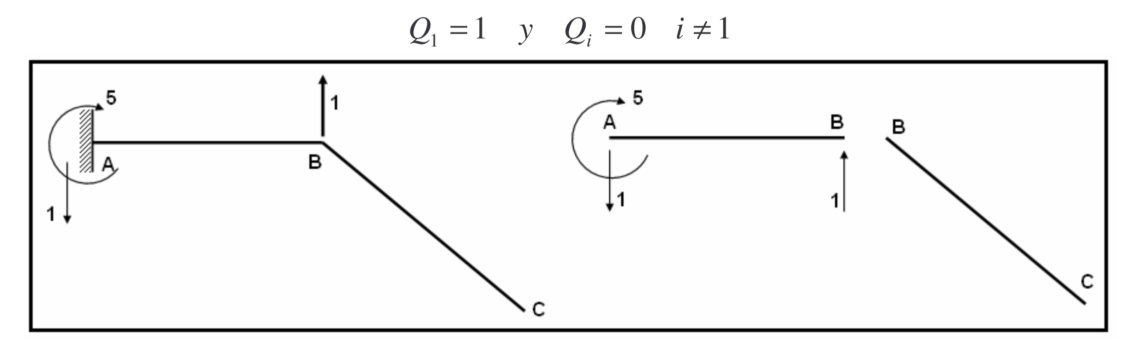


Figura 9.13.4 Carga unitaria Q_1 y equilibrio de elementos

$$p_1 = -5 \qquad p_3 = 0$$
$$p_2 = 0 \qquad p_4 = 0$$

- Segunda columna de la matriz $\boldsymbol{B}$



$$\boldsymbol{Q}_2 = 1 \quad \boldsymbol{y} \quad \boldsymbol{Q}_i = 0 \quad \boldsymbol{i} \neq 2$$

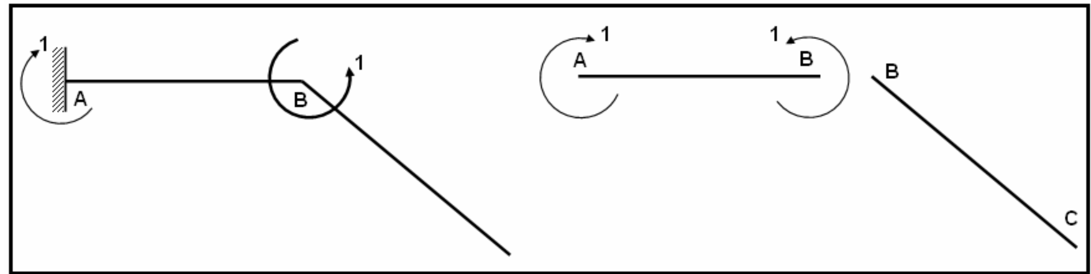


Figura 9.13.5 Carga unitaria Q_2 y equilibrio de elementos

$$p_1 = -1 \qquad p_3 = 0$$
$$p_2 = 1 \qquad p_4 = 0$$

- Tercera columna de la matriz $\boldsymbol{B}$

$$Q_3 = 1 \quad y \quad Q_i = 0 \quad i \neq 3$$

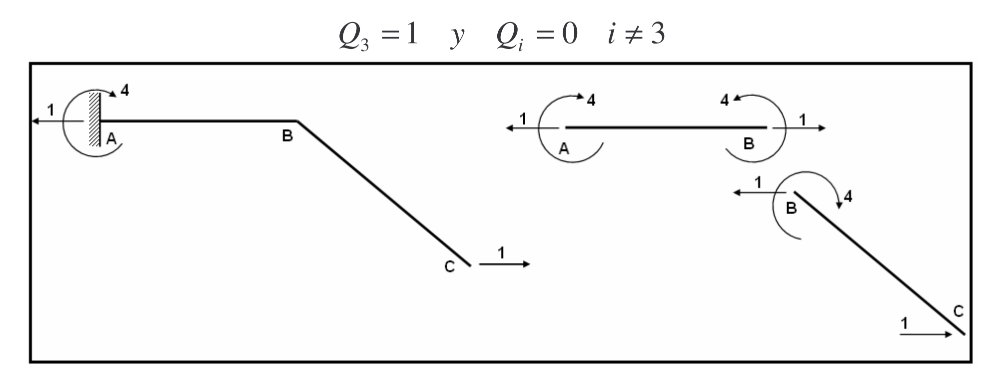


Figura 9.13.6 Carga unitaria Q_3 y equilibrio de elementos

$$p_1 = -4 \qquad p_3 = -4$$
$$p_2 = 4 \qquad p_4 = 0$$

- Cuarta columna de la matriz $\boldsymbol{B}$

$$Q_4 = 1 \quad y \quad Q_i = 0 \quad i \neq 4$$

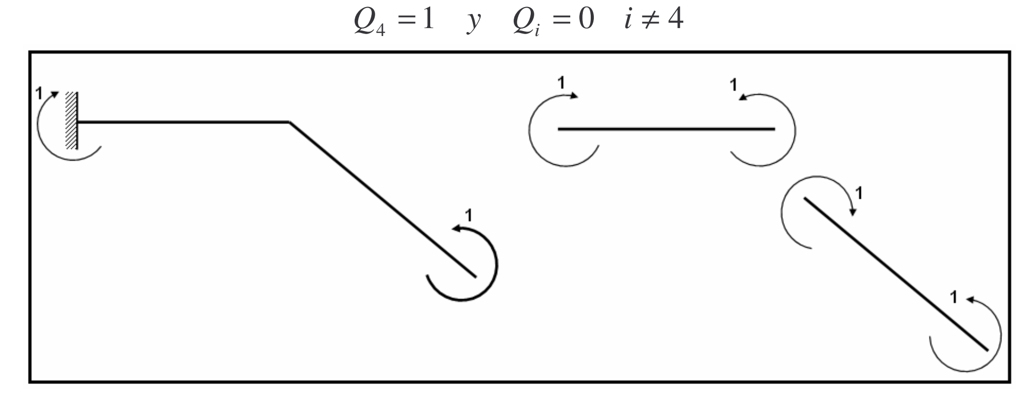


Figura 9.13.7 Carga unitaria Q_4 y equilibrio de elementos

$$p_1 = -1 \qquad p_3 = -1$$
$$p_2 = 1 \qquad p_4 = 1$$

$$B = \begin{bmatrix} -5 & -1 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **EJEMPLO N.- 10**

Para la estructura estáticamente indeterminada de la figura 9.14.1. Hallar la matriz $\boldsymbol{B}$ si se conocen las matrices de flexibilidad de la estructura $\boldsymbol{F}$ y de compatibilidad de deformaciones $\boldsymbol{A}$ para el sistema de coordenadas $\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{q}$ de la figura 9.14.2 y $\boldsymbol{P}-\boldsymbol{p}$ de la figura 9.14.3.

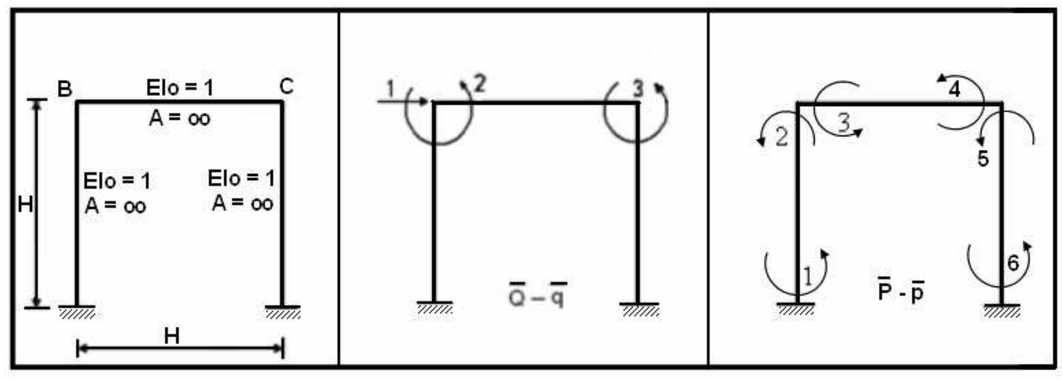
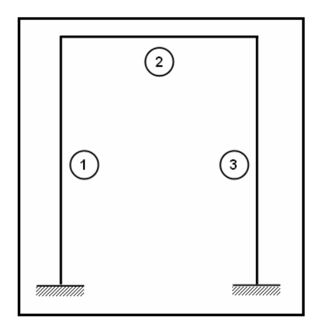


Figura 9.14.1 **Figura 9.14.2** **Figura 9.14.3**

$$F = \frac{H}{84}\begin{bmatrix} 5H^2 & -3H & -3H \\ -3H & 13 & -1 \\ -3H & -1 & 13 \end{bmatrix} \qquad A = \frac{1}{H}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & H & 0 \\ \hdashline 0 & H & 0 \\ 0 & 0 & H \\ \hdashline 1 & 0 & H \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **SOLUCIÓN**



$$k^{(1)} = k^{(2)} = k^{(3)} = \frac{2}{H}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$k = \begin{bmatrix} k^{(1)} & & \\ & k^{(2)} & \\ & & k^{(3)} \end{bmatrix} = \frac{2}{H}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = k \quad A \quad F$$

$$B = \frac{2}{H}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{H}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & H & 0 \\ \hline 0 & H & 0 \\ 0 & 0 & H \\ \hline 1 & 0 & H \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{H}{84}\begin{bmatrix} 5H^2 & -3H & -3H \\ -3H & 13 & -1 \\ -3H & -1 & 13 \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{1}{42H}\begin{bmatrix} 12H^2 & 4H & -10H \\ 9H^2 & 17H & -11H \\ \hline -9H^2 & 25H & 11H \\ -9H^2 & 11H & 25H \\ \hline 9H^2 & -11H & 17H \\ 12H^2 & -10H & 4H \end{bmatrix}$$

La matriz B también se la puede obtener transformado la estructura indeterminada en determinada para lo cual se necesita una estructura auxiliar.

9.4.2 Coordenadas $P - p$ arbitrarias

El ejemplo 11 ilustra el uso de éstas coordenadas.

- **EJEMPLO N.- 11**

Calcular la matriz B de la estructura de la figura 9.15.1, si el sistema de coordenadas $Q - q$ es el presentado en la figura 9.15.2 y el sistema de coordenadas de miembro el indicado en la figura 9.15.3 en que se utilizan varios sistemas de coordenadas para los elementos.

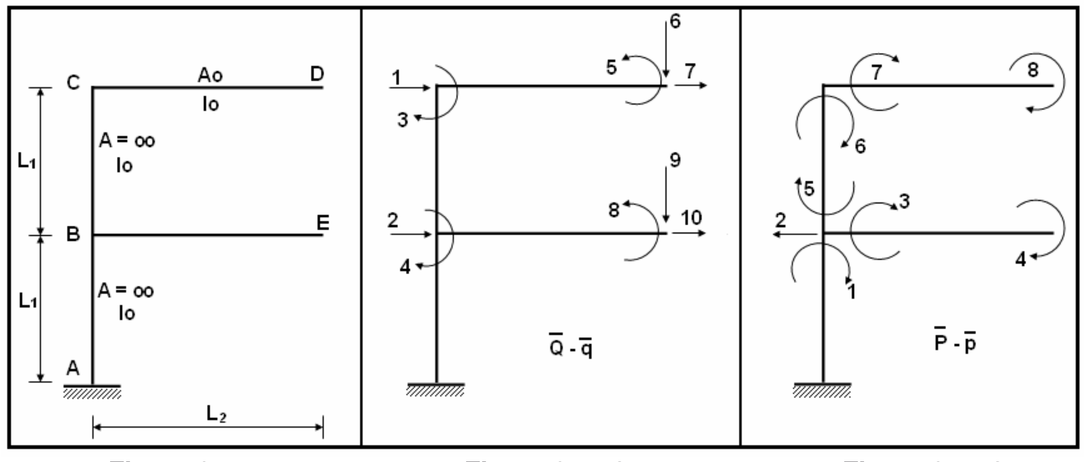


Figura 9.15.1 Figura 9.15.2 Figura 9.15.3

- **SOLUCIÓN**

▪ Primera columna de la matriz $\boldsymbol{B}$

$$Q_1 = 1 \quad y \quad Q_i = 0 \quad i \neq 1$$

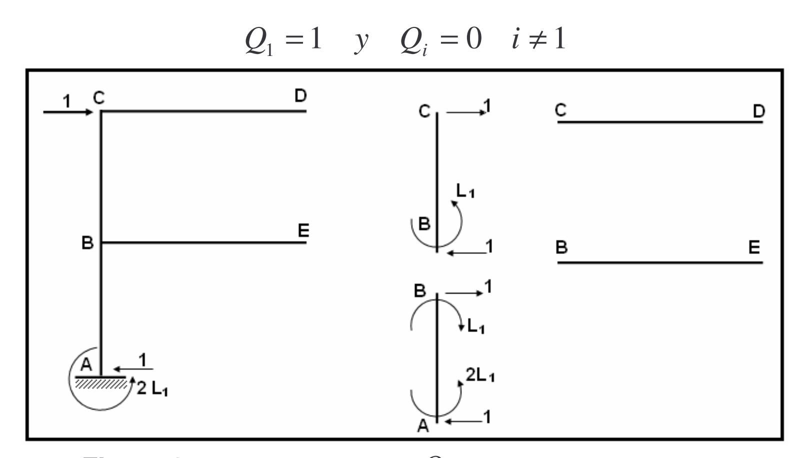


Figura 9.15.4 Carga unitaria Q_1 y equilibrio de elementos

$$P_1 = L_1 \qquad P_3 = 0 \qquad P_5 = -L_1 \qquad P_7 = 0$$
$$P_2 = -1 \qquad P_4 = 0 \qquad P_6 = 0 \qquad P_8 = 0$$

▪ Segunda columna de la matriz $\boldsymbol{B}$

$$Q_2 = 1 \quad y \quad Q_i = 0 \quad i \neq 2$$

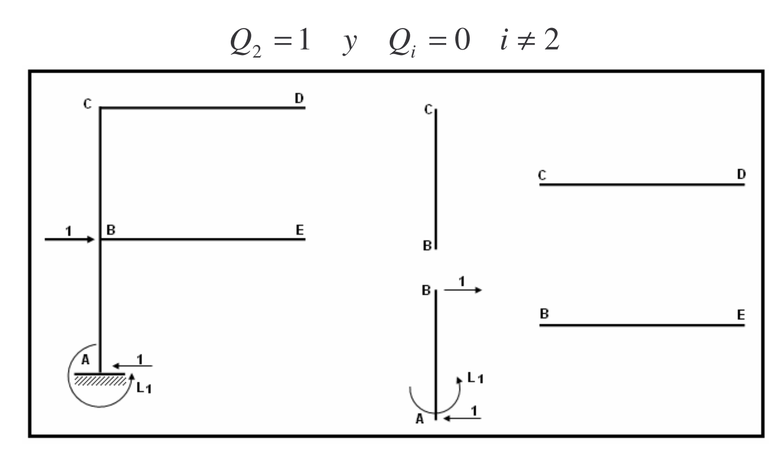


Figura 9.15.5 Carga unitaria Q_2 y equilibrio de elementos

$$P_1 = 0 \qquad P_3 = 0 \qquad P_5 = 0 \qquad P_7 = 0$$
$$P_2 = -1 \qquad P_4 = 0 \qquad P_6 = 0 \qquad P_8 = 0$$

- Tercera columna de la matriz $\boldsymbol{B}$

$$Q_3 = 1 \quad y \quad Q_i = 0 \quad i \neq 3$$

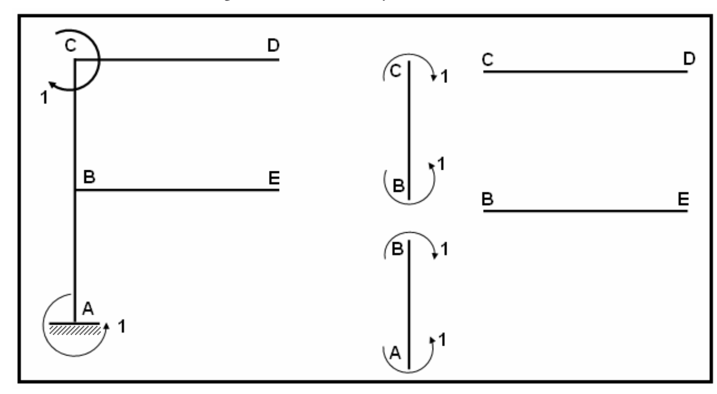


Figura 9.15.6 Carga unitaria Q_3 y equilibrio de elementos

$$P_1 = 1 \qquad P_3 = 0 \qquad P_5 = -1 \qquad P_7 = 0$$
$$P_2 = 0 \qquad P_4 = 0 \qquad P_6 = 1 \qquad P_8 = 0$$

- Cuarta columna de la matriz $\boldsymbol{B}$

$$Q_4 = 1 \quad y \quad Q_i = 0 \quad i \neq 4$$

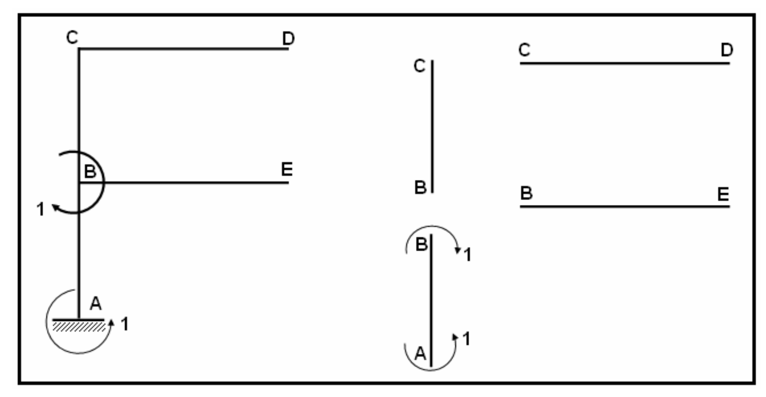


Figura 9.15.7 Carga unitaria Q_4 y equilibrio de elementos

$$P_1 = 1 \qquad P_3 = 0 \qquad P_5 = 0 \qquad P_7 = 0$$
$$P_2 = 0 \qquad P_4 = 0 \qquad P_6 = 0 \qquad P_8 = 0$$

- Quinta columna de la matriz $\boldsymbol{B}$

$$Q_5 = 1 \quad y \quad Q_i = 0 \quad i \neq 5$$

Figura 9.15.8 Carga unitaria Q_5 y equilibrio de elementos

$P_1 = -1 \qquad P_3 = 0 \qquad P_5 = 1 \qquad P_7 = 1$

$P_2 = 0 \qquad P_4 = 0 \qquad P_6 = -1 \qquad P_8 = -1$

- Sexta columna de la matriz $\boldsymbol{B}$

$$Q_6 = 1 \quad y \quad Q_i = 0 \quad i \neq 6$$

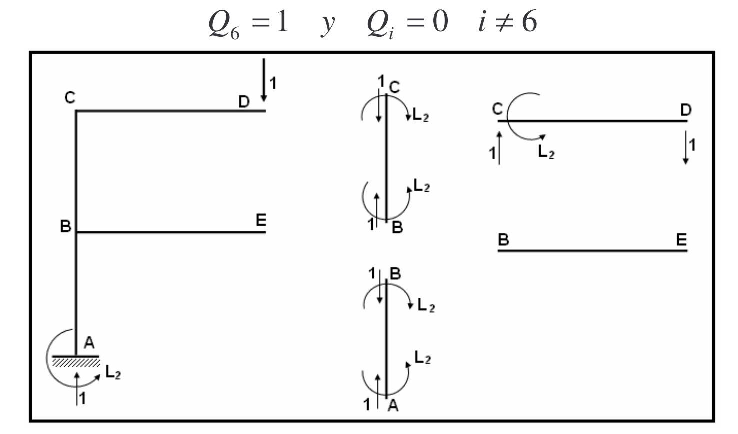


Figura 9.15.9 Carga unitaria Q_6 y equilibrio de elementos

$P_1 = L_2 \qquad P_3 = 0 \qquad P_5 = -L_2 \qquad P_7 = -L_2$

$P_2 = 0 \qquad P_4 = 0 \qquad P_6 = L_2 \qquad P_8 = 0$

- Séptima columna de la matriz $\boldsymbol{B}$

$$Q_7 = 1 \quad y \quad Q_i = 0 \quad i \neq 7$$

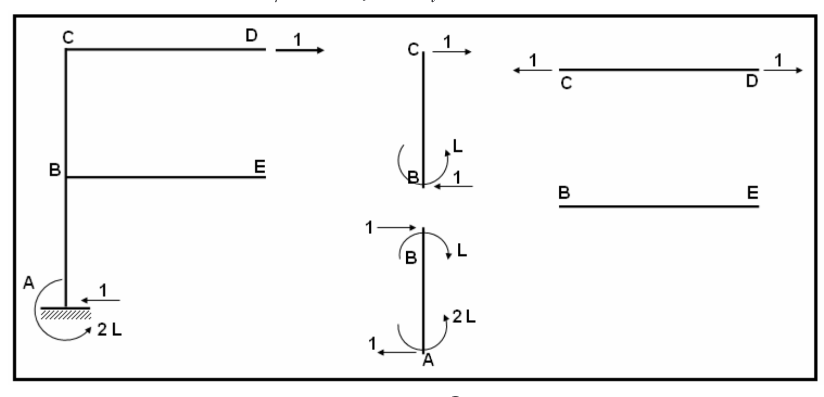


Figura 9.15.10 Carga unitaria Q_7 y equilibrio de elementos

$P_1 = L_1 \qquad P_3 = 0 \qquad P_5 = -L_1 \qquad P_7 = 0$

$P_2 = -1 \qquad P_4 = 0 \qquad P_6 = 0 \qquad P_8 = 0$

- Octava columna de la matriz $\boldsymbol{B}$

$$Q_8 = 1 \quad y \quad Q_i = 0 \quad i \neq 8$$

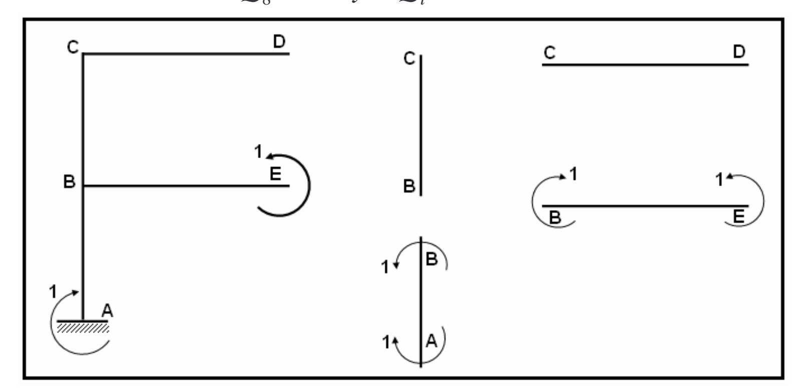


Figura 9.15.11 Carga unitaria Q_8 y equilibrio de elementos

$$P_1 = -1 \qquad P_3 = 1 \qquad P_5 = 0 \qquad P_7 = 0$$
$$P_2 = 0 \qquad P_4 = -1 \qquad P_6 = 0 \qquad P_8 = 0$$

- Novena columna de la matriz $\boldsymbol{B}$

$$Q_9 = 1 \quad y \quad Q_i = 0 \quad i \neq 9$$

Figura 9.15.12 Carga unitaria Q_9 y equilibrio de elementos

$$P_1 = L_2 \qquad P_3 = -L_2 \qquad P_5 = 0 \qquad P_7 = 0$$
$$P_2 = 0 \qquad P_4 = 0 \qquad P_6 = 0 \qquad P_8 = 0$$

- Décima columna de la matriz $\boldsymbol{B}$

$$Q_{10} = 1 \quad y \quad Q_i = 0 \quad i \neq 10$$

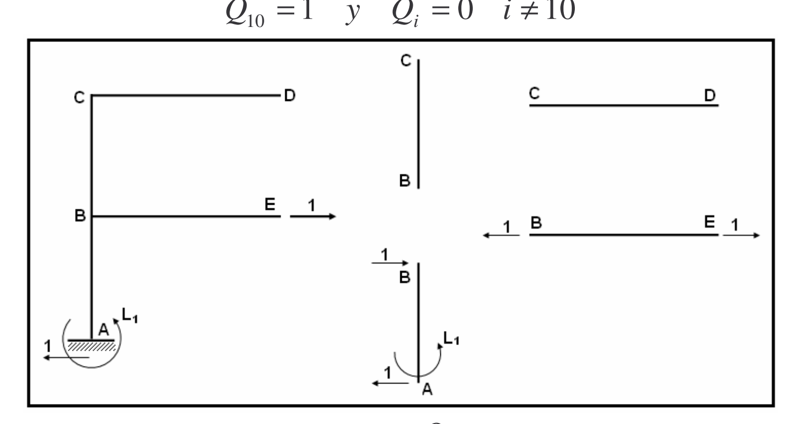


Figura 9.15.13 Carga unitaria Q_{10} y equilibrio de elementos

$$P_1 = 0 \qquad P_3 = 0 \qquad P_5 = 0 \qquad P_7 = 0$$
$$P_2 = -1 \qquad P_4 = 0 \qquad P_6 = 0 \qquad P_8 = 0$$

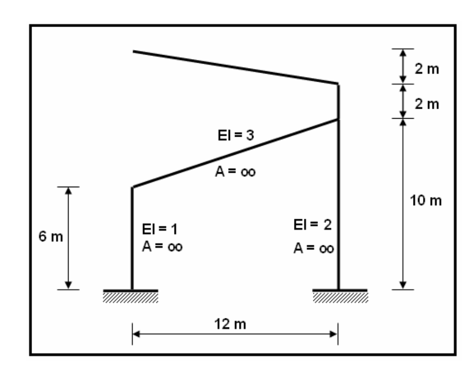
$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 1 & 1 & -1 & L_2 & L_1 & -1 & L_2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -L_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -L_1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -L_2 & -L_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & L_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -L_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

9. 5 EJERCICIOS PROPUESTOS

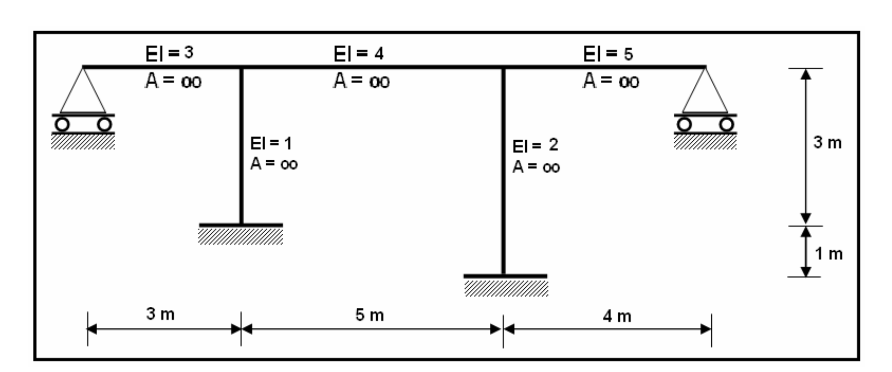
En las siguientes estructuras. Se pide:

i) Seleccionar un sistema $Q-q$ y $P-p$ apropiados.
ii) Determinar la matriz A tal que $p = A\,q$

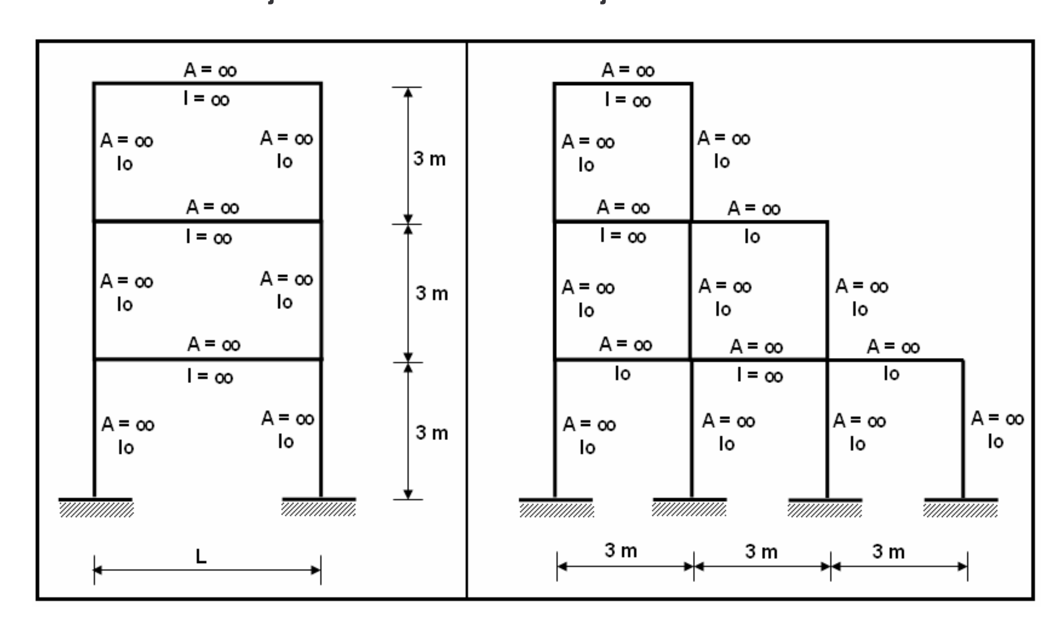
Ejercicio N.- 1



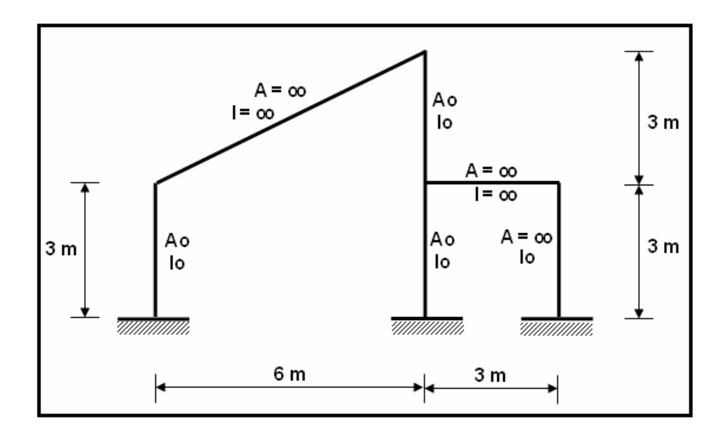
Ejercicio N.- 2



Ejercicio N.- 3 **Ejercicio N.- 4**



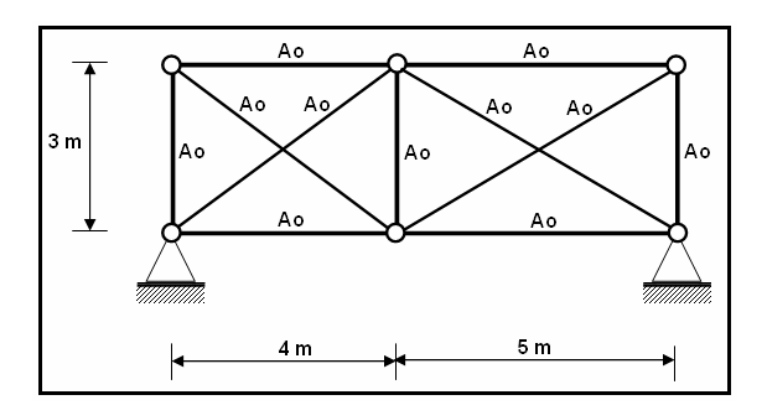
Ejercicio N.- 5



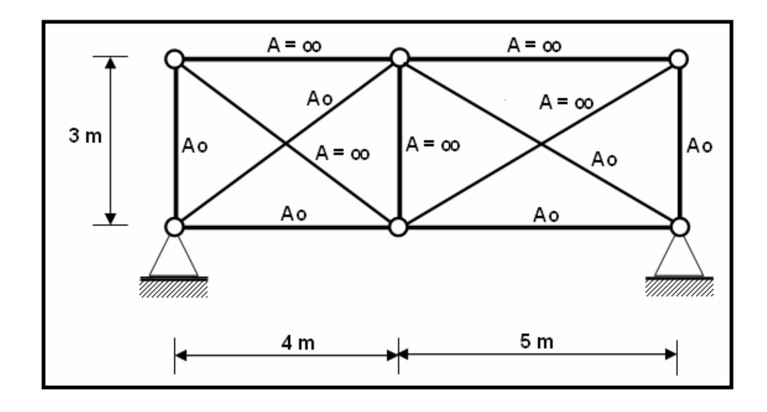
Ejercicio N.- 6

Resolver el ejercicio de la figura 9.4.1 considerando que el elemento CD es totalmente rígido. Es decir el sistema tiene tres grados de libertad.

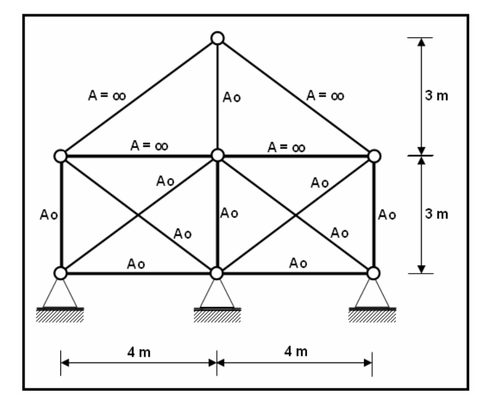
Ejercicio N.- 7



Ejercicio N.- 8

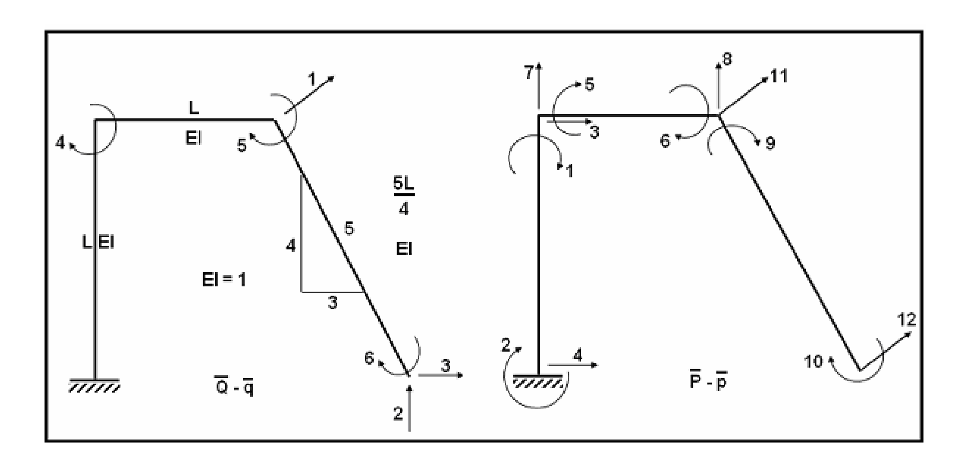


Ejercicio N.- 9



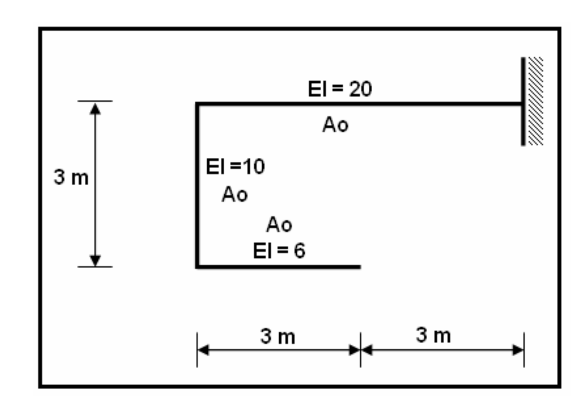
Ejercicio N.- 10

Encontrar la matriz $\boldsymbol{A}$ para la siguiente estructura, empleando los sistemas de coordenadas $\boldsymbol{Q-q}$ y $\boldsymbol{P-p}$ que se indican, si todos los elementos son axialmente rígidos. Existen 4 coordenadas $\boldsymbol{P-p}$ en cada elemento.



Ejercicio N.- 11

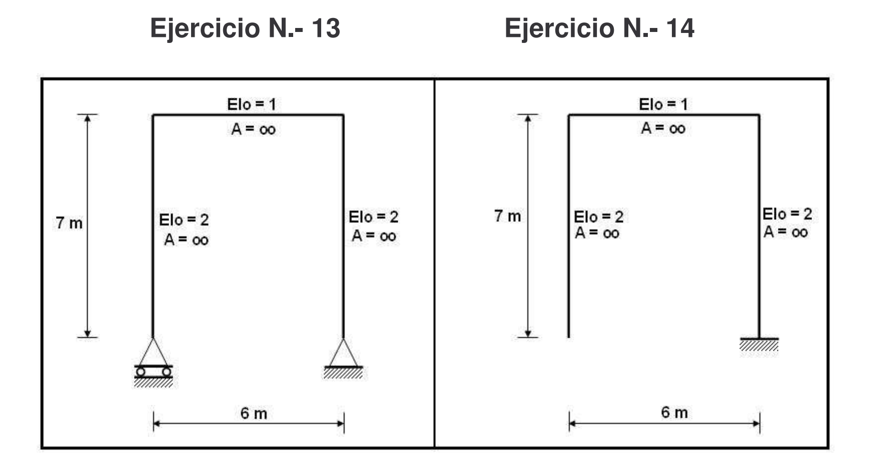
En las siguientes estructuras seleccionar sistemas $\boldsymbol{Q-q}$ y $\boldsymbol{P-p}$ apropiados y determinar la matriz $\boldsymbol{B}$ tal que $\boldsymbol{P = B\,Q}$



Ejercicio N.- 12

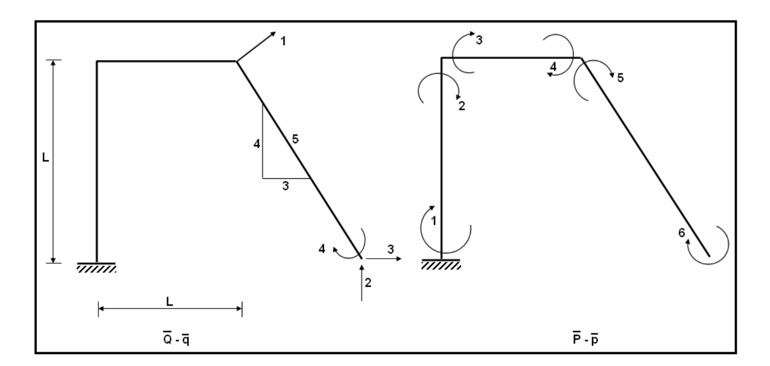
Resolver el ejercicio anterior considerando que todos los elementos son axialmente rígidos.

Ejercicio N.- 13 **Ejercicio N.- 14**



Ejercicio N.- 15

Calcular la matriz $\boldsymbol{B}$ para la siguiente estructura empleando los sistemas de coordenadas de la estructura y de los elementos que se indica a continuación.



Ejercicio N.- 16

Determinar la matriz $\boldsymbol{B}$ para la armadura plana indicada en la figura 9.6.1

CAPITULO 10

CÁLCULO DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ DE UNA ESTRUCTURA POR MEDIO DE LA MATRIZ A

RESUMEN

Se presenta el cálculo de la matriz de rigidez de una estructura de dos formas a saber: la primera trabajando con toda la matriz de compatibilidad de deformaciones y la segunda que es la que más se utiliza calculando con las submatrices de la matriz A. Se realizan una serie de ejemplos considerando diferentes sistemas de coordenadas en los elementos.

Para que el lector pueda desarrollar los triples productos matriciales que se requieren para calcular la matriz de rigidez, se presenta un diagrama de flujo para que el lector realice un programa de computación. Por otra parte se presenta el uso del Programa CAL que realiza operaciones matriciales en forma muy elemental.

10. 1 FORMULACIÓN MATRICIAL

En los capítulos anteriores se estudió con detenimiento las siguientes ecuaciones:

$$p = A\ q \quad (10.1)$$

$$P = k\ p \quad (10.2)$$

$$Q = A^t\ P \quad (10.3)$$

Al sustituir la ecuación (10.2) en la ecuación (10.3) se tiene:

$$Q = A^t\ k\ p$$

Si en ésta última relación matricial se reemplaza la ecuación (10.1) se obtiene:

$$Q = \left(A^t\ k\ A\right) q \quad (10.4)$$

Por otra parte se conoce que:

$$Q = K\ q \tag{10.5}$$

De las ecuaciones (10.4) y (10.5) se deduce que la matriz de rigidez de una estructura se obtiene realizando el siguiente triple producto matricial:

$$K = A^t\ k\ A \tag{10.6}$$

donde K es la matriz de rigidez de la estructura; A es la matriz de compatibilidad de deformaciones; k es la matriz que está conformada por las matrices de rigidez de cada uno de los elementos de la estructura colocados en la diagonal.

Desde el punto de vista matemático, la deducción de la ecuación (10.6) no es rigurosa, concretamente no se ha justificado el por qué de los paréntesis que se presenta en la ecuación (10.4). Esta omisión por parte del autor se lo ha realizado con el propósito de non desviar la atención del estudiante y lo más importante presentar el problema de una manera sencilla. Una demostración más rigurosa implicaría el estudiar primero aplicaciones lineales:

$$f : R^n \quad \rightarrow R^n$$

y posteriormente espacios vectoriales. Con ésta aclaración se pasa a realizar ejercicios que ayuden a comprender el uso de la ecuación (10.6).

- **EJEMPLO N.- 1**

Para la estructura de la figura 10.1 cuyos elementos son axialmente rígidos, se pide calcular la matriz de rigidez de la estructura. En las figuras 10.2 y 10.3 se presentan los sistemas de coordenadas $Q - q$ de la estructura y $P - p$ de los elementos con los cuales se obtuvo la matriz A .

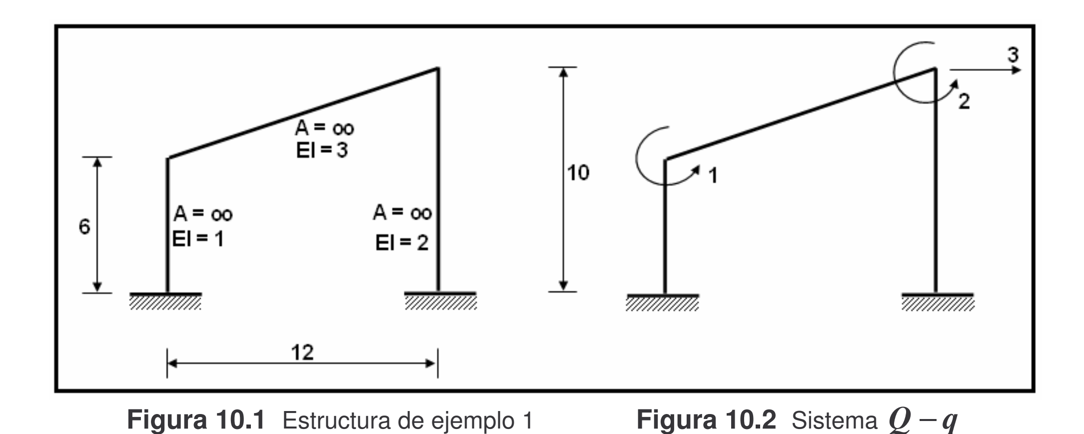


Figura 10.1 Estructura de ejemplo 1 **Figura 10.2** Sistema $Q - q$

El sistema $P - p$ mostrado en la figura 10.3 implica que la numeración de los elementos de la estructura es la presentada en la figura 10.4.

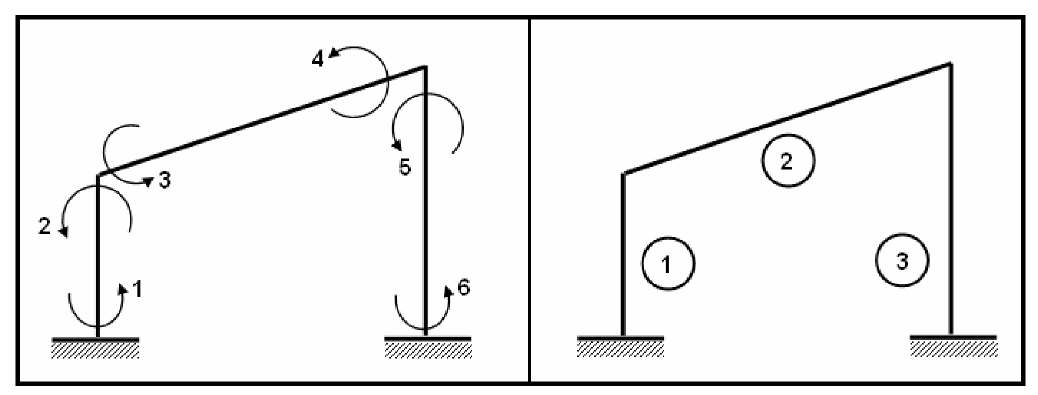


Figura 10.3 Sistema $P - p$ **Figura 10.4** Numeración de los elementos.

La matriz A que se obtiene es:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ 1 & 0 & \frac{1}{6} \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

- **SOLUCIÓN**

En éste capítulo no se calculará la matriz A que fue estudiada en el capítulo anterior. Es responsabilidad del lector realizar su comprobación.

Por ser los elementos axialmente rígidos, hipótesis del ejercicio, la matriz de rigidez de miembro para elementos de sección constante y al despreciar el efecto de corte es:

$$k = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} = \frac{2EI}{L}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Para los datos numéricos del ejercicio, se tiene:

$$k^{(1)} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad k^{(2)} = \frac{3}{2\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad k^{(3)} = \frac{2}{5}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

La forma de la matriz $\boldsymbol{k}$ que consta en la ecuación (10.6) para el ejercicio es:

$$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{k}^{(1)} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{k}^{(2)} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{k}^{(3)} \end{bmatrix}$$

Al sustituir los valores obtenidos se encuentra:

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{3}{2\sqrt{10}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

Al efectuar el producto matricial $\boldsymbol{A}^t \ \boldsymbol{k} \ \boldsymbol{A}$ se obtiene la matriz de rigidez de la estructura $\boldsymbol{K}$.

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 1.616 & 0.474 & 0.167 \\ 0.474 & 1.749 & 0.120 \\ 0.167 & 0.120 & 0.080 \end{bmatrix}$$

10. 2 CÁLCULO DE K TRABAJANDO CON SUBMATRICES

El calcular la matriz de rigidez de una estructura por la forma propuesta en el apartado anterior implica trabajar con matrices cuyo orden es demasiado alto. Por éste motivo se busca un algoritmo de cálculo que conduzca a los mismos resultados pero trabajando con matrices de menor orden. Para lograr este objetivo se recuerda que la matriz $\boldsymbol{A}$ es particionada. En efecto ésta matriz está compuesta por submatrices, tantas como elementos tenga la estructura.

En el ejemplo anterior se tiene que las dos primeras filas de la matriz de compatibilidad de deformaciones $\boldsymbol{A}$ corresponden al elemento 1, las dos siguientes al elemento 2 y las dos últimas al elemento 3.

$$\boldsymbol{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ 1 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

En función de las submatrices, la matriz $\boldsymbol{A}$ para el ejemplo 1 es la siguiente.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^{(1)} \\ --- \\ \boldsymbol{A}^{(2)} \\ --- \\ \boldsymbol{A}^{(3)} \end{bmatrix}$$

Para el caso general la forma de la matriz de compatibilidad de deformaciones es:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^{(1)} \\ \boldsymbol{A}^{(2)} \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ \boldsymbol{A}^{(i)} \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ \boldsymbol{A}^{(n)} \end{bmatrix}$$

Entonces la matriz $\boldsymbol{A}^{t}$ resulta:

$$\boldsymbol{A}^{t} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^{(1)t} & \boldsymbol{A}^{(2)t} & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \boldsymbol{A}^{(i)t} & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \boldsymbol{A}^{(n)t} \end{bmatrix}$$

Al realizar el triple producto matricial $\boldsymbol{A}^{t}\ \boldsymbol{k}\ \boldsymbol{A}$ con las submatrices y considerando que la matriz $\boldsymbol{k}$ está compuesta por las matrices de rigidez de los elementos colocados en la diagonal se obtiene:

$$\boldsymbol{K} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{A}^{(i)t}\ \boldsymbol{k}^{(i)}\ \boldsymbol{A}^{(i)} \qquad (10.7)$$

donde n es el número de elementos que tiene la estructura. La sumatoria se realiza hasta n cuando la estructura analizada no tiene elementos totalmente flexibles. Para el caso de que la estructura tenga elementos totalmente rígidos, primero la matriz $\boldsymbol{A}$ ya no tendrá n submatrices si no menos, tantas como elementos totalmente rígidos se tengan. Luego la sumatoria ya no será hasta n.

- **EJEMPLO N.- 2**

Por el procedimiento descrito en el apartado 10.2 calcular la matriz de rigidez de la estructura presentada en la figura 10.5. Cuyo elemento vertical es transversalmente rígido.

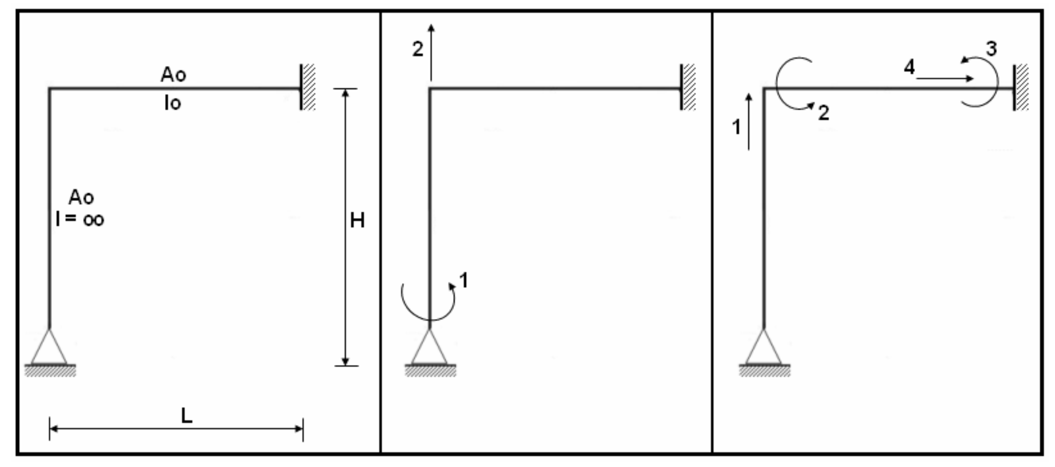


Figura 10.5 **Figura 10.6** Sistema $Q-q$ **Figura 10.7** Sistema $P-p$

- **SOLUCIÓN**

En las figuras 10.6 y 10.7 se presentan los sistemas $Q-q$ y $P-p$ respectivamente, para los cuales se obtuvo la matriz A que es la siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \hline 1 & \frac{1}{L} \\ 0 & \frac{1}{L} \\ H & 0 \end{bmatrix}$$

Para el ejemplo se tiene:

$$k^{(1)} = \left[\frac{EA_o}{H}\right] \qquad k^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{4EI_o}{L} & \frac{2EI_o}{L} & 0 \\ \frac{2EI_o}{L} & \frac{4EI_o}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA_o}{L} \end{bmatrix}$$

El resultado de los productos matriciales reporta:

$$\boldsymbol{A}^{(1)t}\ \boldsymbol{k}^{(1)}\ \boldsymbol{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{EA_o}{H} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{(2)t}\ \boldsymbol{k}^{(2)}\ \boldsymbol{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} \dfrac{4\boldsymbol{EI_o}}{\boldsymbol{L}} + \dfrac{\boldsymbol{EA_oH}^2}{\boldsymbol{L}} & \dfrac{6\boldsymbol{EI_o}}{\boldsymbol{L}^2} \\ \dfrac{6\boldsymbol{EI_o}}{\boldsymbol{L}^2} & \dfrac{12\boldsymbol{EI_o}}{\boldsymbol{L}^3} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{EA_o}{H} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{4EI_o}{L} + \dfrac{EA_oH^2}{L} & \dfrac{6EI_o}{L^2} \\ \dfrac{6EI_o}{L^2} & \dfrac{12EI_o}{L^3} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} \dfrac{4EI_o}{L} + \dfrac{EA_oH^2}{L} & \dfrac{6EI_o}{L^2} \\ \dfrac{6EI_o}{L^2} & \dfrac{12EI_o}{L^3} + \dfrac{EA_o}{H} \end{bmatrix}$$

10. 3 CÁLCULO DE K CON CUALQUIER SISTEMA $P - p$

En los ejercicios que se han resuelto en éste capítulo, se ha venido trabajando con el siguiente sistema de coordenadas de elemento.

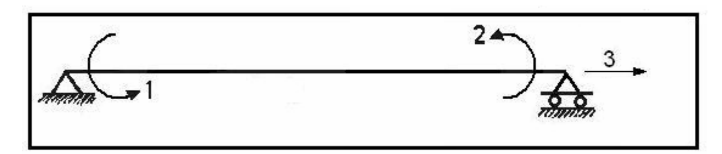


Figura 10.8 Sistema de coordenadas $P - p$.

Lo más común es trabajar con el sistema $P - p$ indicado en la figura 10.8. Pero en general se puede calcular la matriz de rigidez de una estructura con cualquier sistema de coordenadas de miembro como se ha indicado en los capítulos anteriores. Con el propósito de ilustrar lo anotado en este apartado se repasa lo estudiado para el sistema de coordenadas del elemento indicado en la figura 10.9 para posteriormente realizar ejercicios con éste sistema.

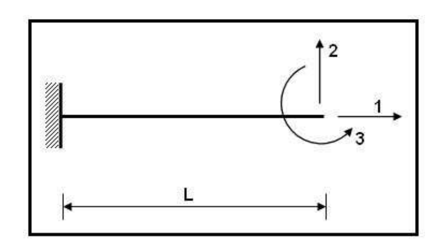


Figura 10.9 Sistema de coordenadas $P - p$

Para éstas coordenadas, las deformaciones de un elemento, son:

$$p_1 = u_2 - u_1$$
$$p_2 = v_2 - v_1 - L\,\theta_1$$
$$p_3 = \theta_2 - \theta_1$$

La matriz de rigidez para el sistema indicado en la figura 10.9 al no considerar el efecto de corte es:

$$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

A manera de repaso se presenta a continuación los valores con los cuales se obtienen las deformaciones de un elemento y la respectiva matriz de rigidez para el caso de un elemento axialmente rígido que se indica en la figura 10.10 y para el caso de un elemento transversalmente rígido que se indica en la figura 10.11.

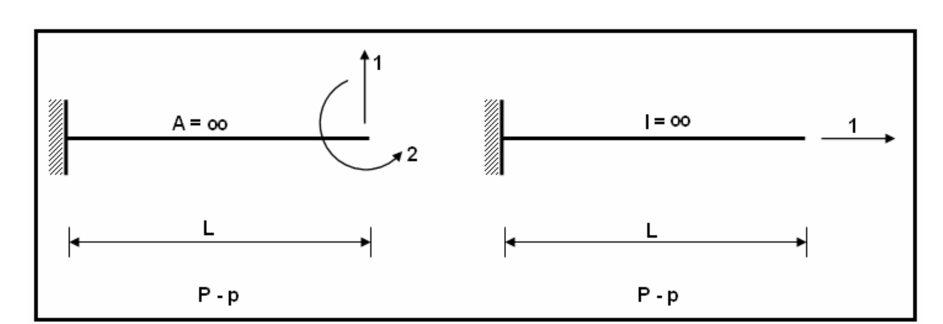


Figura 10.10 Elemento $A = \infty$ **Figura 10.11** Elemento $I = \infty$.

$$p_1 = v_2 - v_1 - L\,\theta_1$$
$$p_2 = \theta_2 - \theta_1$$

$$p_1 = u_2 - u_1$$

$$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} \end{bmatrix}$$

- **EJEMPLO N.- 3**

Calcular la matriz de rigidez para la estructura indicada en la figura 10.1, para el sistema de coordenadas $Q - q$ indicado en la figura 10.2, si ahora el sistema de coordenadas de los elementos es el indicado en la figura 10.12.

- **SOLUCIÓN**

Por ser el sistema $\boldsymbol{P}-\boldsymbol{p}$ muy poco usual se procede a calcular los términos de la primera columna de la matriz $\boldsymbol{A}$ para el efecto en la figura 10.13 se presenta la deformada elemental q_1. Es conveniente que el lector analice elemento por elemento para el cálculo de las deformaciones.

Para el elemento AB , las condiciones de borde que únicamente $\theta_2 = 1$, las restantes coordenadas del elemento son nulas. Las deformaciones del elemento AB son:

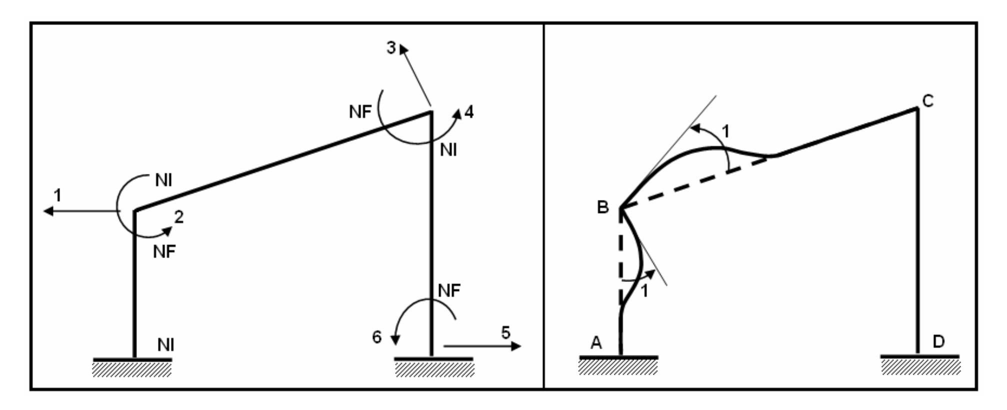


Figura 10.12 Sistema $\boldsymbol{P}-\boldsymbol{p}$ **Figura 10.13** Deformada elemental q_1

$$p_1 = v_2 - v_1 - \theta_1 L = 0 - 0 - 0 * 6 = 0$$
$$p_2 = \theta_2 - \theta_1 = 1 - 0 = 1$$

De la figura 10.13 se observa que para el elemento BC solamente $\theta_1 = 1$ y las demás coordenadas son nulas. Luego las deformaciones valen:

$$p_3 = 0 - 0 - 1 * 4\sqrt{10} = -4\sqrt{10}$$
$$p_4 = 0 - 1 = -1$$

Para el elemento CD las deformaciones son nulas, lo que se aprecia en la figura 10.13. Por lo tanto $p_5 = p_6 = 0$.

Se han utilizado las fórmulas indicadas para elementos axialmente rígidos. Se deja al lector el cálculo de la segunda y tercera columna de la matriz de compatibilidad de deformaciones que resulta.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline -4\sqrt{10} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -10 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora se evalúa la matriz de rigidez de cada elemento con la siguiente ecuación:

$$
\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}
$$

Al reemplazar valores se tiene:

$$
\boldsymbol{k}^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{18} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{4}{6} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{k}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{9}{160\sqrt{10}} & -\frac{9}{80} \\ -\frac{9}{80} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{k}^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{3}{125} & -\frac{3}{25} \\ -\frac{3}{25} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}
$$

Los resultados del triple producto matricial son:

$$
\boldsymbol{A}^{(1)t}\ \boldsymbol{k}^{(1)}\ \boldsymbol{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.667 & 0.000 & 0.167 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.167 & 0.000 & 0.056 \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{A}^{(2)t}\ \boldsymbol{k}^{(2)}\ \boldsymbol{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.949 & 0.474 & 0.000 \\ 0.474 & 0.949 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{A}^{(3)t}\ \boldsymbol{k}^{(3)}\ \boldsymbol{A}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.800 & 0.120 \\ 0.000 & 0.120 & 0.024 \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{K} = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{A}^{(i)t}\ \boldsymbol{k}^{(i)}\ \boldsymbol{A}^{(i)} = \boldsymbol{A}^{(1)t}\ \boldsymbol{k}^{(1)}\ \boldsymbol{A}^{(1)} + \boldsymbol{A}^{(2)t}\ \boldsymbol{k}^{(2)}\ \boldsymbol{A}^{(2)} + \boldsymbol{A}^{(3)t}\ \boldsymbol{k}^{(3)}\ \boldsymbol{A}^{(3)}
$$

$$
\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 1.616 & 0.474 & 0.167 \\ 0.474 & 1.749 & 0.120 \\ 0.167 & 0.120 & 0.080 \end{bmatrix}
$$

Nótese que se obtuvo el mismo resultado en el ejemplo 1 esto no es una casualidad. La matriz de rigidez es la misma por que el sistema de coordenadas de la estructura $\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{q}$ es el mismo. Para terminar con éste subapartado se menciona el hecho de que se puede calcular $\boldsymbol{K}$ empleando diferentes sistemas de coordenadas de elemento como se verá en el siguiente ejemplo.

- **EJEMPLO N.- 4**

Para la estructura del ejemplo 3, calcular la matriz de rigidez de la estructura $\boldsymbol{K}$ usando el sistema $\boldsymbol{P}-\boldsymbol{p}$ que se indica en la figura 10.14

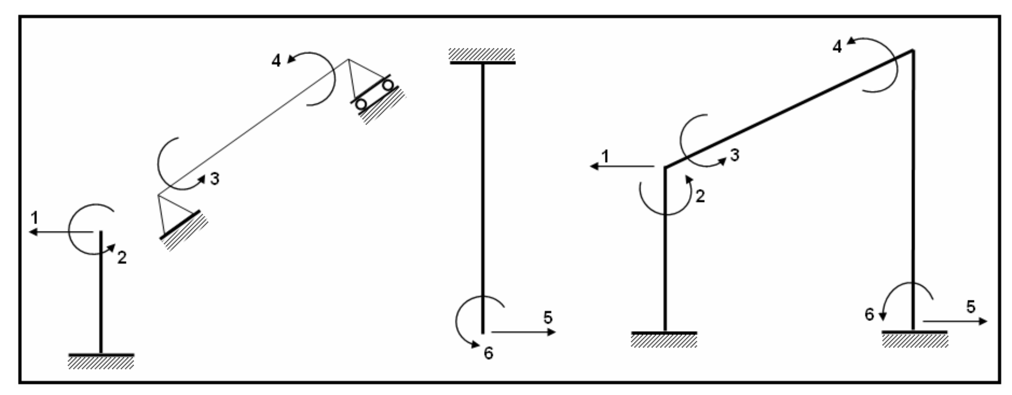


Figura 10.14 Sistema $P-p$ para cada elemento.

- **SOLUCIÓN**

Con el sistema $P-p$ de la figura 10.14 la matriz de compatibilidad de deformaciones resulta

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -10 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Las diferentes matrices de rigidez de los elementos son:

$$k^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{18} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{4}{6} \end{bmatrix}$$

$$k^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \frac{3}{2\sqrt{10}}$$

$$k^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{125} & -\frac{3}{25} \\ -\frac{3}{25} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

Si se observa con detenimiento los ejemplos 1 y 3, se ve que $A^{(1)t}\, k^{(1)}\, A^{(1)}$ y $A^{(3)t}\, k^{(3)}\, A^{(3)}$ se realizó en el ejemplo 3 y que el producto $A^{(2)t}\, k^{(2)}\, A^{(2)}$ se lo ejecutó en el ejemplo 1. Por lo tanto la matriz de rigidez de la estructura K tiene que ser la misma.

10. 4 EDIFICIO DE CORTE

Por ser importante dentro del Análisis Sísmico de Estructuras y por considerar que es oportuno tratarlo en este punto se procede a calcular la matriz de rigidez para el modelo numérico de cálculo que se conoce con el nombre de Edificio de Corte, previamente se describe el modelo. El edificio de corte está constituido por vigas infinitamente rígidas y columnas axialmente rígidas, en los cuales la masa está concentrada a novel de entrepiso. Su denominación proviene de la analogía de éste con la viga en voladizo de masa y rigidez uniforme distribuida cuyas deformaciones se deben exclusivamente al esfuerzo de corte.

- **EJEMPLO N.- 5**

Para la estructura de la figura 10.15, edificio de corte de dos pisos, se presenta en las figuras 10.16 y 10.17 los sistemas de coordenadas de la estructura $\boldsymbol{Q-q}$ y de elemento $\boldsymbol{P-p}$. Se desea encontrar la matriz de rigidez de la estructura.

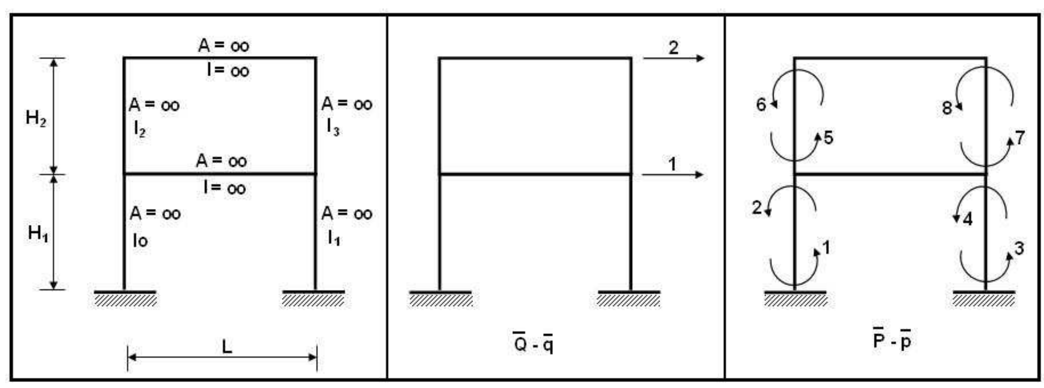


Figura 10.15 **Figura 10.16** **Figura 10.17**

$$
\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}
\frac{1}{H_1} & 0 \\
\frac{1}{H_1} & 0 \\
\hdashline
\frac{1}{H_1} & 0 \\
\frac{1}{H_1} & 0 \\
\hdashline
-\frac{1}{H_2} & \frac{1}{H_2} \\
-\frac{1}{H_2} & \frac{1}{H_2} \\
\hdashline
-\frac{1}{H_2} & \frac{1}{H_2} \\
-\frac{1}{H_2} & \frac{1}{H_2}
\end{bmatrix}
$$

- **SOLUCIÓN**

Nótese que los elementos horizontales no contribuyen a la formación de la matriz de rigidez de la estructura. De acuerdo a la matriz $\boldsymbol{A}$ se tiene que los elementos 1 y 2 corresponden a las columnas de la planta baja y los elementos 3 y 4 a las columnas de la primera planta alta.

$$\boldsymbol{k}^{(1)} = \frac{2EI_o}{H_1}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{k}^{(2)} = \frac{2EI_1}{H_1}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{k}^{(3)} = \frac{2EI_2}{H_2}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{k}^{(4)} = \frac{2EI_3}{H_2}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Luego de efectuar $\boldsymbol{K} = \sum_{i=1}^{4} \boldsymbol{A}^{(i)t}\ \boldsymbol{k}^{(i)}\ \boldsymbol{A}^{(i)}$ se obtiene:

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} \left(\frac{12EI_o}{H_1^3} + \frac{12EI_1}{H_1^3}\right) + \left(\frac{12EI_2}{H_2^3} + \frac{12EI_2}{H_2^3}\right) & -\left(\frac{12EI_2}{H_2^3} + \frac{12EI_2}{H_2^3}\right) \\ -\left(\frac{12EI_2}{H_2^3} + \frac{12EI_2}{H_2^3}\right) & \left(\frac{12EI_2}{H_2^3} + \frac{12EI_2}{H_2^3}\right) \end{bmatrix}$$

Por otra parte se define a $\boldsymbol{k_n}$ como la rigidez del piso n, de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{k_n} = \sum_{i}^{j} \frac{12EI_i}{H_n^3}$$

donde H_n es la altura del entrepiso n; I_i es el momento de inercia de la columna i en el piso n; E es el módulo de elasticidad del material; j es el número de columnas en el piso n. Para la estructura que se analiza se tiene que la rigidez del piso 1 es:

$$\boldsymbol{k}_1 = \frac{12EI_o}{H_1^3} + \frac{12EI_1}{H_1^3}$$

Para el piso 2, la rigidez de piso vale:

$$\boldsymbol{k}_2 = \frac{12EI_2}{H_2^3} + \frac{12EI_3}{H_2^3}$$

Con ésta notación la matriz de rigidez de la estructura para el pórtico de la figura 10.15, es:

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2 & -\boldsymbol{k}_2 \\ -\boldsymbol{k}_2 & \boldsymbol{k}_2 \end{bmatrix}$$

Al generalizar los resultados obtenidos en el ejemplo 5, para un edificio de corte de n pisos como el mostrado en la figura 10.18, para el sistema de coordenadas de la figura 10.19, la matriz de rigidez es la siguiente:

$$K = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3+k_4 & -k_4 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & .. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -k_n & k_n \end{bmatrix}$$

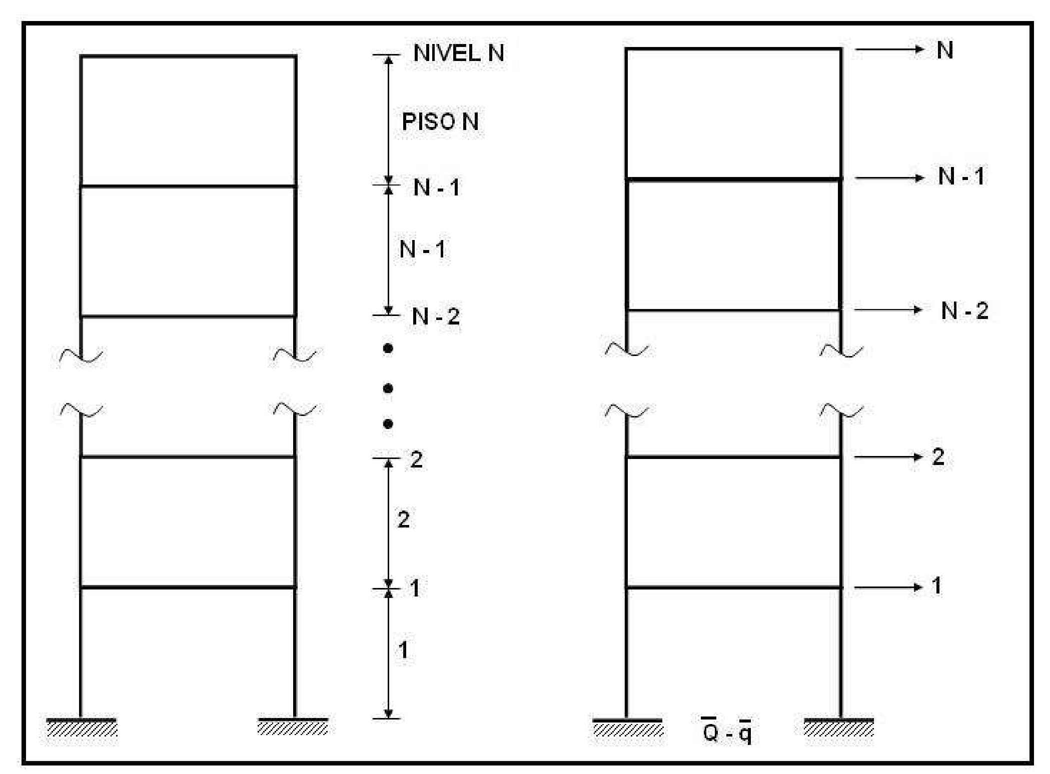
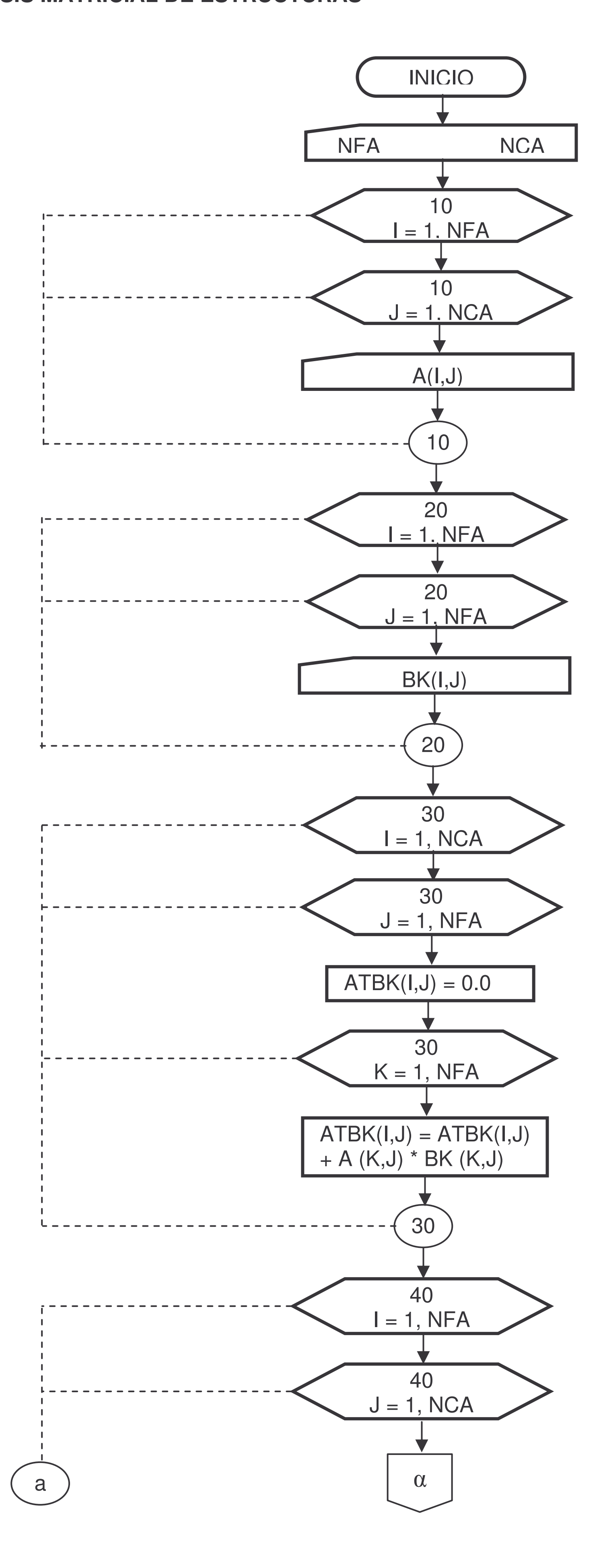


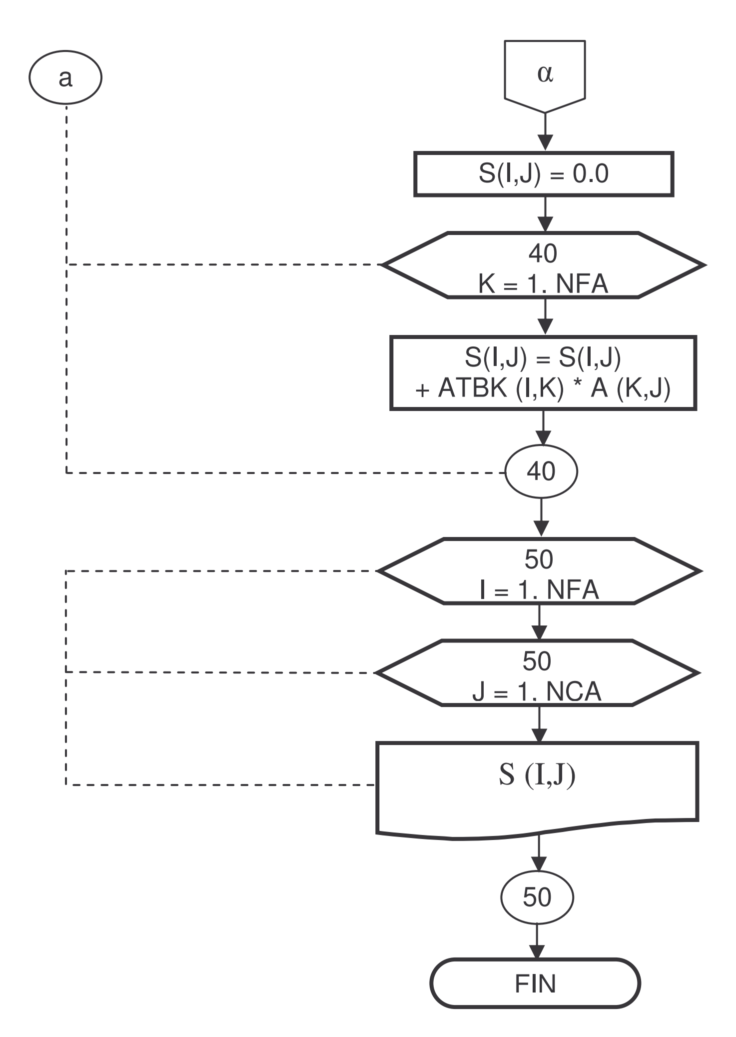
Figura 10.18 Edificio de Corte **Figura 10.19** Sistema de coordenadas.

La matriz de rigidez es simétrica, en la cual los términos de la diagonal son k_1+k_2; k_2+k_3; k_3+k_4; k_4+k_5; …. hasta k_n y los elementos de las diagonales adyacentes son $-k_2$; $-k_3$; $-k_4$; ……hasta $-k_n$.

10.5 DIAGRAMA DE FLUJO PARA EL TRIPLE PRODUCTO MATRICIAL

Con el propósito de ayudar al lector a realizar ejercicios se incluye a continuación el diagrama de flujo de un programa que efectúa el siguiente producto matricial: $A^t \ k \ A$. La nomenclatura empleada en el diagrama es: A para la matriz A, BK para la matriz de rigidez k; NFC es el número de filas de la matriz A, NCA es el número de columnas de la matriz A. La matriz de rigidez k es de orden NFA por NFA y estará conformada por las matrices de rigidez de cada uno de los elementos colocados en la diagonal. El producto de $A^t k$ se almacena en la matriz $ATBK$. Finalmente el producto de $ATBK$ por A se almacena en la matriz S. De tal manera que $S = A^t \ k \ A$.


INICIO
NFA NCA
10
I = 1, NFA
10
J = 1, NCA
A(I,J)
10
20
I = 1, NFA
20
J = 1, NFA
BK(I,J)
20
30
I = 1, NCA
30
J = 1, NFA
ATBK(I,J) = 0.0
30
K = 1, NFA
ATBK(I,J) = ATBK(I,J)
+ A (K,J) * BK (K,J)
30
40
I = 1, NFA
40
J = 1, NCA
a
α



A manera de resumen se indica:

1. En el lazo 10 se lee la matriz $\boldsymbol{A}$, previamente se leyó el número de filas y columnas de ésta matriz. Se lee toda la matriz.

2. En el lazo 20 se lee la matriz de rigidez $\boldsymbol{k}$ que está compuesta por las matrices de rigidez de cada uno de los elementos colocados en la diagonal. En el diagrama de flujo a ésta matriz se la ha denominado matriz $\boldsymbol{BK}$.

3. Una vez que se han leído las matrices $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{k}$ en el lazo 30 se realiza el producto matricial $\boldsymbol{A}^t\ \boldsymbol{k}$.

4. En el lazo 40 se completa el objetivo del diagrama de flujo $\left(\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{k}\right)\boldsymbol{A}$.

5. El resultado del triple producto matricial se lo reporta en el lazo 50.

Antes de implementar el programa el lector debe dimensionar los arreglos $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{BK}, \boldsymbol{ATBK}, \boldsymbol{S}$. Si se desea ver la contribución de cada uno de los elementos en la matriz de rigidez de la estructura, es decir si se quiere programar exclusivamente $\boldsymbol{A}^{(i)t}\ \boldsymbol{k}^{(i)}\ \boldsymbol{A}^{(i)}$, en el lazo 20 se debe cambiar la variable NFA por NCA. Claro está que después habrá que ir sumando los resultados parciales. Se recalca que en la forma presentada del diagrama de flujo se encuentra la matriz de rigidez de la estructura trabajando con toda la matriz $\boldsymbol{A}$ y con toda la matriz $\boldsymbol{k}$.

10.6 USO DE CAL

Existen varias versiones del programa **CAL, C**omputer **A**ssisted **L**earning la primera versión data de 1960 y fue dirigida por el Profesor Ray Clough en la Universidad de Berkeley en California. Posteriormente ha sido mejorado con el concurso de varios estudiantes de post grado dirigidos por profesores como E.L. Wilson. Es un programa netamente didáctico orientado para el estudio del Análisis Matricial de Estructuras y para Dinámica de Estructuras.

Para utilizar CAL el usuario debe saber como se resuelve una estructura, por ejemplo y darle al programa una serie de órdenes mediante comandos de CAL que van ejecutando cada uno de los pasos de la solución. En el presente apartado se indican los comandos con los cuales se puede obtener el triple producto matricial: $\boldsymbol{A}^{(i)t}\ \boldsymbol{k}^{(i)}\ \boldsymbol{A}^{(i)}$ pero también se complementa con otros comandos básicos para álgebra matricial.

- **LOAD A R=? C=?**

  El comando **LOAD** crea una matriz $\boldsymbol{A}$ de R filas y C columnas. A continuación de la definición de **LOAD** debe indicarse los elementos de la matriz $\boldsymbol{A}$ por filas, los mismos que pueden estar separados por comas o por un espacio en blanco o por varios espacios en blanco.

- **MULT A B C**

  El comando **MULT** crea la matriz $\boldsymbol{C}$ con el producto de las matrices $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$, siempre y cuando sea posible realizar el producto matricial $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B}$

- **TRAN A B**

  El comando **TRAN** obtiene la matriz $\boldsymbol{B}$ con el contenido de la transpuesta de $\boldsymbol{A}$. De tal manera que $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^t$

- **TMULT A B C**

  El comando **TMULT** obtiene la matriz transpuesta de $\boldsymbol{A}$ y multiplica por la matriz $\boldsymbol{B}$. El resultado lo almacena en la matriz $\boldsymbol{C}$. En consecuencia se tiene $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}^t\ \boldsymbol{B}$.

- **PRINT A**

  El comando **PRINT** imprime la matriz $\boldsymbol{A}$ por pantalla y también en el ARCHIVO.OUT donde se almacenan todas las operaciones que se realizan con CAL. En lugar de escribir toda la palabra **PRINT** puede escribirse únicamente la letra **P**, en la primera columna.

  Todas las instrucciones que se deseen realizar se las graba en un ARCHIVO con cualquier nombre, conviene que éste nombre tenga pocas letras. Posteriormente cuando se ejecuta el programa CAL en la versión que se disponga el programa pregunta el nombre del archivo de datos y una vez que el usuario da el nombre el programa le indica que el archivo de resultados tiene el mismo nombre con la extensión OUT. Es en éste archivo en que se va almacenando toda la secuencia de cálculo.

- **ADD A B**

El comando **ADD** realiza la suma de las matrices A y B el resultado lo almacena en A.

- **QUIT**

Sirve para terminar la terminación de un grupo de comandos. Finaliza la ejecución de CAL cuando se llega al comando **QUIT** se sale automáticamente del programa.

- **RETURN**

El comando **RETURN** es similar al comando **QUIT** con la diferencia de que con el comando **RETURN** no se abandona el programa CAL sino que únicamente termina la ejecución de un bloque de trabajo que fue identificado con la sentencia **SUBMIT** cuando se ejecuta el programa CAL. Por lo tanto se continúa dentro del programa y se puede ejecutar otro bloque de trabajo.

En el archivo de datos la primera instrucción es la identificación de un bloque de trabajo esto se lo hace con la letra B seguido de un número. Por ejemplo B1 a continuación se indica toda la secuencia de cálculo de ese bloque y puede terminar con el comando **RETURN.** Después en el archivo de datos se puede tener otro bloque de trabajo, por ejemplo B2 y su secuencia de trabajo que finaliza con **RETURN,** etc. Cuando se ejecuta CAL con la sentencia **SUBMIT** se especifica el bloque de trabajo que se desee calcular.

- **SUBMIT NAME**

El comando **SUBMIT** va acompañado del nombre de bloque de trabajo que se desea ejecutar. En consecuencia **NAME** es el bloque que puede ser B1 o B2 o el bloque que se desea ejecutar. Se recuerda que cada bloque finaliza con el comando **RETURN** o **QUIT.**

- **C**

La letra **C** en la primera columna indica al programa que lo que viene a continuación son comentarios.

Estos son los comandos básicos con los cuales se puede obtener la matriz de rigidez de una estructura utilizando el programa CAL. Ahora se van a indicar otros comandos que sirven para el Álgebra Matricial.

- **SUB A B**

El comando **SUB** realiza la diferencia de las matrices $A - B$ el resultado se almacena en la matriz A.

- **INVERT A**

El comando **INVERT** obtiene la matriz inversa de A, el resultado se almacena en A de tal manera que antes de ejecutar este comando habían determinados valores en la matriz A después de utilizarlo se cambia el contenido con los valores de la inversa.

- **DUP A B**

El comando **DUP** crea la matriz B con los mismos valores de la matriz A.

- **DELETE A**

El comando **DELETE** borra el contenido de la matriz A

- **EJEMPLO N.- 6**

Preparar el archivo de datos para el programa CAL para ejecutar el producto matricial $A^{(1)t}\ k_1\ A^{(1)}$ del ejemplo 3.

- **SOLUCIÓN**

```
B1
LOAD  A  R=2  C=3
0       0      -1
1       0       0
LOAD  K  R=2  C=2
0.556        -0.1667
-0.1667      0.6667
TMULT  A  K  C
MULT  C  A  D
PRINT D
QUIT
```

- **COMENTARIOS**

i) En el ejemplo al bloque de trabajo se ha denominado B1. Cuando se ejecute CAL se indicará SUBMIT B1.

ii) En el archivo de datos indicado cuando se llegue al comando QUIT se sale del programa CAL.

El lector puede continuar resolviendo el ejemplo 3 con CAL.

10.7 EJERCICIOS RESUELTOS

- **EJEMPLO N.- 7**

La estructura de la figura 10.20 está compuesta por elementos totalmente flexibles de igual longitud y sección transversal. En las figuras 10.21 y 10.22 se presentan los sistemas $Q-q$ y $P-p$ respectivamente. Se pide obtener la matriz de rigidez de la estructura.

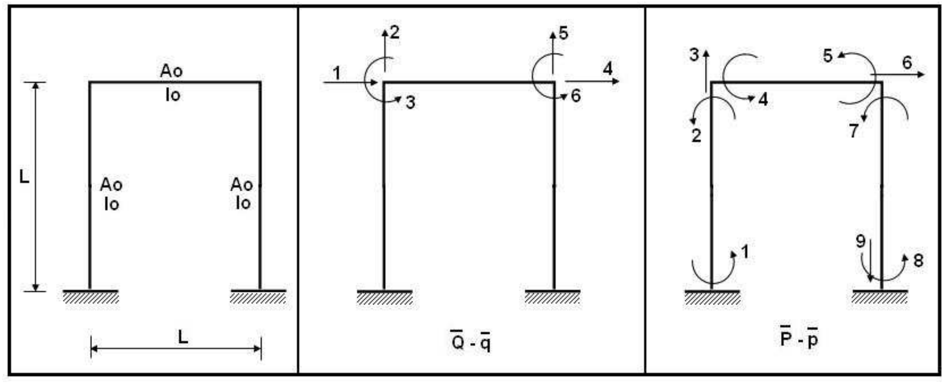


Figura 10.20 Figura 10.21 Figura 10.22

10.8 SOLUCIÓN

Para el sistema $\boldsymbol{P}-\boldsymbol{p}$ indicado en la figura 10.22, la matriz $\boldsymbol{A}$ resulta.

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{L} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{L} & 1 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Las tres primeras filas corresponden a la matriz $\boldsymbol{A}^{(1)}$, las tres siguientes son $\boldsymbol{A}^{(2)}$ y las tres últimas son $\boldsymbol{A}^{(3)}$.

Por otra parte como los elementos son de igual longitud y de igual sección transversal, la matriz de rigidez de cada uno de ellos es la misma. Luego se tiene:

$$\boldsymbol{k}^{(1)}=\boldsymbol{k}^{(2)}=\boldsymbol{k}^{(3)}=\begin{bmatrix} \frac{4EI_o}{L} & \frac{2EI_o}{L} & 0 \\ \frac{2EI_o}{L} & \frac{4EI_o}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA_o}{L} \end{bmatrix}$$

La contribución de cada uno de los elementos en la matriz de rigidez de la estructura se presenta a continuación.

$$\boldsymbol{A}^{(1)t}\ \boldsymbol{k}^{(1)}\ \boldsymbol{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{12EI_o}{L^3} & 0 & \frac{6EI_o}{L^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EA_o}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6EI_o}{L^2} & 0 & \frac{4EI_o}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{(2)t}\ \boldsymbol{k}^{(2)}\ \boldsymbol{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{EA_o}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA_o}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_o}{L^3} & \frac{6EI_o}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_o}{L^3} & \frac{6EI_o}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_o}{L^2} & \frac{4EI_o}{L} & 0 & -\frac{6EI_o}{L^2} & \frac{2EI_o}{L} \\ -\frac{EA_o}{L} & 0 & 0 & \frac{EA_o}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_o}{L^3} & -\frac{6EI_o}{L^2} & 0 & \frac{12EI_o}{L^3} & -\frac{6EI_o}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_o}{L^2} & \frac{2EI_o}{L} & 0 & -\frac{6EI_o}{L^2} & \frac{4EI_o}{L} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{(3)t}\ \boldsymbol{k}^{(3)}\ \boldsymbol{A}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_o}{L^3} & 0 & \frac{6EI_o}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA_o}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_o}{L^3} & 0 & \frac{12EI_o}{L^2} \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez de la estructura se obtiene sumando la contribución de cada uno de los elementos.

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{A}^{(1)t}\ \boldsymbol{k}^{(1)}\ \boldsymbol{A}^{(1)} + \boldsymbol{A}^{(2)t}\ \boldsymbol{k}^{(2)}\ \boldsymbol{A}^{(2)} + \boldsymbol{A}^{(3)t}\ \boldsymbol{k}^{(3)}\ \boldsymbol{A}^{(3)}$$

$$
\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix}
\frac{12EI_o}{L^3} + \frac{EA_o}{L} & & & & & \\
0 & \frac{12EI_o}{L^3} + \frac{EA_o}{L} & & SIMETRICA & & \\
-\frac{6EI_o}{L^2} & \frac{6EI_o}{L^2} & \frac{8EI_o}{L} & & & \\
-\frac{EA_o}{L} & 0 & 0 & \frac{12EI_o}{L^3} + \frac{EA_o}{L} & & \\
0 & -\frac{12EI_o}{L^3} & -\frac{6EI_o}{L^2} & 0 & \frac{12EI_o}{L^3} + \frac{EA_o}{L} & \\
0 & \frac{6EI_o}{L^2} & \frac{2EI_o}{L} & 0 & -\frac{6EI_o}{L^2} & \frac{8EI_o}{L}
\end{bmatrix}
$$

- **EJEMPLO N.- 8**

Calcular la matriz de rigidez para el pórtico plano de la figura 10.23, si los sistemas $\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{q}$ y $\boldsymbol{P}-\boldsymbol{p}$ son los presentados en las figuras 10.24 y 10.25.

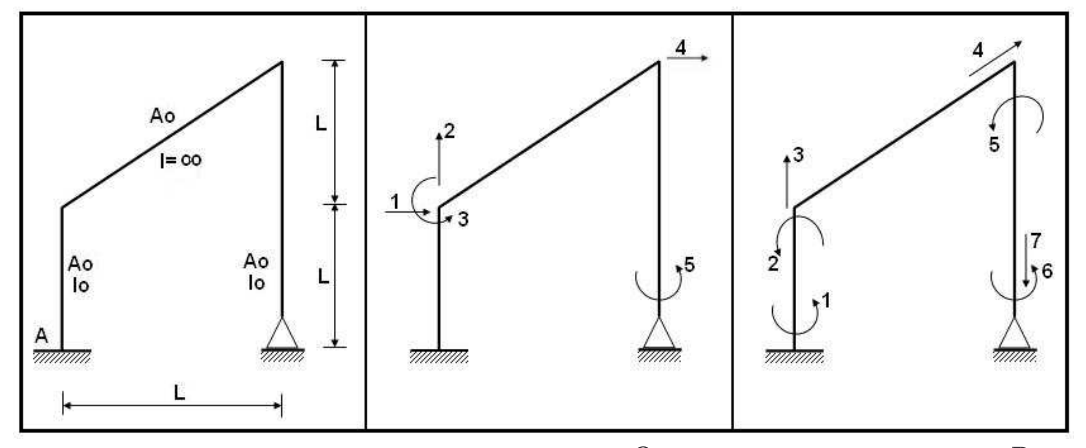


Figura 10.23 **Figura 10.24** Sistema $\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{q}$ **Figura 10.25** Sistema $\boldsymbol{P}-\boldsymbol{p}$.

- **SOLUCIÓN**

Las matrices de rigidez de cada uno de los elementos son:

$$
\boldsymbol{k}^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{4EI_o}{L} & \frac{2EI_o}{L} & 0 \\ \frac{2EI_o}{L} & \frac{4EI_o}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA_o}{L} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{k}^{(2)} = \left[\frac{EA_o}{\sqrt{2}L} \right] \qquad \boldsymbol{k}^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{4EI_o}{2L} & \frac{2EI_o}{2L} & 0 \\ \frac{2EI_o}{2L} & \frac{4EI_o}{2L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA_o}{2L} \end{bmatrix}
$$

La matriz de compatibilidad de deformaciones es:

$$
\boldsymbol{A} = \left[\begin{array}{ccccc}
\frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{L} & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\hdashline
-\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \sqrt{2}L & \sqrt{2} & 0 \\
\hdashline
0 & 0 & 1 & \frac{1}{2L} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{2L} & 1 \\
-1 & 1 & 2L & 1 & 0
\end{array}\right]
$$

$$
A^{(1)t}\ k^{(1)}\ A^{(1)} = \begin{bmatrix}
\frac{12EI_o}{L^3} & 0 & \frac{6EI_o}{L^2} & 0 & 0 \\
0 & \frac{EA_o}{L} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{6EI_o}{L^2} & 0 & \frac{4EI_o}{L} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{A}^{(2)t}\ \boldsymbol{k}^{(2)}\ \boldsymbol{A}^{(2)} = \begin{bmatrix}
1 & 0 & -L & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-L & 0 & L^2 & L & 0 \\
-1 & 0 & L & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix} \frac{\sqrt{2}EA_o}{L}
$$

$$
\boldsymbol{A}^{(3)t}\ \boldsymbol{k}^{(3)}\ \boldsymbol{A}^{(3)} = \begin{bmatrix}
\frac{EA_o}{2L} & -\frac{EA_o}{2L} & -EA_o & -\frac{EA_o}{2L} & 0 \\
-\frac{EA_o}{2L} & \frac{EA_o}{2L} & EA_o & \frac{EA_o}{2L} & 0 \\
-EA_o & EA_o & \frac{2EI_o}{L} + 2LEA_o & \frac{3EI_o}{2L^2} + EA_o & \frac{EI_o}{L} \\
-\frac{EA_o}{2L} & \frac{EA_o}{2L} & \frac{3EI_o}{2L^2} + EA_o & \frac{3EI_o}{2L^3} + \frac{EA_o}{2L} & \frac{3EI_o}{2L^2} \\
0 & 0 & \frac{EI_o}{L} & \frac{3EI_o}{2L^2} & \frac{2EI_o}{L}
\end{bmatrix}
$$

Al sumar las tres matrices correspondientes a los triples productos matriciales se obtiene $\boldsymbol{K}$.

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} \frac{EA_o}{L}\left(\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right)+\frac{12EI_o}{L^3} & & & & \\ -\frac{EA_o}{2L} & \frac{3EA_o}{2L} & & SIMETRICA & \\ -EA_o\left(\sqrt{2}+1\right)+\frac{6EI_o}{L^2} & EA_o & \frac{6EI_o}{L}+LEA_o\left(\sqrt{2}+2\right) & & \\ -\frac{EA_o\left(\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right)}{L} & \frac{EA_o}{2L} & \frac{3EI_o}{2L^2}+EA_o\left(\sqrt{2}+1\right) & \frac{3EI_o}{2L^3}+\frac{EA_o\left(\sqrt{2}+1\right)}{L} & \\ 0 & 0 & \frac{EI_o}{L} & \frac{3EI_o}{2L^2} & \frac{2EI_o}{L} \end{bmatrix}$$

- **EJEMPLO N.- 9**

Para la armadura plana indicada en la figura 10.26, calcular la matriz de rigidez $\boldsymbol{K}$ si todos los elementos tienen la misma rigidez axial EA .

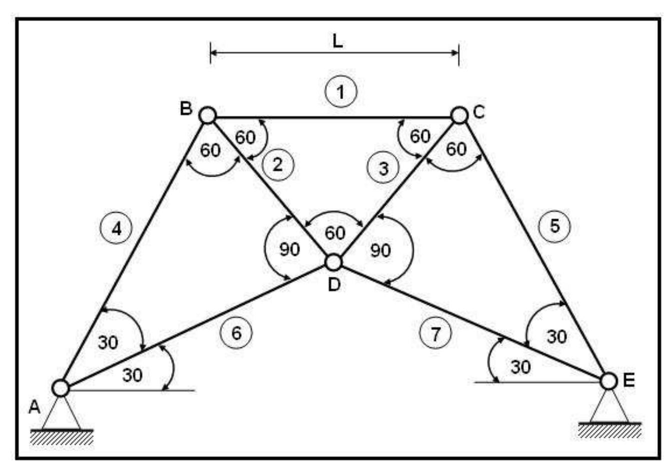


Figura 10.26

- **SOLUCIÓN**

En primer lugar se procede a calcular la longitud de cada uno de los elementos el resultado se indica en la tabla 1.

Tabla 1 Longitudes de las barras de ejemplo 9

Elemento	Longitud
1=2=3	L
4=5	2L
6=7	$\sqrt{3}$ L

En segundo lugar se determina un sistema de coordenadas generalizadas $\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{q}$ y un sistema de coordenadas de los elementos $\boldsymbol{P}-\boldsymbol{p}$, los mismos que se indican en las figuras 10.27 y 10.28, respectivamente.

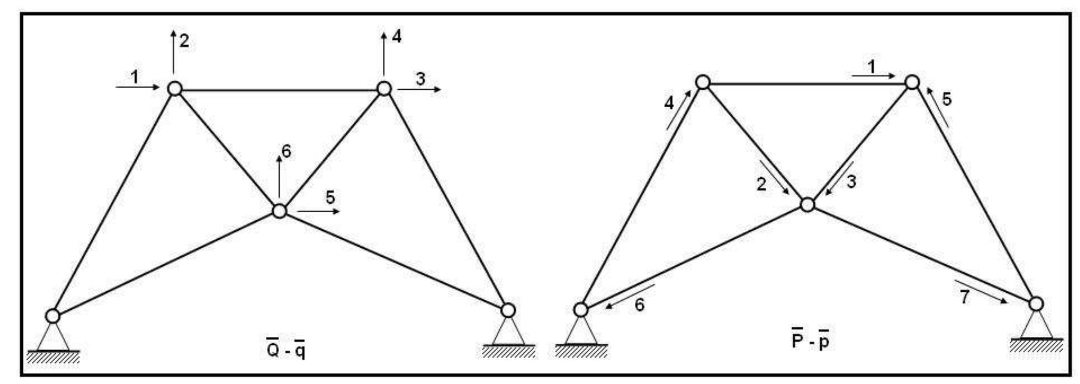


Figura 10.27 **Figura 10.28**

En tercer lugar se determina la matriz $\boldsymbol{A}$ tal que $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{q}$. Nótese que la matriz $\boldsymbol{A}$ que se ha escrito está multiplicada por $\frac{1}{2}$.

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \sqrt{3} & 0 & 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

. En cuarto lugar se obtiene la matriz de rigidez de cada uno de los elementos de la armadura

$$\boldsymbol{k}^{(1)}=\boldsymbol{k}^{(2)}=\boldsymbol{k}^{(3)}=\left[\frac{EA}{L}\right]$$

$$\boldsymbol{k}^{(4)}=\boldsymbol{k}^{(5)}=\left[\frac{EA}{2L}\right]$$

$$\boldsymbol{k}^{(6)}=\boldsymbol{k}^{(7)}=\left[\frac{EA}{\sqrt{3}L}\right]$$

Finalmente se efectúa el triple producto matricial con cada uno de los elementos y se determina la matriz de rigidez de la estructura. El resultado que se obtiene es:

$$
\boldsymbol{K} = \frac{EA}{4L}\begin{bmatrix} 7 & \sqrt{3} & -4 & 0 & -\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 9 & 0 & 0 & 3 & -3 \\ -4 & 0 & 7 & -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 9 & -3 & -3 \\ -\sqrt{3} & 3 & -\sqrt{3} & -3 & 6+2\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -3 & -\sqrt{3} & -3 & 0 & 6+2\sqrt{3} \end{bmatrix}
$$

A pesar de que en éste capítulo no se ha hecho referencia a las armaduras planas, se ha obtenido la matriz de rigidez para una de ellas siguiendo los mismos lineamientos que se han formulado para los pórticos planos. Esto se debe a que los conceptos son generales, se aplican a cualquier tipo de estructura. Únicamente por facilidad se ha trabajado con pórticos planos y ahora se empieza con armaduras planas.

- **EJEMPLO N.- 10**

Una estructura articulada consta de tres elementos conectados en la unión A como se indica en la figura 10.29. El elemento AC es vertical. Las secciones rectas A_1 y A_3 son de 50 mm^2 y A_2 es de 100 mm^2. El valor de $E = 200 * 10^3 \ N/mm^2$. Calcular la matriz de rigidez de la estructura $\boldsymbol{K}$ de acuerdo a lo formulado en el apartado 10.1, para el sistema $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{q}$ que se indica en la figura 10.30.

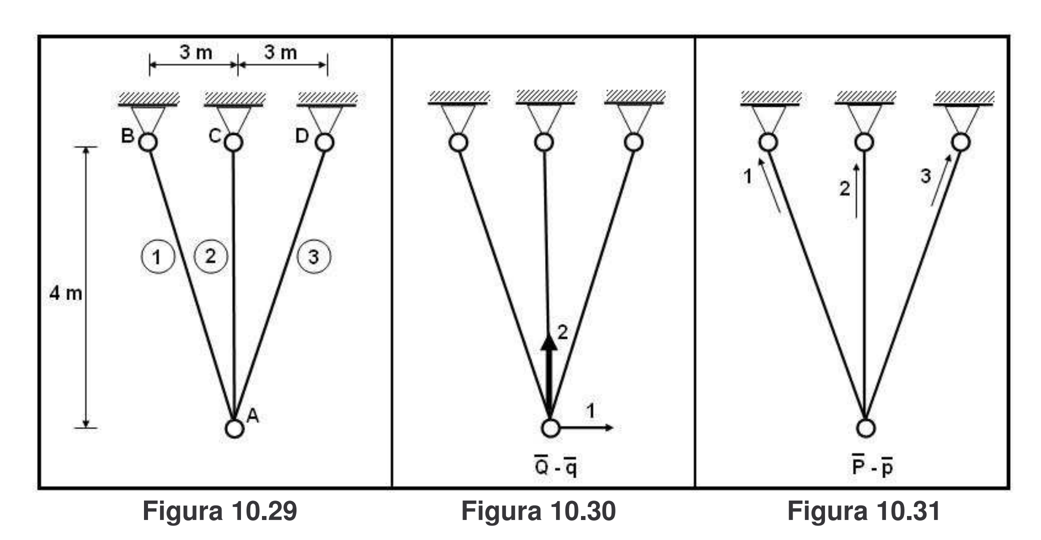


Figura 10.29 Figura 10.30 Figura 10.31

- **SOLUCIÓN**

Considerando el sistema $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}$ mostrado en la figura 10.31, la matriz $\boldsymbol{A}$ es la siguiente:

$$
\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.8 \\ 0.0 & -1.0 \\ -0.6 & -0.8 \end{bmatrix}
$$

Las matrices de rigidez de los elementos son:

$$k^{(1)} = k^{(3)} = \left[\frac{A_1\ E}{L_1}\right] = \left[\frac{50*200}{5000}\right] = \left[2\ \frac{KN}{mm}\right]$$

$$k^{(2)} = \left[\frac{A_2\ E}{L_2}\right] = \left[\frac{100*200}{4000}\right] = \left[5\ \frac{KN}{mm}\right]$$

$$k = \begin{bmatrix} k^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & k^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & k^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Se realiza el triple producto matricial con la matriz A completa.

$$K = A^t\ k\ A$$

$$K = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.0 & -0.6 \\ -0.8 & -1.0 & -0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6 & -0.8 \\ 0.0 & -1.0 \\ -0.6 & -0.8 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 1.44 & 0.00 \\ 0.00 & 7.56 \end{bmatrix}$$

- **EJEMPLO N.- 11**

Calcular la matriz de rigidez K para el pórtico plano indicado en la figura 10.32, trabajando con los sistemas $Q - q$ y $P - p$ indicados en las figuras 10.33 y 10.34.

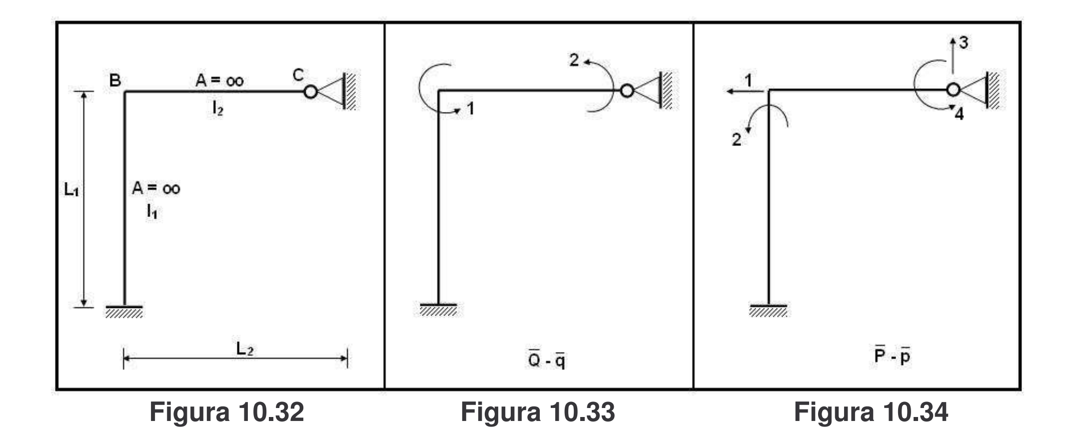


Figura 10.32 Figura 10.33 Figura 10.34

- **SOLUCIÓN**

Por trabajar con un sistema de coordenadas de elemento no tan común se procede a detallar el cálculo de la matriz de compatibilidad de deformaciones A.

- Primera columna de $\boldsymbol{A}$

$$q_1 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 1$$

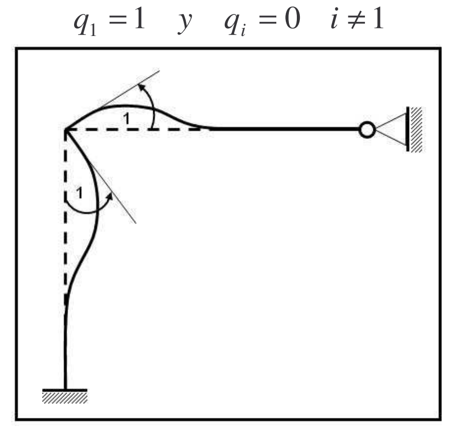


Figura 10.35 Deformada elemental q_1

$$p_1 = v_2 - v_1 - \theta_1 \; L = 0$$
$$p_2 = \theta_2 - \theta_1 = 1$$
$$p_3 = v_2 - v_1 - \theta_1 \; L = -L_2$$
$$p_4 = \theta_2 - \theta_1 = -1$$

- Segunda columna de $\boldsymbol{A}$

$$q_2 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 2$$

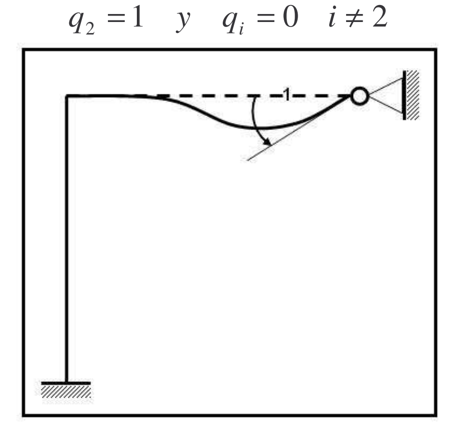


Figura 10.36 Deformada elemental q_2

$$p_1 = v_2 - v_1 - \theta_1 \; L = 0$$
$$p_2 = \theta_2 - \theta_1 = 0$$
$$p_3 = v_2 - v_1 - \theta_1 \; L = 0$$
$$p_4 = \theta_2 - \theta_1 = 1$$

Por consiguiente:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ \hline -L_2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

La forma de la matriz de rigidez de miembro para el sistema $\boldsymbol{P}-\boldsymbol{p}$ con el que se está trabajando es:

$$\boldsymbol{k}=\begin{bmatrix}\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2}\\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L}\end{bmatrix}$$

Al sustituir valores se tiene:

$$\boldsymbol{k}^{(1)}=\begin{bmatrix}\frac{12EI_1}{L_1^{\,3}} & -\frac{6EI_1}{L_1^{\,2}}\\ -\frac{6EI_1}{L_1^{\,2}} & \frac{4EI_1}{L_1}\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{k}^{(2)}=\begin{bmatrix}\frac{12EI_2}{L_2^{\,3}} & -\frac{6EI_2}{L_2^{\,2}}\\ -\frac{6EI_2}{L_2^{\,2}} & \frac{4EI_2}{L_2}\end{bmatrix}$$

El resultado de los triples productos matriciales es:

$$\boldsymbol{A}^{(1)t}\ \boldsymbol{k}^{(1)}\ \boldsymbol{A}^{(1)}=\begin{bmatrix}\frac{4EI_1}{L_1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{(2)t}\ \boldsymbol{k}^{(2)}\ \boldsymbol{A}^{(2)}=\begin{bmatrix}\frac{4EI_2}{L_2} & \frac{2EI_2}{L_2}\\ \frac{2EI_2}{L_2} & \frac{4EI_2}{L_2}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{A}^{(1)t}\ \boldsymbol{k}^{(1)}\ \boldsymbol{A}^{(1)}+\boldsymbol{A}^{(2)t}\ \boldsymbol{k}^{(2)}\ \boldsymbol{A}^{(2)}=\begin{bmatrix}\frac{4EI_1}{L_1}+\frac{4EI_2}{L_2} & \frac{2EI_2}{L_2}\\ \frac{2EI_2}{L_2} & \frac{4EI_2}{L_2}\end{bmatrix}$$

- **EJEMPLO N.- 12**

Si en la estructura del problema anterior se trabaja con el sistema $\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{q}$ presentado en la figura 10.37. Calcular la matriz de rigidez utilizando los resultados obtenidos en el ejemplo 11.

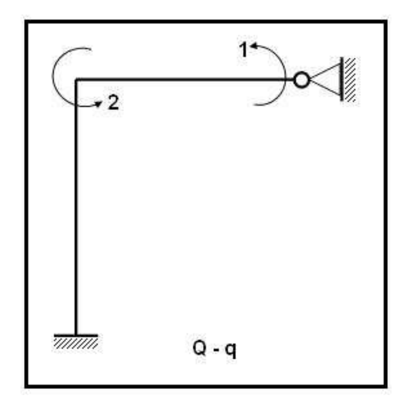


Figura 10.37

- **SOLUCIÓN**

Al comparar las figuras 10.33 y 10.37 se encuentra que únicamente se ha cambiado la numeración del sistema de coordenadas generalizadas, concretamente se cambió el 2 por el 1. Esto significa por ejemplo que en este ejercicio q_1 es la rotación del nudo C, mientras que en el problema anterior q_1 es la rotación del nudo B. Para encontrar la nueva matriz de rigidez se procede de la siguiente manera:

♣ En la matriz encontrada en el ejemplo anterior se cambia la fila 1 por la fila 2, quedando:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{2EI_2}{L_2} & \dfrac{4EI_2}{L_2} \\ \dfrac{4EI_2}{L_2} + \dfrac{4EI_1}{L_1} & \dfrac{2EI_2}{L_2} \end{bmatrix}$$

♣ Finalmente se cambia la columna 1 por la columna 2, encontrando de ésta manera la matriz de rigidez $\boldsymbol{K}$ para el sistema de coordenadas de la figura 10.37.

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} \dfrac{4EI_2}{L_2} & \dfrac{2EI_2}{L_2} \\ \dfrac{2EI_2}{L_2} & \dfrac{4EI_2}{L_2} + \dfrac{4EI_1}{L_1} \end{bmatrix}$$

El fundamento de lo expuesto se debe a la matriz de transformación de coordenadas $\boldsymbol{T}$.

- **EJEMPLO N.- 13**

Escribir directamente la matriz de rigidez para el pórtico de la figura 10.38 si el sistema de coordenadas generalizadas es el mostrado en la figura 10.39.

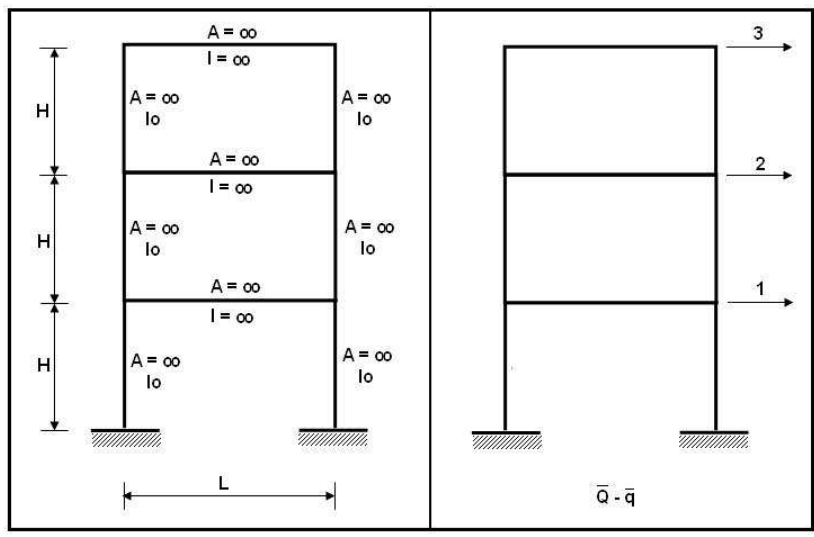


Figura 10.38 **Figura 10.39**

- **SOLUCIÓN**

La forma de la matriz de rigidez para el edificio de corte presentado es:

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}$$

donde k_i es la rigidez del piso i. De acuerdo a lo indicado en apartado 10.4 se tiene:

$$k_1 = \frac{12EI_o}{H^3} + \frac{12EI_o}{H^3} = \frac{24EI_o}{H^3}$$

En el ejercicio se considera que todas las columnas tienen la misma sección transversal y altura de piso. Por lo tanto:

$$k_1 = k_2 = k_3 = \frac{24EI_o}{H^3}$$

Luego

$$K = \begin{bmatrix} \frac{48EI_o}{H^3} & -\frac{24EI_o}{H^3} & 0 \\ -\frac{24EI_o}{H^3} & \frac{48EI_o}{H^3} & -\frac{24EI_o}{H^3} \\ 0 & -\frac{24EI_o}{H^3} & \frac{24EI_o}{H^3} \end{bmatrix}$$

- **EJEMPLO N.- 14**

Si en el problema anterior la matriz $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ define una matriz de transformación de coordenadas de la forma $q = T\, q^*$. Se pide calcular K^*.

- **SOLUCIÓN**

$$K^* = T^t K\, T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{48EI_o}{H^3} & -\frac{24EI_o}{H^3} & 0 \\ -\frac{24EI_o}{H^3} & \frac{48EI_o}{H^3} & -\frac{24EI_o}{H^3} \\ 0 & -\frac{24EI_o}{H^3} & \frac{24EI_o}{H^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K^* = \begin{bmatrix} \frac{24EI_o}{H^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{24EI_o}{H^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{24EI_o}{H^3} \end{bmatrix}$$

Como se verá en los próximos capítulos es conveniente que la matriz de rigidez sea diagonal debido a que es más fácil obtener su inversa. Por lo que se recomienda resolver el edificio de corte en las coordenadas asterisco.

- **EJEMPLO N.- 15**

Demostrar que si una matriz cuadrada $\boldsymbol{k}$ de orden m es simétrica y que si $\boldsymbol{A}$ es de orden mxn . Entonces el producto $\boldsymbol{A^t \ k \ A}$ es simétrico.

- **SOLUCIÓN**

Sea $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A^t \ k \ A}$ para demostrar que la matriz resultante del triple producto es simétrica bastará probar que $\boldsymbol{B^t} = \boldsymbol{B}$. Al obtener la matriz transpuesta de $\boldsymbol{B}$ se tiene:

$$\boldsymbol{B^t} = \left(\boldsymbol{A^t \ k \ A}\right)^t = \boldsymbol{A^t \ k^t} \left(\boldsymbol{A^t}\right)^t$$

Pero $\left(\boldsymbol{A^t}\right)^t = \boldsymbol{A}$ (Propiedad de las matrices) y $\boldsymbol{k^t} = \boldsymbol{k}$ (Por ser simétrica la matriz de rigidez). Luego se tiene que:

$$\boldsymbol{B^t} = \boldsymbol{A^t \ k \ A}$$

Con lo que se ha probado que $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B^t}$ que era lo que se quería demostrar.

Esta propiedad que se ha demostrado, ayudará al lector a comprobar los resultados cuando calcule la matriz de rigidez de una estructura que debe salir simétrica.

- **EJEMPLO N.- 16**

Demostrar que en estructuras isostáticas se cumple la siguiente propiedad:

$$\boldsymbol{K}^{-1} = \left(\boldsymbol{A^t \ k \ A}\right)^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} \ \boldsymbol{k}^{-1} \left(\boldsymbol{A^t}\right)^{-1}$$

- **SOLUCIÓN**

Si la estructura es isostática se tiene que la matriz $\boldsymbol{A}$ es cuadrada y regular. En consecuencia existe $\boldsymbol{A}^{-1}$. En estructuras hiperestáticas no se puede encontrar la inversa de la matriz $\boldsymbol{A}$. Con ésta introducción todo lo que se indica a continuación es válido para estructuras isostáticas.

Se sabe que:

$$p = A\,q \qquad \Rightarrow \qquad q = A^{-1}\,p$$
$$P = k\,p \qquad \Rightarrow \qquad p = k^{-1}\,P$$
$$Q = A^{t}\,P \qquad \Rightarrow \qquad P = \left(A^{t}\right)^{-1} Q$$

Al reemplazar la última ecuación en la anterior y el resultado en la primera se tiene:

$$q = A^{-1}\,k^{-1}\left(A^{t}\right)^{-1} Q$$

Por otra parte se conoce que:

Al igualar éstas dos últimas ecuaciones y simplificar Q se tiene:

$$K^{-1} = A^{-1}\,k^{-1}\left(A^{t}\right)^{-1}$$

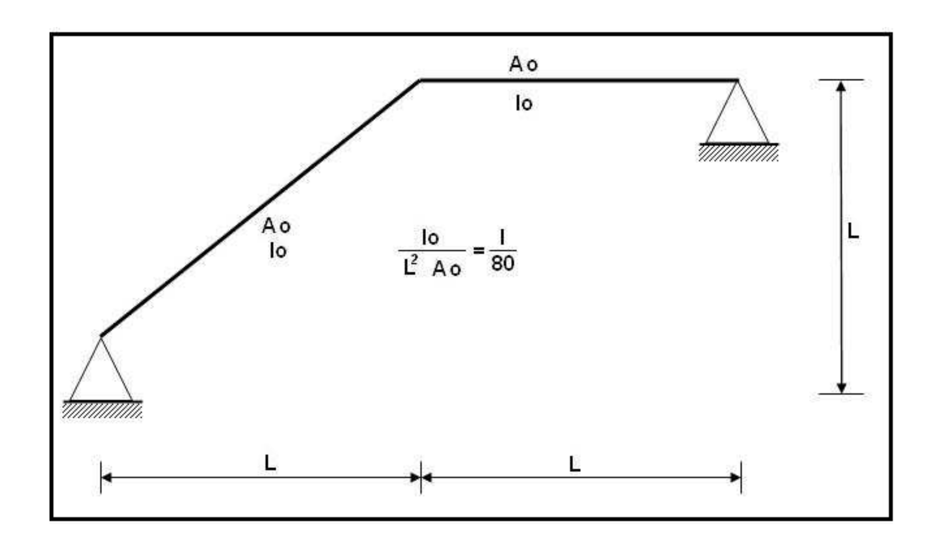
Pero

$$K = A^{t}\,k\,A \qquad \Rightarrow K^{-1} = \left(A^{t}\,k\,A\right)^{-1} = A^{-1}\,k^{-1}\left(A^{t}\right)^{-1}$$

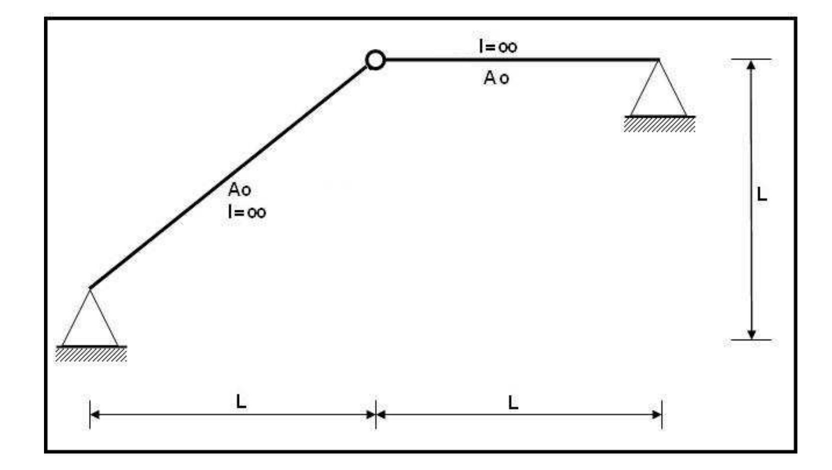
10.8 EJERCICIOS PROPUESTOS

Trabajando con la matriz de compatibilidad completa en los ejercicios 1 y 2 encontrar la matriz de rigidez de la estructura.

Ejercicio N.- 1

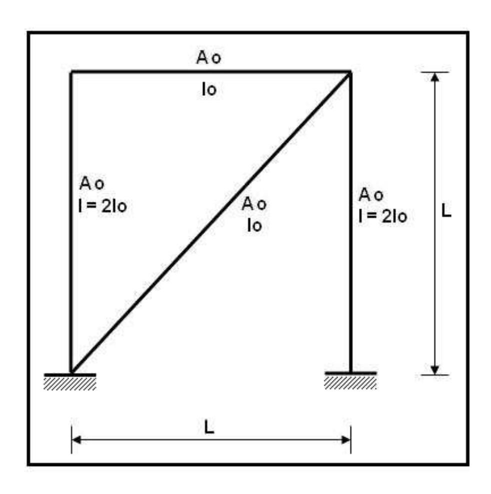


Ejercicio N.- 2



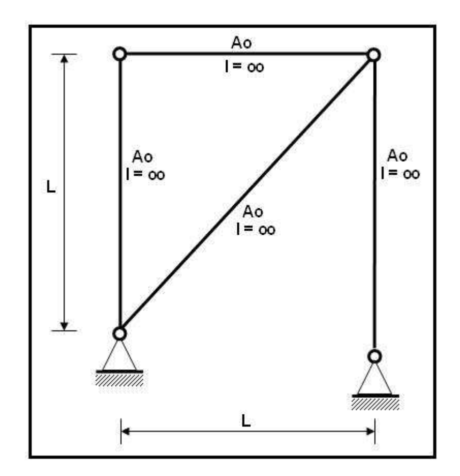
En los ejercicios 3 y 4 calcular la matriz de rigidez de la estructura trabajando con submatrices.

Ejercicio N.- 3



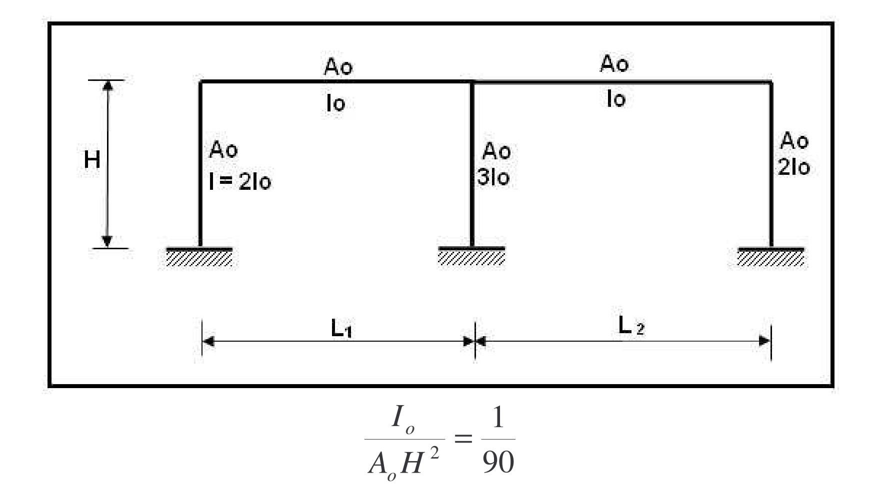
$$\frac{I_o}{A_o\ L^2} = \frac{1}{100}$$

Ejercicio N.- 4



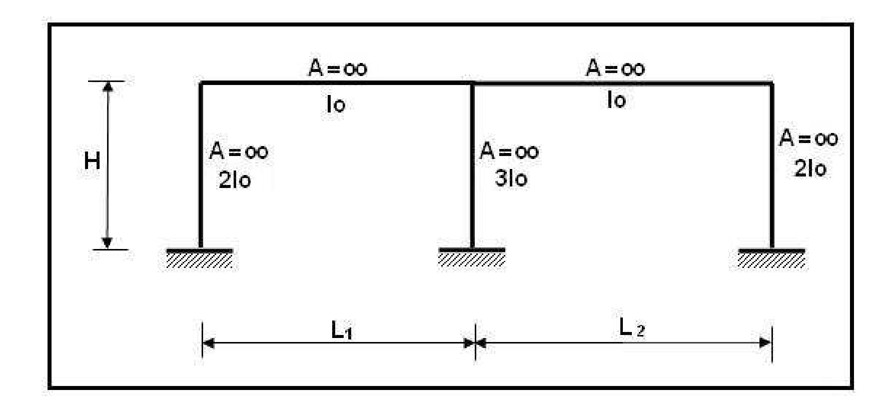
Calcular la matriz de rigidez de las estructuras de los ejercicios 5 y 6 empleando dos sistemas de coordenadas de elemento y comprobar que sale la misma matriz de rigidez.

Ejercicio N.- 5



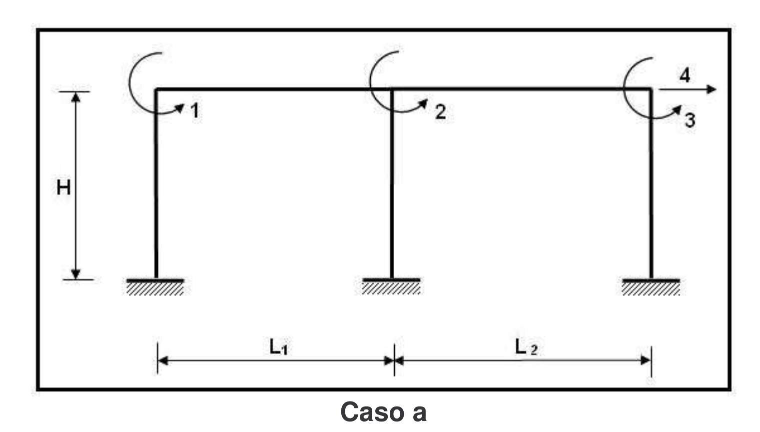
$$\frac{I_o}{A_o H^2} = \frac{1}{90}$$

Ejercicio N.- 6

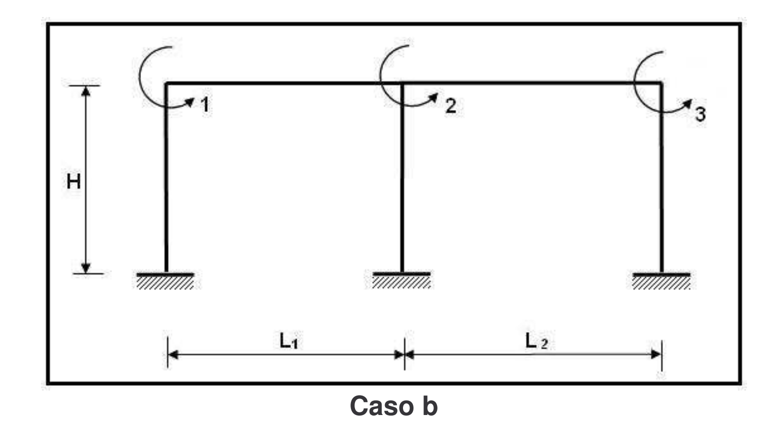


Ejercicio N.- 7

Calcular la matriz de rigidez de la estructura del ejercicio 6 considerando los siguientes sistemas de coordenadas generalizadas.



Caso a



Caso b

En el caso b no se ha considerado el desplazamiento lateral del pórtico. El objetivo del ejercicio es que el lector reconozca la forma de las matrices que resultan.

Ejercicio N.- 8

Utilizando cualquier algoritmo o método encontrar la matriz de rigidez del ejercicio anterior. Se recomienda el Método de las Rigideces sucesivas si desea impóngase alguna carga y encuentre el desplazamiento y giros.

Ejercicio N.- 9

Para el ejercicio resuelto N.-8 interpretar cual es el sistema $\boldsymbol{Q}^{*} - \boldsymbol{q}^{*}$ y obtener la matriz triangular inferior unitaria.

Ejercicio N.- 10

Demostrar que $\left(\boldsymbol{A}^{t}\right)^{t} = \boldsymbol{A}$ y demostrar que $\left(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B}\ \boldsymbol{C}\right)^{t} = \boldsymbol{C}^{t}\ \boldsymbol{B}^{t}\ \boldsymbol{A}^{t}$. En el ejemplo resuelto N.- 16 se consideró ya demostradas estas propiedades.

Ejercicio N.- 11

Demostrar que la matriz de rigidez de una estructura es simétrica de dos formas. La primera por medio de la teoría de estructuras y la segunda con álgebra lineal, probando que $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}^{t}$.

Ejercicio N.- 12

Elaborar un diagrama de flujo que permita obtener la matriz de rigidez de un pórtico plano cuyos elementos se consideran totalmente flexibles, siendo dato la matriz de compatibilidad de deformaciones $\boldsymbol{A}$

CAPITULO 11

EL MÉTODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS

RESUMEN

Se presenta la solución manual de pórticos planos y armaduras planas por el Método de los Desplazamientos, en forma matricial. Por otra parte con el propósito de que el lector siga paso a paso los cálculos efectuados se presentan algunos comandos del programa CAL que complementan a lo estudiado en el apartado 10.6.

La solución del sistema de ecuaciones lineales es un aspecto muy importante a considerar en el Método de los Desplazamientos razón por la cual en éste capítulo se presenta en forma detenida su teoría, diagramas de flujo y tres programas de computación uno para ecuaciones asimétricas, otro para simétricas trabajando únicamente con arreglos de una dimensión y otro para ecuaciones simétricas con ancho de banda constante.

11. 1 CONSIDERACIONES GENERALES

11.1.1 Reseña Histórica

En 1954, Turner, Clough, Martin y Topp presentaron el Método de los Desplazamientos, también conocido como Método de las Rigideces pero no fue utilizado por cuanto en esa época el desarrollo informático era incipiente. La teoría general por ellos formulada dio origen a una serie de algoritmos para resolver estructuras con una simple regla de cálculo que era lo que se disponía por aquella época.

En el Ecuador en los años 1970 y 1980 se contaba con grandes computadores con muy poca capacidad de memoria en los cuales cada línea de instrucción se perforaba en una tarjeta de 80 caracteres, de tal manera que un simple programa era escrito en un paquete de unas 50 o 100 tarjetas las mismas que debían ser entregadas al operador del sistema para su procesamiento. Con ésta limitación no quedaba otra alternativa que usar algoritmos aproximados para resolver las estructuras en lugar de aplicar el Método de los Desplazamientos que estaba orientado al uso del ordenador.

Uno de esos algoritmos fue el Método de las Rigideces Sucesivas desarrollado por el Ing. Alejandro Segovia Gallegos con el cual se podía resolver pórticos planos con una regla de cálculo y los resultados obtenidos eran muy satisfactorios. Este Método fue muy utilizado no solo en el Ecuador sino en otros Países como Venezuela.

Entre 1980 y 1985 empieza el gran desarrollo informático, se suprime la entrada de datos por tarjetas, ahora los programas se graban en casetes y los computadores se conectan a un televisor. Realmente fue un gran avance en comparación con la forma con que se trabajaba antes, ahora es posible tener un ordenador en casa aunque sea muy primitivo con relación a los que se cuentan en el siglo XXI. Este avance informático obliga a incluir en las materias de Ingeniería Civil la cátedra de "Análisis Matricial de Estructuras" puesto que ya se vislumbraba que la Informática tendría gran desarrollo.

En la Escuela Politécnica del Ejército en 1982 se incluye la materia de "Análisis Matricial de Estructuras" en la carrera de Ingeniería Civil. En otras Universidades Ecuatorianas fue incluida años antes o años después lo cierto es que ya era factible pensar en programar una estructura en el computador.

Entre 1985 y 1995 hay un gran avance tecnológico en los computadores personales los famosos PC. Se cuenta con computadores con gran capacidad de memoria en los cuales uno ya no tiene que estar pensando en resolver grandes sistemas de ecuaciones lineales por bloques debido a que no se tenía suficiente memoria en el ordenador. Se cuenta con computadores muy rápidos en los cuales ya no importa mucho el número de operaciones que se realicen porque las máquinas son muy rápidas.

A partir de 1995 continúa en forma vertiginosa el desarrollo informático de las PC cada vez son más poderosas. A fines del siglo XX las Pentium III son toda una sensación y dos años después pasan a ser obsoletas porque ya se tienen las Pentium IV. A partir de 1995 también se da el gran desarrollo de los computadores personales, cada año aparecen nuevas máquinas más pequeñas y por ende más livianas pero con mayor capacidad de memoria y rapidez de ejecución.

Todo éste desarrollo informático llevó a que la materia de Análisis Matricial de Estructuras sea una de las más importantes, a que el Método de los Desplazamientos sea estudiado con más detenimiento toda vez que permite programar la solución de estructuras en forma sencilla, empleando matrices.

El gran desarrollo informático no solo se tiene en los ordenadores también se tiene en los programas de computación. Por ejemplo antes de 1980 no se conocía el MATLAB, ahora es muy utilizado ya que permite programar con bastante facilidad. Por cierto el capítulo 14 de éste libro está dedicado a la programación de pórticos planos utilizando MATLAB.

Sin embargo de ello existe un lenguaje de computación que no ha pasado de moda y ese es el Fortran, se lo utilizaba antes de 1970 y todavía se lo sigue utilizando basta indicar que programas muy sofisticados para Análisis Lineal y no Lineal de Estructuras como el Ruaumoko desarrollado en la Universidad de Canterbury en Nueva Zelanda en el 2000 fue programado en Fortran. Algo similar se puede decir con otros programas muy famosos como el programa IDARC para evaluar daño sísmico en estructuras y que es desarrollado en los Estados Unidos. De tal manera que el Fortran sigue vigente razón por la cual los programas que se presentan en éste capítulo están desarrollados en dicho lenguaje.

11.1.2 Ideas generales del método

Para elaborar los diagramas de corte, momento y carga axial de un pórtico plano, por ejemplo, es necesario conocer el vector de coordenadas $\boldsymbol{q}$ y para ello se debe resolver la ecuación básica de estructuras, definida de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{K}\ \boldsymbol{q} \qquad (11.1)$$

donde $\boldsymbol{Q}$ es el vector de cargas generalizadas, estudiado en el capítulo IV; $\boldsymbol{K}$ es la matriz de rigidez de la estructura estudiado en los últimos capítulos.

La ecuación (11.1) representa la solución de un sistema de ecuaciones lineales donde el vector $\boldsymbol{Q}$ es el término independiente, la matriz $\boldsymbol{K}$ es la matriz de coeficientes y el vector $\boldsymbol{q}$ es el vector de las incógnitas.

Al resolver una estructura en el computador la solución del sistema de ecuaciones es lo que más tiempo de máquina demanda, aproximadamente del 50% al 80% del tiempo total. Por lo tanto es indispensable que el lector al programar el método utilice el algoritmo más adecuado para resolver ecuaciones tomado en consideración que la ecuación (11.1) es un conjunto de ecuaciones simétricas y bandeadas. La verdad es que con las computadoras tan rápidas con que se cuenta actualmente ya no es tan importante buscar el algoritmo más idóneo.

Con el Método de los Desplazamientos se analizan estructuras formadas por barras que pueden ser lineales o especiales (subestructuras). Por otra parte se puede resolver medios continuos por elementos finitos usando éste método. En éste último caso la solución del sistema de ecuaciones tiene más importancia toda vez que el número de ecuaciones a resolver estará de acuerdo con el grado de exactitud deseado en la solución. En efecto para un tipo de elemento dado la convergencia a la respuesta exacta se garantiza refinando la malla usada en el modelo y esto implica un mayor número de ecuaciones.

11.1.3 Comentarios del método

En base a lo anotado en los párrafos anteriores se debe manifestar lo siguiente:

i) El Método de los Desplazamientos no es un método nuevo de cálculo fue desarrollado en 1954 pero que gracias al gran desarrollo informático de los últimos 20 años ha tenido gran actualidad.

ii) Es un Método orientado a resolver estructuras usando el computador. Sin embargo en el presente capítulo y en algunos restantes los cálculos se harán a mano, esto con el propósito de que el lector tenga un conocimiento profundo del mismo para que posteriormente elabore sus propios programas o use en forma eficiente programas ya elaborados.

iii) En éste libro se resuelven por éste método estructuras que tienen elementos lineales únicamente. Sin embargo el lector debe conocer que se pueden resolver estructuras compuestas por elementos que son subestructuras usando el método de los desplazamientos.

iv) Problemas continuos, por ejemplo una Presa, pueden ser resueltos empleando el Método de los Desplazamientos, para esto se debe discretizar el dominio en un número finito de elementos. A ésta técnica se la conoce con el nombre de Elementos Finitos.

v) El lector debe escoger el método más apropiado para la solución del sistema de ecuaciones que permite calcular el vector $\boldsymbol{q}$. Es recomendable que en ciertos problemas se vea la forma de disminuir el ancho de banda de la matriz de rigidez de la estructura numerando en forma adecuada los nudos y por ende los grados de libertad.

vi) Si el problema amerita se puede emplear la técnica del Skyline para la solución del sistema de ecuaciones. Esta técnica se presentará en el capítulo.

vii) En general para resolver una estructura existen dos métodos que son: el Método de las Fuerzas y el Método de los Desplazamientos. Siendo éste último el que se analiza en éste capítulo.

viii) En el Análisis No Lineal Estático y Dinámico se presenta la solución de la ecuación (11.1) de tal manera que es importante su estudio.

11.2 SISTEMAS CINEMATICAMENTE DETERMINADOS

11.2.1 Indeterminación estática y cinemática

Para una estructura hay dos tipos de indeterminación que deben ser considerados en el análisis estructural, dependiendo de lo que se ha fijado como incógnita. Cuando las acciones o cargas son las incógnitas como sucede en el Método de las Fuerzas se debe tener en cuenta la Indeterminación Estática. Ahora cuando los desplazamientos y giros son las incógnitas como sucede en el Método de los Desplazamientos se habla de Sistemas Cinemáticamente Determinados o Indeterminados.

Por estar estudiando el Método de los Desplazamientos, se debe explicar en primer lugar que es un Sistema Cinemáticamente Determinado y que es un Sistema Cinemáticamente Indeterminado. De ésta manera se deja la Indeterminación Estática para cuando se analice el Método de las Fuerzas.

11.2.2 Definición de la matriz A

En el capítulo IX se indicó que cuando la matriz $\boldsymbol{A}$ se puede determinar utilizando únicamente la geometría se dice que el sistema es "Cinemáticamente Determinado". Esto sirve de base para determinar si un sistema es cinemáticamente determinado o no.

Con el objeto de entender lo expuesto, se analiza la estructura de la figura 11.1. Pórtico plano formado por elementos totalmente flexibles. En las figuras 11.2 y 11.3 se presentan los posibles sistemas de coordenadas $\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{q}$ con los cuales se puede resolver la estructura.

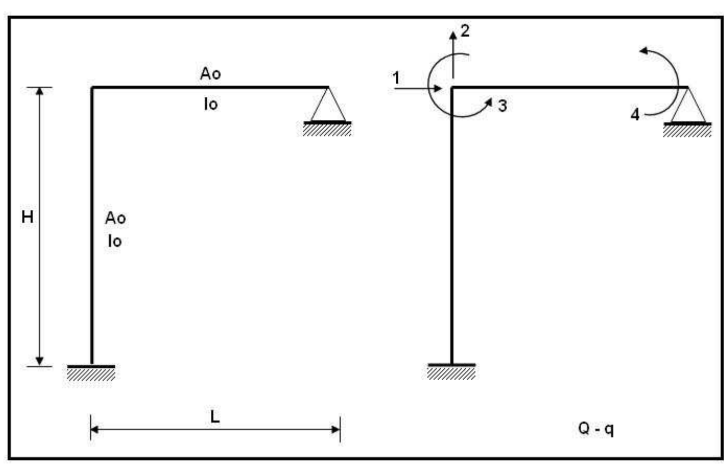


Figura 11.1 **Figura 11.2**

La estructura en estudio tiene cuatro grados de libertad, en consecuencia aparentemente se dice que el sistema $\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{q}$ de la figura 11.2 es correcto y que el sistema $\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{q}$ de la figura 11.3 es incorrecto. Ahora bien cuando se trabaja con el sistema presentado en la figura 11.2 se dice que el sistema es estáticamente determinado ya que la matriz $\boldsymbol{A}$ se puede determinar usando solo la geometría.

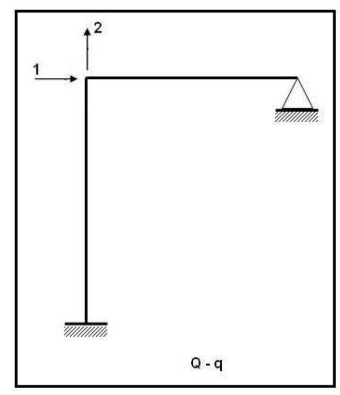


Figura 11.3

En la figura 11.3 se ha considerado dos coordenadas generalizadas menos. En éste caso se dice que el sistema es cinemáticamente indeterminado con dos grados de indeterminación. Aquí la matriz $\boldsymbol{A}$ no se la puede determinar directamente usando solo la geometría de la estructura. Evidentemente que para trabajar con éste sistema de coordenadas deben existir ciertas condiciones por ejemplo que las cargas que actúan en la estructura se encuentren únicamente en la dirección del sistema $\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{q}$ de la figura 11.3. Nótese que los elementos son totalmente flexibles y sin embargo se puede trabajar con el sistema $\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{q}$ de la figura 11.3.

Es importante aclarar éstos conceptos debido a que en éste capítulo solo se trata de resolver estructuras cinemáticamente determinadas.

11.2.3 Procedimiento de solución

La forma como se resuelve una estructura cinemáticamente determinada por el Método de los Desplazamientos ya se lo ha estudiado en los capítulos anteriores, faltando únicamente indicar cual es el procedimiento para resolver un problema completamente. Los pasos a seguir son los siguientes:

1. Seleccionar un sistema $\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{q}$ completo, sin considerar menos grados de libertad y un sistema $\boldsymbol{P}-\boldsymbol{p}$ que sean apropiados.

2. Determinar la matriz $\boldsymbol{A}$ tal que $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{q}$.

3. Calcular la matriz de rigidez de la estructura $\boldsymbol{K}=\sum \boldsymbol{A}^{(i)t}\ \boldsymbol{k}^{(i)}\ \boldsymbol{A}^{(i)}$.

4. Obtener el vector de cargas generalizadas $\boldsymbol{Q}$.

5. Resolver el sistema de ecuaciones $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{K}\ \boldsymbol{q}$ y encontrar el vector que contiene a los desplazamientos y giros $\boldsymbol{q}$.

6. Utilizando la matriz $\boldsymbol{A}$ determinada en el paso 2. y el vector $\boldsymbol{q}$ encontrado en el paso anterior calcular las deformaciones para cada uno de los elementos $\boldsymbol{p}$ para lo cual se multiplica la matriz de compatibilidad de deformaciones por el vector de coordenadas generalizadas: $\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{q}$.

7. Calcular las cargas internas en los elementos $\boldsymbol{P}$ utilizando la relación: $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{k}\ \boldsymbol{p}$. Donde $\boldsymbol{k}$ es la matriz de rigidez del elemento. Hasta aquí se ha resuelto el problema complementario.

8. Para obtener las fuerzas y momentos finales de la estructura, a los valores obtenidos en el paso anterior se debe sumar los correspondientes al problema primario. Por lo tanto la solución total es igual a la solución del Problema Primario más la solución del Problema Complementario.

Se puede apreciar que nada nuevo se ha definido en el presente apartado, hasta el numeral 4. se ha estudiado con bastante detenimiento en los capítulos anteriores. Por consiguiente en los ejercicios que se realicen se colocará cual es el resultado que se obtiene. Sobre la solución del sistema de ecuaciones el lector puede hacerlo utilizando cualquier método que se conozca o utilizando cualquier programa como CAL, MATLAB, etc. Finalmente del paso 6. al paso 8. son únicamente operaciones matriciales las que se deben realizar.

Por ahora se terminar el cálculo con la obtención de los momentos y fuerzas en el nudo inicial y final de un elemento, igualmente solo se calculan los desplazamientos y giros en los nudos, para obtener las ordenadas de la elástica en cualquier punto de un elemento se aplican las funciones de forma estudiadas en el capítulo III.

11.3 SOLUCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES

11.3.1 Método de Gauss

Existen algunos métodos para resolver ecuaciones siendo el más empleado el de Gauss el mismo que se explica en dos etapas mediante la solución de un ejemplo. Previamente se advierte que en cualquier libro de Álgebra Lineal o de Métodos Numéricos el lector puede encontrar un desarrollo elegante de la teoría de éste método. El autor lo que pretende es dar todas las facilidades para que el lector pueda elaborar su propio programa de computación para resolver un sistema de ecuaciones lineales, de ésta forma podrá seguir con la solución completa de una estructura cuando se desarrolla manualmente como en el presente capítulo.

- **EJEMPLO N.- 1**

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales, paso a paso, por el Método de Gauss.

$$8\, X_1 + 2\, X_2 + 3\, X_3 = 42 \qquad \text{Ec (1)}$$

$$2\, X_1 + 10\, X_2 + X_3 = 50 \qquad \text{Ec (2)}$$

$$3\, X_1 + X_2 + 5\, X_3 = 40 \qquad \text{Ec (3)}$$

- **SOLUCIÓN**

Se denomina $\boldsymbol{A}$, a la matriz de los coeficientes de las incógnitas; $\boldsymbol{B}$ el vector que contiene al término independiente y $\boldsymbol{X}$ al vector de las incógnitas. De tal manera que el sistema de ecuaciones se representa de la forma

$$\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$$

Al escribir en forma matricial el sistema de ecuaciones se tiene:

$$\begin{bmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 3 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 \\ 50 \\ 40 \end{bmatrix}$$

Al emplear el Método de Gauss en una primera etapa se debe triangularizar el sistema es decir formar una matriz triangular superior de los coeficientes de las incógnitas, esto se logra de la siguiente forma:

i) Obtener ceros en la primera columna. Para el efecto la primera ecuación se copia tal como ésta y luego se hace la Ec (2) - $\frac{2}{8}$ de Ec (1).

$$\begin{array}{l} 2\ X_1 + 10\ X_2 + \ X_3 = 50 \\ -2\ X_1 - 0.5X_2 - 0.75X_3 = -10.5 \\ \hline 0\ X_1 + 9.5X_2 + 0.25X_3 = 39.5 \end{array}$$

Siendo ésta última la nueva ecuación (2). Ahora se realiza: Ec (3) - $\frac{3}{8}$ Ec (1).

$$\begin{array}{l} 3\ X_1 + \ X_2 + 5\ X_3 = 40.0 \\ -3\ X_1 - 0.75X_2 - 1.125X_3 = -15.75 \\ \hline 0\ X_1 + 0.25X_2 + 3.875X_3 = 24.25 \end{array}$$

ii) En una segunda subetapa se obtienen ceros en la segunda columna del nuevo sistema de ecuaciones que después de la primera subetapa ha quedado de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 0 & 9.5 & 0.25 \\ 0 & 0.25 & 3.875 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 \\ 39.5 \\ 24.25 \end{bmatrix}$$

A partir del término $A(2,2) = 9.5$ se obtendrá un cero en la segunda columna para lo cual se realiza Ec (3) - $\frac{0.25}{9.5}$ Ec (2).

$$\begin{array}{l} 0.25\ X_2 + 3.875\ X_3 = 24.25 \\ -0.25\ X_2 - 0.007\ X_3 = -1.039 \\ \hline 0\ X_2 \quad + 3.868\ X_3 = 23.211 \end{array}$$

Para el ejemplo se ha terminado la etapa de triangularización, el resultado obtenido es:

$$\begin{bmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 0 & 9.5 & 0.25 \\ 0 & 0.0 & 3.868 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 \\ 39.5 \\ 23.211 \end{bmatrix}$$

A continuación se presenta un diagrama de flujo de la primera etapa de triangularización del sistema pero para el caso de que se tengan N ecuaciones lineales.

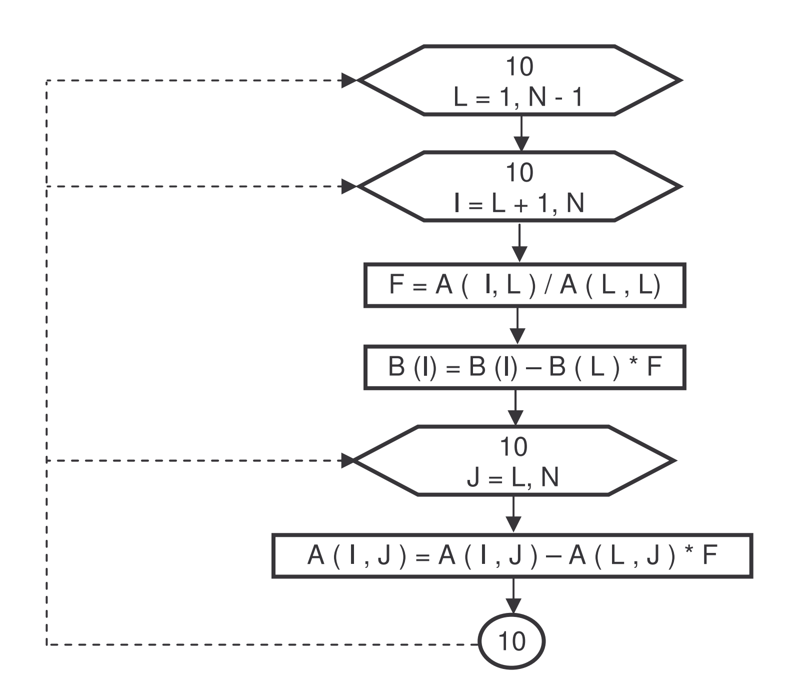


Diagrama de flujo para triangularizar el sistema

La segunda etapa corresponde a la solución del sistema para lo cual se calculan las incógnitas desde abajo hacia arriba, es decir usando la última ecuación se halla X_3

$$X_3 = \frac{23.211}{3.868} = 6$$

El valor de X_3 se sustituye en la ecuación (2) y se obtiene X_2

$$X_2 = \frac{-0.25*6+39.5}{9.5} = 4.0$$

Finalmente se reemplaza X_2 y X_3 en la ecuación (1) para calcular X_1

$$X_1 = \frac{-2*4-3*6+42}{8} = 2.0$$

Por lo tanto la solución del sistema de ecuaciones reporta:

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 2.00 \\ 4.00 \\ 6.00 \end{bmatrix}$$

El diagrama de flujo para la solución propiamente dicha se indica a continuación para el caso general de un sistema de N ecuaciones.

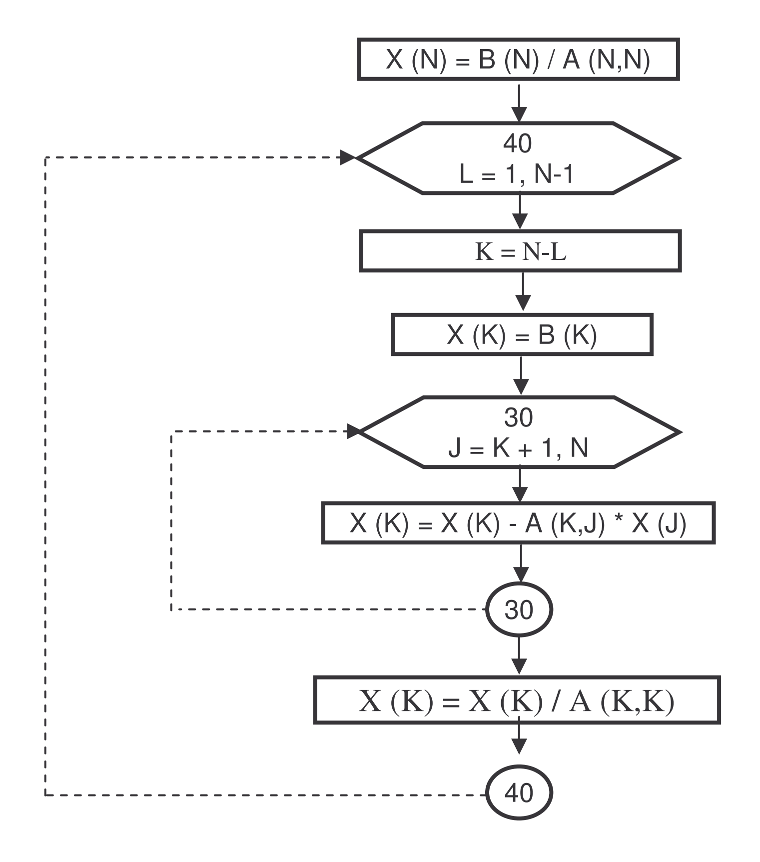


Diagrama de flujo para resolver el sistema triangularizado.

El diagrama de flujo presentado sirve para resolver sistemas de ecuaciones lineales simétricas o asimétricas. Por otra parte si el lector en base a lo expuesto quiere implementar un programa de computación en cualquier lenguaje debe tener en cuenta lo siguiente:

i) Se deben dimensionar los arreglos: $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{N},\boldsymbol{N}), \boldsymbol{B}(\boldsymbol{N}), \boldsymbol{X}(\boldsymbol{N})$ donde N corresponde al número de ecuaciones del sistema que se piensa resolver.

ii) Se debe hacer un programa para la entrada de datos, tanto de la matriz $\boldsymbol{A}$ como el término independiente $\boldsymbol{B}$.

iii) Preparar un programa para imprimir los resultados.

A continuación se presenta un programa en Fortran para resolver un sistema de ecuaciones lineales asimétrico, las dos primeras instrucciones son generales del Fortran. Luego se especifica el nombre del Programa.

La letra C en la primera columna sirve para comentarios, esa instrucción no se ejecuta únicamente sirve para documentar al programa. El programa que se presenta puede resolver máximo 20 ecuaciones, si se tiene un mayor número de ecuaciones se debe cambiar el 20 de la instrucción DIMENSION.

Los datos del programa se leen de un archivo que se denomina: "**DATOS.OUT**", en la primera línea se debe indicar el número de ecuaciones a resolver justificado al casillero 5. En las siguientes líneas se debe indicar los elementos de la matriz $\boldsymbol{A}$ cada fila de datos en una línea y finalmente se indica el término independiente. Por otra parte los resultados del programa se almacenan en un archivo denominado "**RESUL.OUT**".

```
$nofloatcalls
$large
      PROGRAM GAUSS
C*************************************************************************
C*****                                                               *****
C*****       PROGRAMA PARA RESOLVER ECUACIONES LINEALES              *****
C*****                        ASIMETRICAS                            *****
C*****                                                               *****
C*****                  ROBERTO AGUIAR FALCONI                       *****
C*****                       CEINCI ESPE                             *****
C*************************************************************************

      IMPLICIT REAL*8 (A-G,O-Z), CHARACTER*80 (H)
      DIMENSION A(20,20),B(20),X(20)
      OPEN (11, FILE = 'DATOS.OUT', STATUS = 'OLD')
      OPEN (12, FILE = 'RESUL.OUT', STATUS = 'NEW')
C     LECTURA DE DATOS DE ARCHIVO DATOS
      READ (11,1) N
 1    FORMAT (I5)
      DO 5 I=1,N
           READ (11,*) (A(I,J),J=1,N)
 5    CONTINUE
      DO 6 I=1,N
           READ (11,*) B(I)
 6    CONTINUE

C     TRIANGULARIZACION DEL SISTEMA
      DO 10 L=1,N-1
         DO 10 I=L+1,N
            F=A(I,L)/A(L,L)
            B(I)=B(I)-B(L)*F
                DO 10 J=L,N
 10   A(I,J)=A(I,J)-A(L,J)*F

C     SOLUCION PROPIAMENTE DICHA
      X(N)=B(N)/A(N,N)
      WRITE (12,*) X(N)
      DO 40 L=1,N-1
          K=N-L
          X(K)=B(K)
          DO 30 J=K+1,N
 30         X(K)=X(K)-A(K,J)*X(J)
            X(K)=X(K)/A(K,K)
            WRITE (12,*) X(K)
 40   CONTINUE
      END
```

En el archivo “**RESUL.OUT**” se escriben las incógnitas empezando desde el valor de X_n hasta el valor de X_1. Para el ejemplo N.- 1, el archivo **DATOS.OUT** contendrá la siguiente información.

```
3
8   2   3
2   10  1
3   1   5
42
50
40
```

El usuario puede mejorar la entrada de datos. Actualmente hay una serie de programas que sirven para entrada de datos por pantalla en forma muy vistosa con los cuales se crea el archivo de datos que en éste caso se ha denominado **DATOS.OUT.** Por lo tanto se puede usar otro programa como una interfase para que cree el archivo de datos de una manera vistosa. En la forma presentada el usuario debe con cualquier editor crear el archivo **DATOS.OUT**

Para el ejemplo resuelto el archivo **RESUL.OUT** contiene la siguiente información:

6.00
4.00
2.00

Lo importante de todo esto es que el lector vea que elaborar un programa para resolver ecuaciones lineales es muy sencillo, son pocas instrucciones.

Cuando se tienen ecuaciones simétricas no es necesario introducir toda la matriz de coeficientes únicamente se da como datos la matriz triangular superior o la matriz triangular inferior de los coeficientes. Esto es muy sencillo hacerlo basta en la instrucción de lectura de datos cambiar el inicio del lazo de J en lugar de 1 colocar I, como se indica a continuación.

```
READ (11,*) (A(I,J),J=I,N)
```

Además se deberán crear los elementos que no se han leído. Se deja que estos cambios lo haga el lector en el programa indicado en el presente apartado.

11.3.2 Matriz Simétrica

Para el caso de sistemas de ecuaciones lineales simétricas a más de trabajar con la matriz triangular inferior no es necesario trabajar con un arreglo de dos dimensiones para la matriz $\boldsymbol{A}$ sino con un arreglo de una dimensión, para ello se debe renumerar la posición de los elementos. Para explicar lo indicado se analiza a continuación la nomenclatura de una matriz $\boldsymbol{A}$ de 4 x 4 en los dos casos trabajando con un arreglo de dos dimensiones y trabajando con un arreglo de una dimensión.

$$\begin{bmatrix} A(1,1) & A(1,2) & A(1,3) & A(1,4) \\ A(2,1) & A(2,2) & A(2,3) & A(2,4) \\ A(3,1) & A(3,2) & A(3,3) & A(3,4) \\ A(4,1) & A(4,2) & A(4,3) & A(4,4) \end{bmatrix}$$

Matriz $\boldsymbol{A}$ como un arreglo de dos dimensiones

$$\begin{bmatrix} A(1) & A(2) & A(3) & A(4) \\ & A(5) & A(6) & A(7) \\ & & A(8) & A(9) \\ & & & A(10) \end{bmatrix}$$

Matriz $\boldsymbol{A}$ como un arreglo de una dimensión

Para el ejemplo analizado al trabajar con un arreglo de dos dimensiones se necesitan 16 posiciones de memoria para la matriz $\boldsymbol{A}$ en el segundo caso con un arreglo de una dimensión solo se necesitan 10 posiciones de memoria. En general se concluye que para un sistema de N ecuaciones se necesitan N x N posiciones de memoria cuando se trabaja con un arreglo de dos dimensiones y N x (N+1) / 2 para un arreglo de una dimensión.

Sea **N** el orden de la matriz de coeficientes de las incógnitas, **I** el número de fila de un término A(I,J), **J** el número de columna de un término A(I,J). **IJ** es la numeración de la matriz de coeficientes de las incógnitas tratado como un arreglo de una dimensión.

Se define una fórmula que permite identificar la posición de los elementos de la matriz $\boldsymbol{A}$ en un arreglo de una dimensión a partir de la posición que tiene en el arreglo de dos dimensiones de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{IJ} = \frac{(\boldsymbol{I}-1)*(2\boldsymbol{N}-\boldsymbol{I})}{2} + \boldsymbol{J}$$

En el ejemplo 1 se terminó la triangularización del sistema de la siguiente manera.

$$\begin{bmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 0 & 9.5 & 0.25 \\ 0 & 0.0 & 3.868 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 \\ 39.5 \\ 23.211 \end{bmatrix}$$

La variable X_3 se obtiene directamente como $X_3 = 23.211/3.868 = 6.00$ Pero para la variable X_2 habría que proceder de la siguiente forma:

$$9.5\ X_2 + 0.25\ X_3 = 39.5 \qquad \Rightarrow X_2 = \frac{39.5}{9.5} - \frac{0.25}{9.5}$$

En consecuencia todos los términos de la derecha están divididos para 9.5 que es el término de la diagonal. Para el cálculo de X_1 todos los términos de la derecha están divididos para 8.

$$X_1 = \frac{42}{8} - \frac{2}{8}X_2 - \frac{3}{8}X_3$$

Por éste motivo es mejor que la etapa de triangularización no termine en la forma indicada sino que termine así:

$$\begin{bmatrix} 8 & \frac{2}{8} & \frac{3}{8} \\ 0 & 9.5 & \frac{0.25}{9.8} \\ 0 & 0.0 & 3.868 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{42}{8} \\ \frac{39.5}{9.5} \\ 23.211 \end{bmatrix}$$

En el programa **GAUSSIM** que se presenta a continuación, la matriz $\boldsymbol{A}$ termina en la forma indicada en la etapa de triangularización esto se lo consigue con **A(LI)=F**, esto permite calcular directamente las incógnitas, pero el vector $\boldsymbol{B}$ de la etapa de triangularización no está dividido para el término de la diagonal en el programa **GAUSSIM.** Por éste motivo en la etapa denominada *solución propiamente dicha* se tiene la instrucción **X(K)=X(K)/A(KK).**

En el programa **GAUSSIM** se trabaja todo con arreglos de una dimensión de ésta forma se optimiza la cantidad de memoria. Se ha modificado un poco el programa **GAUSS** en lo referente a lo indicado en los párrafos anteriores para optimizar la solución. Nótese que básicamente es el mismo programa que GAUSS con dos salvedades la primera es que se trabaja únicamente con la matriz triangular superior y la segunda es que antes de usar una instrucción en que interviene la matriz $\boldsymbol{A}$ como un arreglo de una dimensión se debe colocar la fórmula de paso de 2 dimensiones a 1 dimensión.

```
$nofloatcalls
$large
      PROGRAM GAUSSIM
C**********************************************************************
C*****                                                            *****
C*****       PROGRAMA PARA RESOLVER ECUACIONES LINEALES           *****
C*****        SIMETRICAS CON ARREGLO EN UNA DIMENSION             *****
C*****                                                            *****
C*****                    ROBERTO AGUIAR FALCONI                  *****
C*****                         CEINCI ESPE                        *****
C**********************************************************************

      IMPLICIT REAL*8 (A-G,O-Z), CHARACTER*80 (H)
      DIMENSION A(210),B(20),X(20)
      OPEN (11, FILE = 'DATOS1.OUT', STATUS = 'OLD')
      OPEN (12, FILE = 'RESUL1.OUT', STATUS = 'NEW')
C     LECTURA DE DATOS DE ARCHIVO DATOS
      READ (11,1) N
 1    FORMAT (I5)
      NTOT=N*(N+1)/2
      DO 5 I=1,NTOT
           READ (11,*) A(I)
 5    CONTINUE
      DO 6 I=1,N
           READ (11,*) B(I)
 6    CONTINUE
C     TRIANGULARIZACION DEL SISTEMA
      DO 12 L=1,N-1
         DO 12 I=L+1,N
            LI=((L-1)*(2*N-L)/2)+I
            LL=((L-1)*(2*N-L)/2)+L
            F=A(LI)/A(LL)
            B(I)=B(I)-B(L)*F
                DO 10 J=I,N
                IJ=((I-1)*(2*N-I)/2)+J
                LJ=((L-1)*(2*N-L)/2)+J
 10   A(IJ)=A(IJ)-A(LJ)*F
      A(LI)=F
 12   CONTINUE
C     SOLUCION PROPIAMENTE DICHA
      X(N)=B(N)/A(NTOT)
      WRITE (12,*) X(N)
      DO 40 L=1,N-1
          K=N-L
          X(K)=B(K)
          KK=((K-1)*(2*N-K)/2)+K
          X(K)=X(K)/A(KK)
          DO 30 J=K+1,N
            KJ=((K-1)*(2*N-K)/2)+J
 30         X(K)=X(K)-A(KJ)*X(J)
            WRITE (12,*) X(K)
 40   CONTINUE
      END
```

En el programa **GAUSSIM** que se ha indicado la matriz $\boldsymbol{A}$ debe indicarse solamente los términos de la matriz triangular superior, un término en cada fila de datos. En el análisis estructural la matriz $\boldsymbol{A}$ corresponde a la matriz de rigidez $\boldsymbol{K}$. En un programa de ordenador se debe calcular $\boldsymbol{K}$ pensando en que algoritmo se va a utilizar en la solución del sistema de ecuaciones. Si se va a emplear un algoritmo similar al programa denominado en libro **GAUSS** se debe programar $\boldsymbol{K}$ con un

arreglo de dos dimensiones pero si se piensa utilizar el programa **GAUSSIM** se debe programar $\boldsymbol{K}$ con un arreglo de una dimensión.

Finalmente en el programa **GAUSSIM** el nombre del archivo de datos se denomina **DATOS1.OUT** y el nombre del archivo de resultados se llama **RESUL1.OUT**. Para el ejemplo 1, los datos de éste archivo son:

3
8
2
3
10
1
5
42
50
40

Nuevamente los resultados se dan desde X_n hasta X_1. En consecuencia el archivo **RESUL1.OUT** para el ejemplo 1 tendrá la siguiente respuesta: 6.00 , 4.00, 2.00 , un dato en cada fila.

11.3.3 Sistema de ecuaciones simétricas bandeadas

La explicación teórica se va a analizar en base al siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$
\begin{aligned}
20\,X_1 + 2\,X_2 + X_3 &= 23 \\
2\,X_1 + 25X_2 + 2\,X_4 &= 29 \\
X_1 + 30X_3 - X_4 + 2\,X_5 &= 32 \\
2\,X_2 - X_3 + 30X_4 + X_5 &= 32 \\
2\,X_3 + X_4 + 18X_5 &= 21
\end{aligned}
$$

Escrito en forma matricial se tiene:

$$
\begin{bmatrix} 20 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 25 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 30 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 30 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 18 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix} 23 \\ 29 \\ 32 \\ 32 \\ 21 \end{bmatrix}
$$

En el ejemplo propuesto. Nótese:

i) La matriz de coeficientes de las incógnitas $\boldsymbol{A}$ es simétrica con respecto a la diagonal principal.

ii) En la primera fila de $\boldsymbol{A}$ el último término diferente de cero en éste caso el 1 se encuentra a tres posiciones de la diagonal principal, incluye en el conteo al término de la diagonal principal.

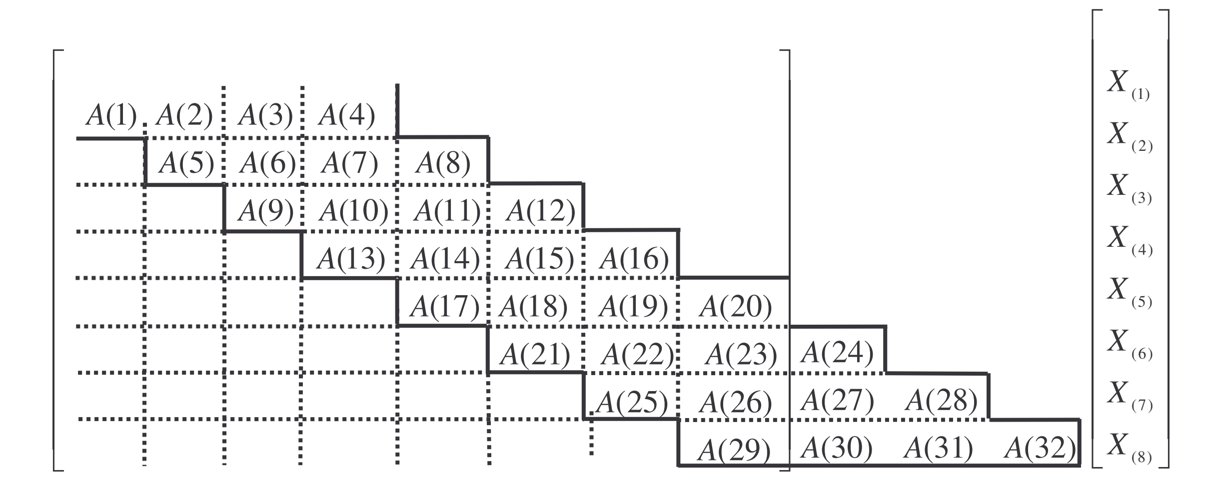
iii) En la segunda y tercera fila de la matriz $\boldsymbol{A}$ el último término diferente de 0 también se encuentra a tres posiciones de la diagonal principal. En la cuarta y quinta fila el último

término diferente de cero se halla a 2 y 1 posición de la diagonal principal respectivamente.

iv) El número de posiciones mayor de cada una de las diferentes filas, al que se encuentra un número diferente de 0 con respecto a la diagonal principal , define el ancho de banda de la matriz $\boldsymbol{A}$. Para el presente caso éste valore es de 3.

v) El ancho de banda de una matriz se lo representa con la letra **KB**.

En éste apartado se presentan ideas generales para resolver ecuaciones lineales con ancho de banda constante y un programa de computación. A continuación se analiza como se numeran los elementos para el caso de tener un sistema de 8 ecuaciones con ancho de banda de 4.



En este punto es importante realizar las siguientes acotaciones:

i) Los términos $A(24), A(27), A(28), A(30), A(31), A(32)$ son nulos, se los crearon para tener un ancho de banda constante.

ii) Para identificar la posición (subíndice) de los elementos de la matriz $\boldsymbol{A}$ se utiliza la siguiente fórmula.

$$\boldsymbol{IJ} = (\boldsymbol{KB} - 1)(\boldsymbol{I} - 1) + \boldsymbol{J}$$

donde $\boldsymbol{I}$ representa el número de la fila y $\boldsymbol{J}$ el número de la columna de la matriz $\boldsymbol{A}$ tratada como un arreglo de dos dimensiones. Por ejemplo en el sistema de 8 ecuaciones el último término se encuentra en la posición $\boldsymbol{I} = 8, \boldsymbol{J} = 8$ al trabajar con un arreglo de una dimensión corresponde al elemento de la posición $\boldsymbol{IJ} = 29$ que se obtiene con la ecuación presentada. $\boldsymbol{IJ} = (4-1)(8-1) + 8 = 29$.

iii) Para el ejemplo si el lector resuelve el sistema con el algoritmo propuesto en el apartado 11.3.1 requerirá 64 posiciones de memoria para la matriz $\boldsymbol{A}$. Si trabaja con el algoritmo indicado en el apartado 11.3.2 necesita 36 posiciones de memoria para definir el mismo arreglo y si trabaja en la forma propuesta en el presente apartado necesita 32 posiciones de memoria. Es decir el considerar en la solución de ecuaciones lineales el ancho de banda constante en una optimización en cuanto a memoria.

iv) Si se calcula un pórtico plano de 10 pisos, por ejemplo, se estará pensando en resolver un sistema de 150 ecuaciones aproximadamente. Aquí se vera con mayor claridad lo

expuesto en el numeral anterior y es indudable que el lector se va a decidir en usar el algoritmo propuesto en el presente subapartado.

```
$nofloatcalls
$large
      PROGRAM GAUSBAN
C***********************************************************************
C*****                                                             *****
C*****         PROGRAMA PARA RESOLVER ECUACIONES LINEALES          *****
C*****           SIMETRICAS CON ANCHO DE BANDA CONSTANTE           *****
C*****                                                             *****
C*****                     ROBERTO AGUIAR FALCONI                  *****
C*****                          CEINCI ESPE                        *****
C***********************************************************************
      IMPLICIT REAL*8 (A-G,O-Z), CHARACTER*80 (H)
      DIMENSION A(210),B(20),X(20)
      OPEN (11, FILE = 'DATOS2.OUT', STATUS = 'OLD')
      OPEN (12, FILE = 'RESUL2.OUT', STATUS = 'NEW')
C     LECTURA DE DATOS DE ARCHIVO DATOS
      READ (11,1) N,KB
 1    FORMAT (2I5)
      NTOT=N*KB
      DO 5 I=1,NTOT
           READ (11,*) A(I)
 5    CONTINUE
      DO 6 I=1,N
           READ (11,*) B(I)
 6    CONTINUE
C     TRIANGULARIZACION DEL SISTEMA
      DO 12 L=1,N
         LL=(KB-1)*(L-1)
         DO 12 I=L+1,L+KB-1
            LI=LL+I
            F=A(LI)/A(LL+L)
                DO 10 J=I,L+KB-1
                IJ=(KB-1)*(I-1)+J
                LJ=(KB-1)*(L-1)+J
 10   A(IJ)=A(IJ)-A(LJ)*F
      A(LI)=F
 12   CONTINUE
      DO 11 L=1,N
           DO 11 I=L+1,L+KB-1
               LI=(KB-1)*(L-1)+I
               B(I)=B(I)-B(L)*A(LI)
 11   CONTINUE
C     SOLUCION PROPIAMENTE DICHA
      DO 20 K=1,N
          L=N+1-K
          LL=(KB-1)*(L-1)+L
          B(L)=B(L)/A(LL)
          DO 20 I=L+1,L+KB-1
              LI=(KB-1)*(L-1)+i
              B(L)=B(L)-A(LI)*B(I)
 20   CONTINUE
      DO 25 I=1,N
           WRITE (12,*) B(I)
 25   CONTINUE
      END
```

El programa **GAUSBAN** que se ha presentado sirve para resolver un sistema de ecuaciones lineales simétrico con ancho de banda constante y trabajando con arreglos de una dimensión. Se han hecho ligeras modificaciones al programa **GAUSSIM** una de ellas es que la modificación del vector $\boldsymbol{B}$ en la etapa de triangularización se lo realiza aparte esto es conveniente hacerlo para cuando se tiene que resolver varios sistemas de ecuaciones en las cuales cambian únicamente los términos independientes.

En el programa **GAUSBAN** los datos deben estar en el archivo **DATOS2.OUT** y los resultados se reportan en el archivo **RESUL2.OUT**. La entrada de datos es como sigue.

- Número de ecuaciones a resolver y el ancho de banda, escritos en las columnas 5 y 10 o justificados a dichas columnas, (formato 2 I5).
- Los datos de la matriz $\boldsymbol{A}$ un dato en cada fila, (formato libre).
- Los datos del término independiente, un dato en cada fila, (formato libre).

Para el ejemplo 1, los datos son los siguientes:

```
    3    3
    8
    2
    3
   10
    1
    0
    5
    0
    0
   42
   50
   40
```

Nótese que en los datos de la matriz de coeficientes se han indicado como 0 a los elementos ficticios que se crean en el algoritmo presentado.

Por otro lado en el programa **GAUSBAN** se escribió el reporte de los resultados desde X_1 hasta X_n en forma contraria a los otros programas.

11.3.4 Otros métodos

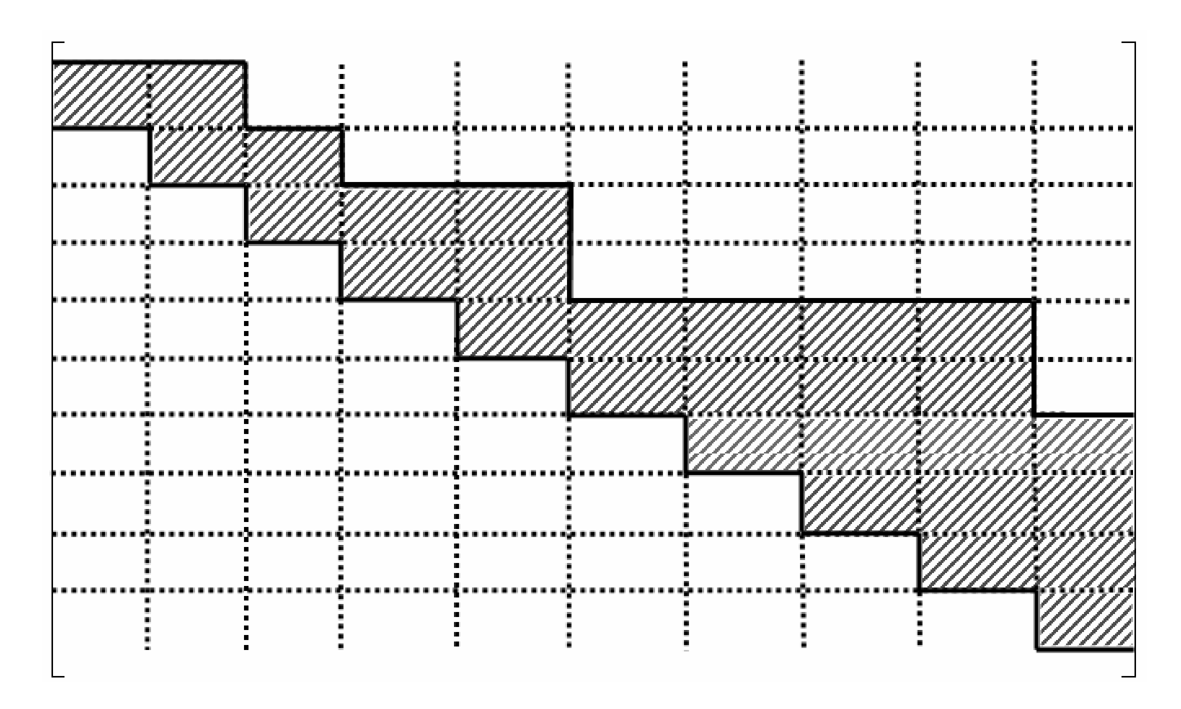
Es importante conocer la forma del sistema de ecuaciones que se va a resolver para así seleccionar el algoritmo más adecuado, optimizando de ésta manera: capacidad de memoria y tiempo de ejecución. Por ejemplo si la matriz de coeficientes de un sistema de 10 ecuaciones tiene la forma que se indica a continuación y además es:

i) Simétrica con respecto a la diagonal principal.

ii) Ancho de banda variable que es el caso más común de solución.

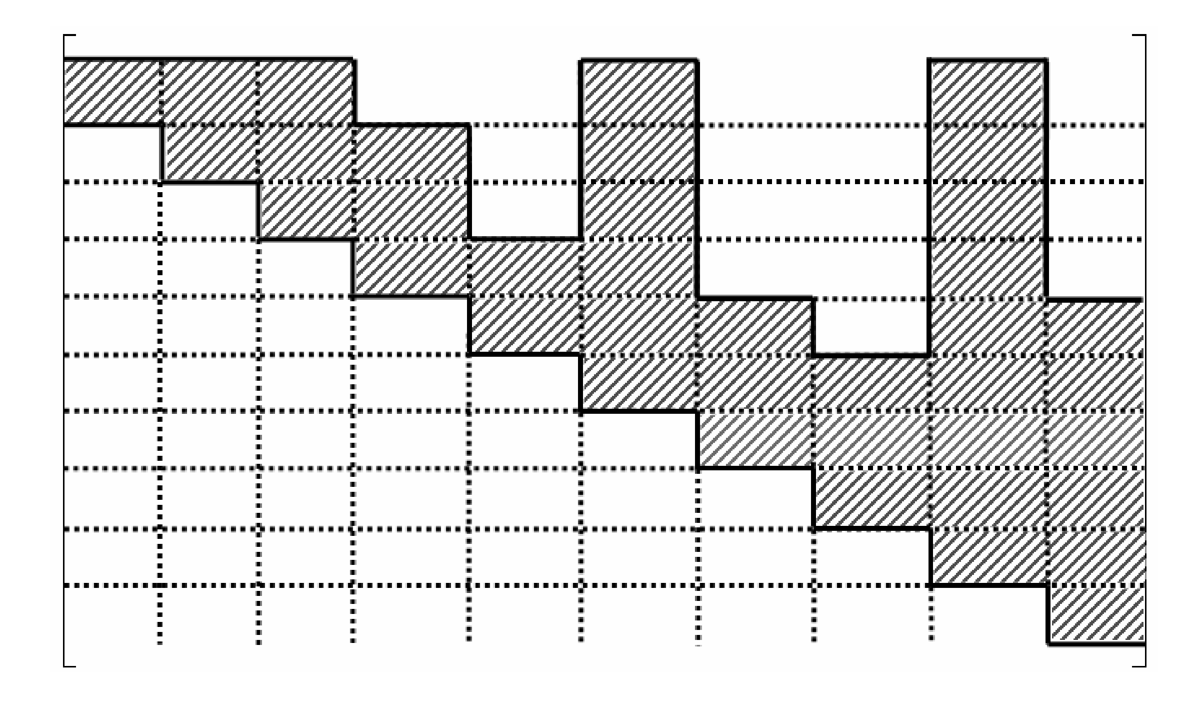
iii) Si el sistema se resuelve empleando el programa **GAUSS** que es para trabajar con toda la matriz se requiere 100 posiciones de memoria para la matriz $\boldsymbol{A}$ de un sistema de 10 ecuaciones. Si se utiliza el programa **GAUSSIM** que es para matrices simétricas se necesitan 55 registros para la matriz $\boldsymbol{A}$. Con el programa **GAUSBAN** se necesitan 50

posiciones de memoria toda vez que el ancho de banda es 5 y con el algoritmo de ancho de banda variable en el cual se han indicado las cantidades diferentes de cero se requieren 28 posiciones de memoria.



iv) Al resolver con ancho de banda variable el usuario debe dar como dato el ancho de banda de cada una de las filas de la matriz A. Por lo tanto el usar este algoritmo supone conocer exactamente la forma del sistema de ecuaciones a resolver.

Se considera otro ejemplo en el cual se tiene también 10 ecuaciones lineales pero la matriz A tiene la siguiente forma



i) Simétrica con respecto a la diagonal.

ii) En los métodos presentados tanto la triangularización como la solución se realizó por filas. Para sistemas de ecuaciones que tienen la forma presentada conviene resolver por columna.

iii) Al resolver el sistema de ecuaciones por columnas los cambios que se deben hacer son mínimos con respecto a los programas presentados.

Es intención del autor dejar planteadas en el lector inquietudes sobre otras formas de solución de un sistema de ecuación por el Método de Gauss para que ampliara sus conocimientos consultando libros especializados de Métodos Numéricos.

Adicionalmente se desea que cuando se resuelve una estructura la elección del sistema de coordenadas generalizadas $\boldsymbol{Q-q}$ se la realice de la forma más óptima, que sepa que al usar un determinado sistema de coordenadas se tendrá una matriz de rigidez con determinado ancho de banda y de determinada forma para que utilice el programa de solución de ecuaciones más adecuado.

Como aclaración debe manifestarse que en el apartado 11.3 se ha utilizado la letra $\boldsymbol{A}$ para representar la matriz de coeficientes de las incógnitas, en lo posterior de éste capítulo la letra $\boldsymbol{A}$ será la matriz de compatibilidad de deformaciones definida de la siguiente manera: $\boldsymbol{p = A\ q}$

11.3.5 Solución de ecuaciones con CAL

CAL permite la solución de ecuaciones simétricas con el comando **SOLVE** de la siguiente manera:

- **SOLVE A B**

El comando SOLVE sirve para resolver sistemas de ecuaciones de la forma $\boldsymbol{A\ X = B}$ Donde $\boldsymbol{A}$ es la matriz de coeficientes de las incógnitas y $\boldsymbol{B}$ el término independiente. La solución del sistema viene en el vector $\boldsymbol{B}$

- **EJEMPLO N.- 2**

Preparar el archivo de datos para usar el programa CAL para el sistema de ecuaciones del ejemplo 1.

- **SOLUCIÓN**

```
B1
LOAD   A   R=3    C=3
8        2        3
2       10        1
3        1        5
LOAD    B   R=3   C=1
42
50
40
SOLVE   A   B
PRINT  B
QUIT
```

CAL no puede resolver sistemas de ecuaciones asimétrico pero **todo sistema asimétrico puede convertirse en simétrico multiplicando por la matriz transpuesta.** Por lo tanto CAL puede resolver cualquier sistema de ecuaciones.

- **EJEMPLO N.- 3**

Preparar el archivo de datos para resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales utilizando CAL.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

- **SOLUCIÓN**

Para que el sistema sea simétrico se multiplica por la izquierda por la matriz A^t

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 29 & 23 \\ 23 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 52 \\ 48 \end{bmatrix}$$

```
B1
LOAD   A   R=2    C=2
2          4
5          3
LOAD   B   R=2    C=1
6
8
TRAN    A     AT
MULT    AT     B     D
MULT    AT     A     C
SOLVE       C     D
PRINT    D
QUIT
```

11.3.6 Otros comandos de CAL

Se presentan algunos comandos de CAL que complementan la lista que se dio en el apartado 10.6 y en el anterior, en lo referente a operaciones con matrices, los mismos que se usarán en éste capítulo.

- **ZERO A R=? C=? T=? D=?**

El comando **ZERO** crea una matriz **A** de R filas y C columnas. Si no se especifica nada más toda la matriz tiene ceros. Si se da un valor a la variable **T** toda la matriz queda asignada con ese valor y finalmente si se asigna un valor a **D**, los elementos de la diagonal de la matriz **A** tienen dicho valor.

❖ **DELETE A**

Con éste comando se borra la matriz A de la memoria del computador.

❖ **DUPSM A B R=? C=? L=L1,L2**

El comando **DUPSM** crea una nueva matriz **B** que tiene R filas y C columnas de la matriz **A**, de tal manera que **B** es una submatriz de **A.** El término B(1,1) corresponde al término A(L1,L2).

❖ **STOSM A B L=L1,L2**

El comando **STOSM** almacena la submatriz **B** en la matriz **A**. El término B(1,1) es localizado en la fila L1 y columna L2 de la matriz A .

11.4 PÓRTICOS PLANOS

11.4.1 Cargas solo en los nudos

Cuando en la estructura solo actúan cargas en los nudos no existe el problema primario. Por lo tanto la solución del problema se reduce a la solución del problema complementario.

- **EJEMPLO N.- 4**

Resolver el pórtico plano mostrado en la figura 11.6 si las columnas son de 30 x 30 cm. y la viga de 20 x 30 cm. Se considera un módulo de elasticidad E=2173706.513 T/m2. Todos los elementos se consideran totalmente flexibles.

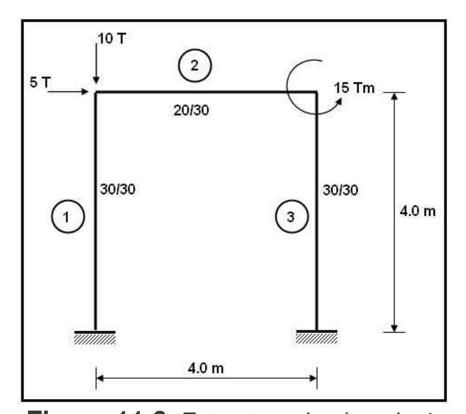


Figura 11.6 Estructura de ejemplo 4.

- **SOLUCIÓN**

El dígito que se encuentra dentro del círculo de la figura 11.6 corresponde a la numeración de los elementos. En la figura 11.7 y 11.8 se presentan los sistemas $Q-q$ y $P-p$ respectivamente.

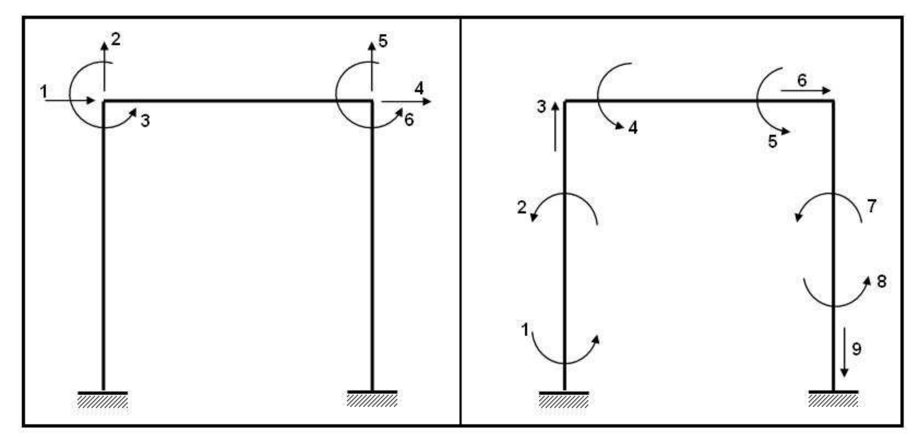


Figura 11.7 Sistema $Q-q$ **Figura 11.8** Sistema $P-p$

Las propiedades geométricas de la estructura se indican en la tabla 11.1

Tabla 11.1 Descripción de los elementos de ejemplo 4.

Elemento	b	h	$A = b\ h$	$I = \frac{b\ h^3}{12}$
	(m)	(m)	(m2)	(m4)
1	0.30	0.30	0.090	0.00068
2	0.20	0.30	0.060	0.00045
3	0.30	0.30	0.090	0.00068

La matriz $\boldsymbol{A}$ definida por la relación $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{A}\ \boldsymbol{q}$ resulta:

$$
\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}
\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{4} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & \frac{1}{4} & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\
0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 1 \\
-1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}
$$

Para el sistema $\boldsymbol{P}-\boldsymbol{p}$ de la figura 11.8, la matriz de rigidez de un elemento en el cual se desprecia el efecto del corte es la siguiente:

$$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}$$

Al reemplazar valores se tiene:

$$\boldsymbol{k}^{(1)} = \boldsymbol{k}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1478.1204 & 739.0602 & 0.000 \\ 739.0602 & 1478.1204 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 48908.3966 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{k}^{(2)} = \begin{bmatrix} 978.1679 & 489.0840 & 0.000 \\ 489.0840 & 978.1679 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 32605.5977 \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez de la estructura $\boldsymbol{K} = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{A}^{(i)t}\, \boldsymbol{k}^{(i)}\, \boldsymbol{A}^{(i)}$ resulta:

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 32882.785 & & & & & \\ 0.000 & 49091.852 & & \textbf{\textit{SIMÉTRICA}} & & \\ 554.296 & 366.813 & 2456.289 & & & \\ -32605.648 & 0.000 & 0.000 & 32882.785 & & \\ 0.000 & -183.407 & -366.814 & 0.000 & 49091.852 & \\ 0.000 & 366.813 & 489.084 & 554.296 & -366.814 & 2456.289 \end{bmatrix}$$

Para las cargas mostradas en la figura 11.6 el vector de cargas generalizadas resulta:

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 5.00 \\ -10.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 15.00 \end{bmatrix}$$

No se ha detallado el cálculo de las matrices $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{K}, \boldsymbol{Q}$ debido a que en los capítulos anteriores se ha tratado cada uno de ellos en forma extensa. En todos los ejercicios que se realicen en el presente apartado se presentarán únicamente resultados.

Para obtener el vector de coordenadas generalizadas $\boldsymbol{q}$ se debe resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{K}\ \boldsymbol{q}$$

De la solución del sistema de ecuaciones se obtiene:

$$
\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} 0.006271 \\ -0.000225 \\ -0.002422 \\ 0.006130 \\ 0.000020 \\ 0.005242 \end{bmatrix}
$$

Ahora se va a calcular las deformaciones $\boldsymbol{p}$ que se producen en los elementos debido a las cargas exteriores para lo cual se multiplica la matriz $\boldsymbol{A}$ por el vector de coordenadas $\boldsymbol{q}$

$$
\boldsymbol{p} = \left[\begin{array}{cccccc}
\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{4} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline\hline
0 & \frac{1}{4} & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\
0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 1 \\
-1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\hline\hline
0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right]
\begin{bmatrix} 0.006271 \\ -0.000225 \\ -0.002422 \\ 0.006130 \\ 0.000020 \\ 0.005242 \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{p} = \left[\begin{array}{c}
0.001568 \\ -0.000854 \\ -0.000225 \\
\hline
-0.002483 \\ 0.005181 \\ -0.000141 \\
\hline
0.006775 \\ 0.001533 \\ 0.000020
\end{array}\right]
$$

Nótese que el vector resultante $\boldsymbol{p}$ está compuesto por subvectores. En efecto las tres primeras cantidades corresponden a las deformaciones del elemento 1, las tres siguientes al elemento 2 y las tres últimas al elemento 3.

Una vez encontradas las deformaciones $\boldsymbol{p}$ se pasa al cálculo de las cargas internas $\boldsymbol{P}$ de cada uno de los elementos multiplicando la matriz de rigidez del miembro $\boldsymbol{k}$ por el vector $\boldsymbol{p}$.

- **Elemento 1**

$$\boldsymbol{P}^{(1)} = \boldsymbol{k}^{(1)}\ \boldsymbol{p}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1478.1204 & 739.0602 & 0.000 \\ 739.0602 & 1478.1204 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 48908.3966 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.001568 \\ -0.000854 \\ -0.000225 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.6865 \\ -0.1035 \\ -11.0044 \end{bmatrix}$$

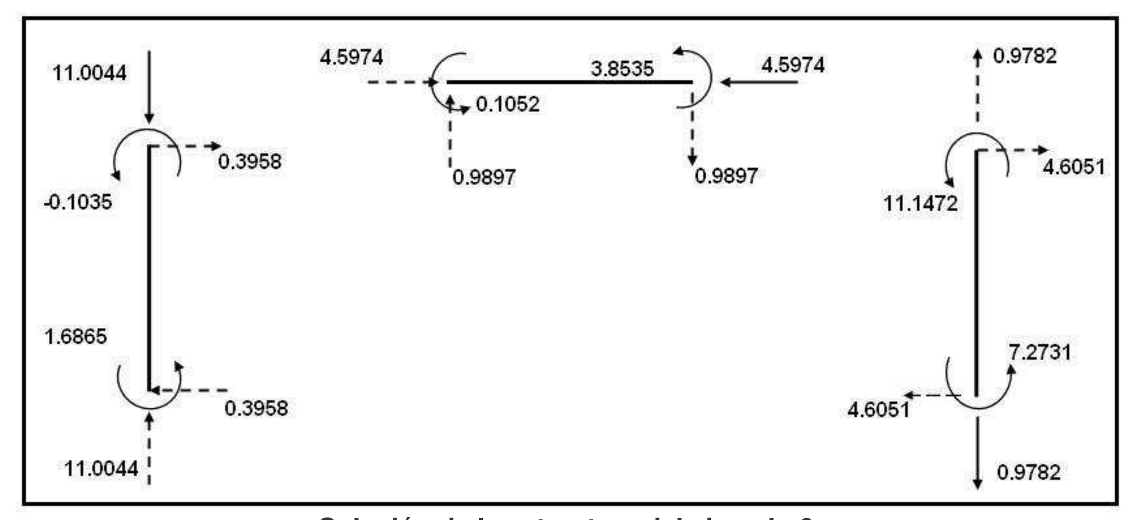
- **Elemento 2**

$$\boldsymbol{P}^{(2)} = \boldsymbol{k}^{(2)}\ \boldsymbol{p}^{(2)} = \begin{bmatrix} 978.1679 & 489.0840 & 0.000 \\ 489.0840 & 978.1679 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 32605.5977 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.002483 \\ 0.005181 \\ -0.000141 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1052 \\ 3.8535 \\ -4.5974 \end{bmatrix}$$

- **Elemento 3**

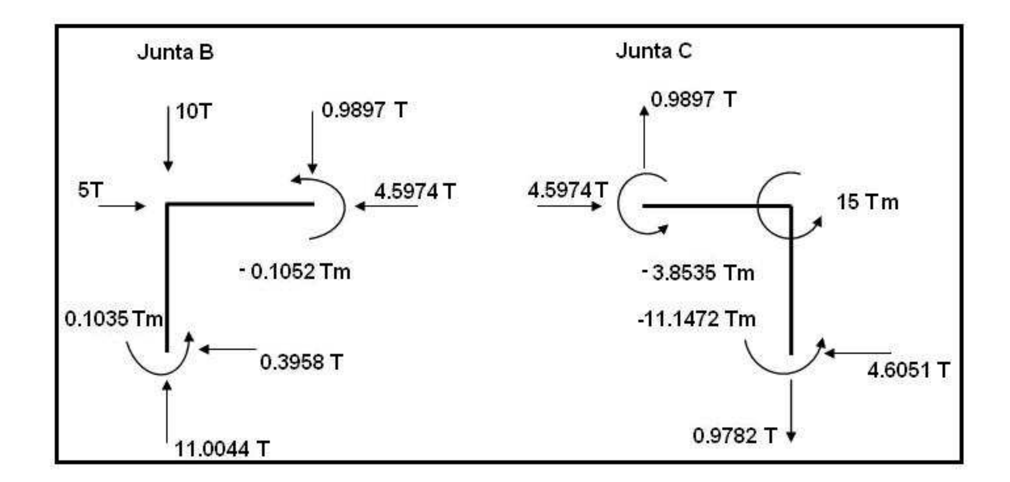
$$\boldsymbol{P}^{(3)} = \boldsymbol{k}^{(3)}\ \boldsymbol{p}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1478.1204 & 739.0602 & 0.000 \\ 739.0602 & 1478.1204 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 48908.3966 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.006775 \\ 0.001533 \\ 0.000020 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.1472 \\ 7.2731 \\ 0.9782 \end{bmatrix}$$

El significado y convención de signos de las cargas internas de los elementos $\boldsymbol{P}$ se indica en la figura 11.8. Con ésta indicación a continuación se indican en líneas continuas los valores encontrados y con líneas entrecortadas los valores de los cortantes y carga axial que se requiere para que exista equilibrio en los elementos.



Solución de la estructura del ejemplo 6.

Las fuerzas indicadas están en Toneladas y los momentos en Toneladas por metro. Como una comprobación del ejercicio realizado se debe verificar que en cada nudo exista equilibrio, como se verá a continuación.



Como se puede apreciar en cada junta o nudo existe equilibrio. Estrictamente no se tiene que $\sum F_X = 0$, $\sum F_Y = 0$ y $\sum M = 0$ por los decimales con que se ha trabajado al resolver con un computador el pequeño error desaparece. Se deja al lector obtener las reacciones exteriores del pórtico.

11.4.2 Cargas en los elementos

- **EJEMPLO N.- 5**

Preparar el archivo de datos para resolver el ejemplo anterior con CAL. Ingresar como datos las matrices A y k de los elementos y el vector de cargas Q .

- **SOLUCIÓN**

```
B1
C MATRIZ DE COMPATIBILIDAD DE LOS ELEMENTOS
LOAD  A1  R=3   C= 6
0.25     0       0       0       0      0
0.25     0       1       0       0      0
0        1       0       0       0      0
LOAD   A2  R=3   C=6
0        0.25    1       0     -0.25    0
0        0.25    0       0     -0.25    1
-1       0       0       1       0      0
LOAD   A3   R=3   C=6
0        0       0       0.25    0      1
0        0       0       0.25    0      0
0        0       0       0       1      0
C MATRIZ  A  COMPLETA
ZERO   A    R=6   C=9
STOSM     A     A1     L=1,1
STOSM     A     A2     L=4,1
STOSM     A     A3     L=7,1
C MATRIZ DE RIGIDEZ DE UN ELEMENTO
LOAD  K1   R=3   C=3
1478.1204    739.0602     0.000
739.0602    1478.1204     0.000
0.000             0.000    48908.3966
DUP  K1  K3
LOAD  K2   R=3   C=3
978.1679     489.0840     0.000
```

```
489.0840      978.1679      0.000
0.000               0.000    32605.5977
C MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA ESTRUCTURA
TMULT    A1    K1    AUX1
MULT     AUX1    A1     S1
TMULT    A2    K2    AUX2
MULT     AUX2    A2     S2
TMULT    A3    K3    AUX3
MULT     AUX3    A3     S3
ADD   S1    S2
ADD   S1    S3
DUP   S1    K
C VECTOR DE CARGAS GENERALIZADAS
LOAD  QT  R=1  C=6
5.00     -10.00     0.00     0.00     0.00    15.00
TRAN     QT     Q
C VECTOR DE COORDENADAS GENERALIZADAS
SOLVE  K   Q
PRINT Q
C DEFORMACIONES DE LOS ELEMENTOS
MULT   A    Q    P
PRINT   P
DUPSM    P    P1    R=3     C=1     L=1,1
DUPSM    P    P2    R=3     C=1     L=4,1
DUPSM    P    P3    R=3     C=1     L=7,1
C CARGAS INTERNAS EN LOS ELEMENTOS
MULT  K1    P1     F1
PRINT   F1
MULT  K2    P2     F2
PRINT   F2
MULT  K3    P3     F3
PRINT   F3
QUIT
```

- **EJEMPLO N.- 6**

En el marco plano de la figura 11.6 actúa la carga uniforme distribuida de magnitud 4.41 T/m sobre el elemento 2 como se indica en la figura 11.9. Resolver este problema considerando el mismo sistema de coordenadas $Q-q$ y $P-p$ del ejemplo 4. En consecuencia la matriz de rigidez de la estructura es la misma debiendo iniciar el cálculo a partir del vector de cargas generalizadas.

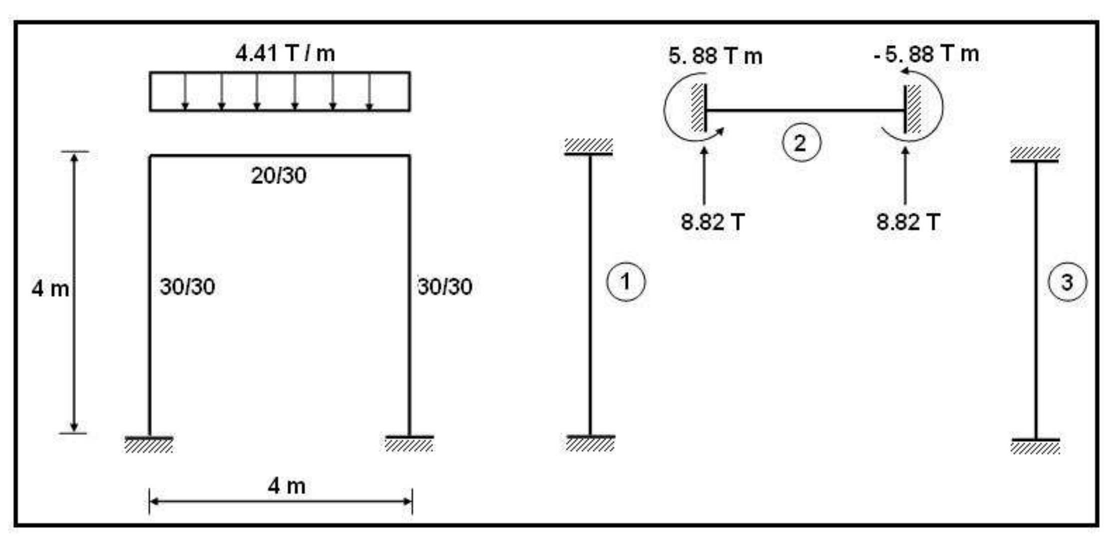


Figura 11.9 **Figura 11.10** Problema Primario

- **SOLUCIÓN**

En éste caso existe problema primario el mismo que se presenta en la figura 11.10. Por lo tanto para calcular las fuerzas y momentos finales habrá que sumar a las cargas del problema complementario las acciones del problema primario.

Los vectores $\boldsymbol{Q}$ de cargas generalizadas y $\boldsymbol{q}$ de coordenadas generalizadas que se obtienen a partir de la ecuación básica de estructuras $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{K}\ \boldsymbol{q}$ resultan.

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 0.000 \\ -8.820 \\ -5.880 \\ 0.000 \\ -8.820 \\ 5.880 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} 0.0000254 \\ -0.0001803 \\ -0.0029962 \\ -0.0000254 \\ -0.0001803 \\ 0.0029962 \end{bmatrix}$$

Para calcular las deformaciones $\boldsymbol{p}$ se realiza: $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{A}\ \boldsymbol{q}$

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{4} & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0000254 \\ -0.0001803 \\ -0.0029962 \\ -0.0000254 \\ -0.0001803 \\ 0.0029962 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00000635 \\ -0.00298985 \\ -0.00018030 \\ \hline -0.00299620 \\ 0.00299620 \\ -0.00005080 \\ \hline 0.00298985 \\ -0.00000635 \\ -0.00018030 \end{bmatrix}$$

- **Elemento 1**

$$\boldsymbol{P}^{(1)} = \boldsymbol{k}^{(1)}\ \boldsymbol{p}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1478.1204 & 739.0602 & 0.000 \\ 739.0602 & 1478.1204 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 48908.3966 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.00000635 \\ -0.00298985 \\ -0.00018030 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.2003 \\ -4.4147 \\ -8.8182 \end{bmatrix}$$

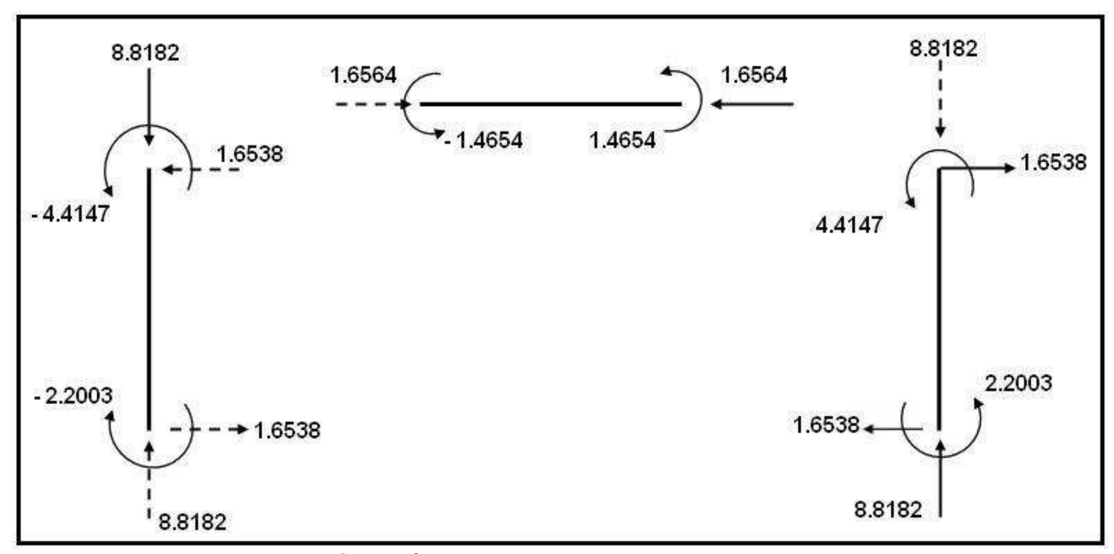
- **Elemento 2**

$$P^{(2)} = k^{(2)}\ p^{(2)} = \begin{bmatrix} 978.1679 & 489.0840 & 0.000 \\ 489.0840 & 978.1679 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 32605.5977 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.00299620 \\ 0.00299620 \\ -0.00005080 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.4654 \\ 1.4654 \\ -1.6564 \end{bmatrix}$$

- **Elemento 3**

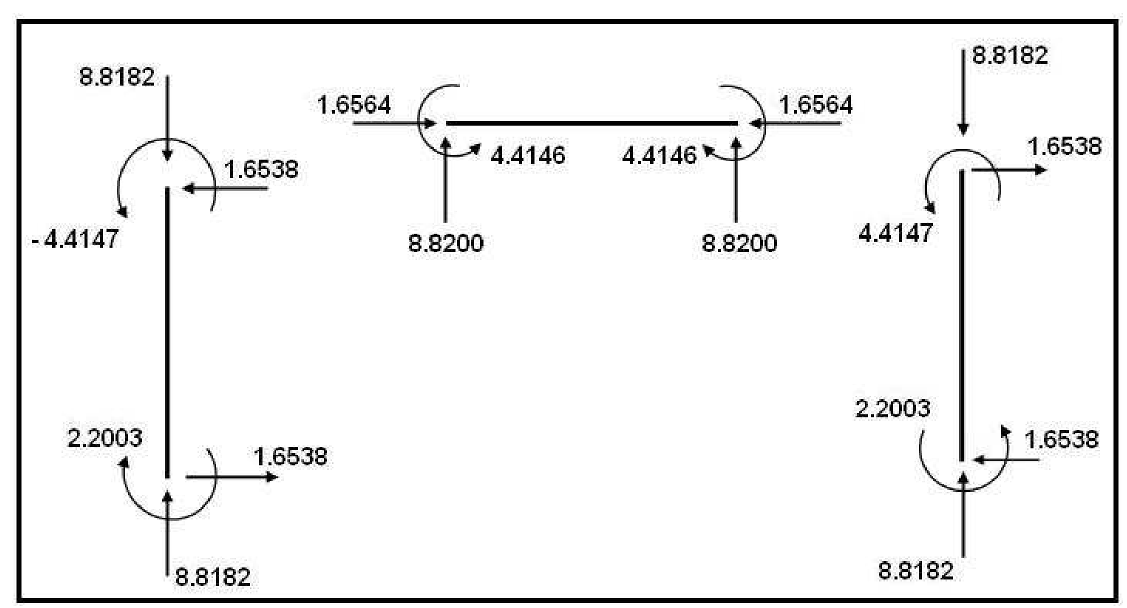
$$P^{(3)} = k^{(3)}\ p^{(3)} = \begin{bmatrix} 1478.1204 & 739.0602 & 0.000 \\ 739.0602 & 1478.1204 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 48908.3966 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.00298985 \\ -0.00000635 \\ -0.00018030 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.4147 \\ 2.2003 \\ -8.8182 \end{bmatrix}$$

Con los valores obtenidos la solución del problema complementario es la siguiente:



Solución del Problema complementario

Al efectuar la suma algebraica del problema primario indicado en la figura 11.10 con la solución del problema complementario que se acaba de indicar se encuentra la solución final.



Solución Final Fuerzas en T. y Momentos en T.m.

11.4.3 Pórticos con elementos axialmente rígidos

Una hipótesis muy común dentro del cálculo estructural es considerar a los elementos de un pórtico plano como si fueran axialmente rígidos $A=\infty$. Esta hipótesis da buenos resultados con edificios de pequeña altura, al trabajar con ésta hipótesis se reduce notablemente el número de grados de libertad.

- **EJEMPLO N.- 7**

Resolver la estructura de la figura 11.9 pero considerando que todos sus elementos son axialmente rígidos. En la figura 11.11 se dibuja nuevamente el pórtico y en las figuras 11.12 y 11.13 los sistemas $\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{q}$ y $\boldsymbol{P}-\boldsymbol{p}$ respectivamente.

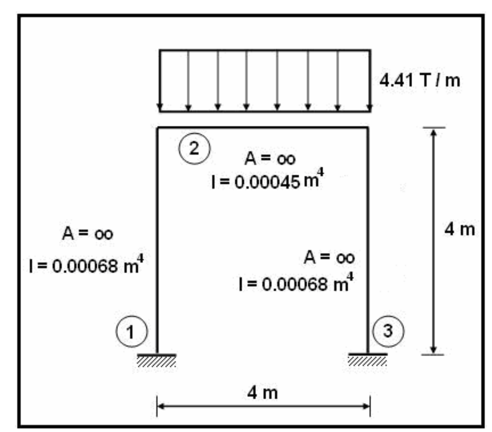


Figura 11.11

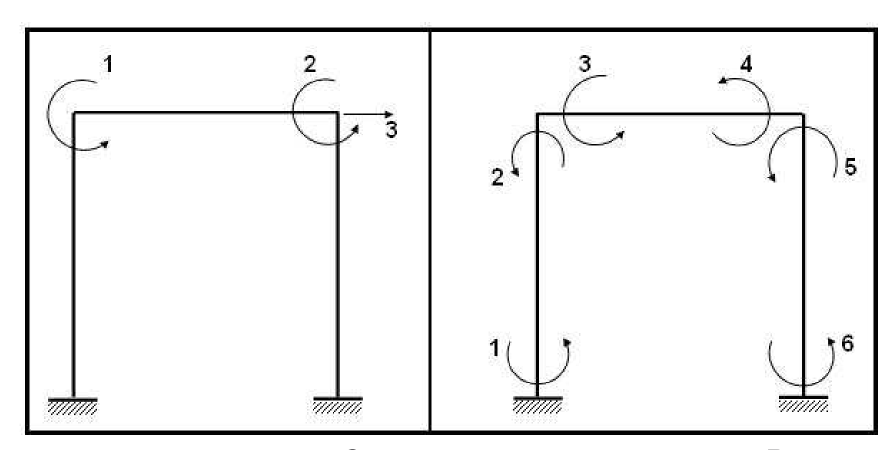


Figura 11.12 Sistema $\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{q}$ **Figura 11.13** Sistema $\boldsymbol{P}-\boldsymbol{p}$

- **SOLUCIÓN**

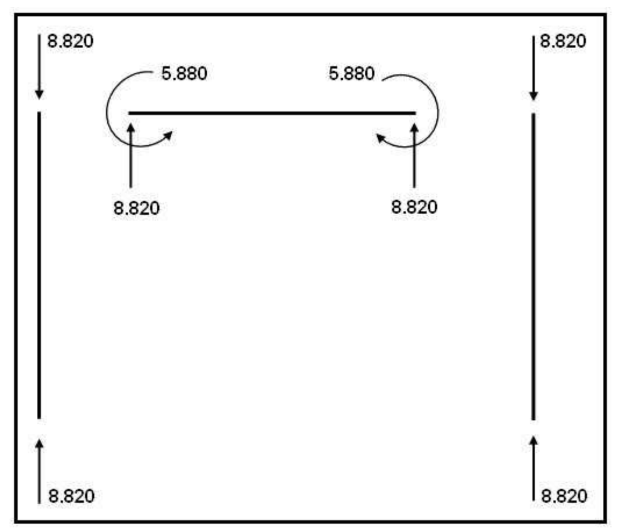
- **Matriz de rigidez de la estructura**

$$
\boldsymbol{K}=\sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{A}^{(i)t}\ \boldsymbol{k}^{(i)}\ \boldsymbol{A}^{(i)}=\begin{bmatrix} 2456.28830 & 489.08400 & 554.29515 \\ 489.08400 & 2456.28830 & 554.29515 \\ 554.29515 & 554.29515 & 554.29515 \end{bmatrix}
$$

- **Vector de cargas generalizadas**

$$Q = \begin{bmatrix} -5.880 \\ 5.880 \\ 0.000 \end{bmatrix}$$

Es importante que el lector preste atención al problema primario de éste ejemplo. Nótese que existen fuerzas axiales en los elementos debido a la condición de que son axialmente rígidos.



Problema Primario

- **Matriz de compatibilidad de deformaciones A tal que $p = A\,q$**

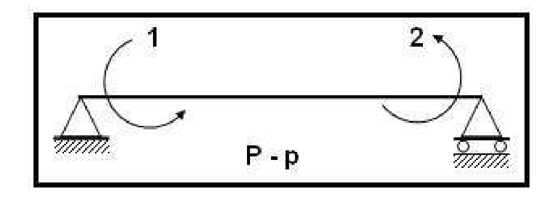
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.25 \\ 1 & 0 & 0.25 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix}$$

- **Matriz de rigidez de elemento**

$$k^{(1)} = k^{(3)} = \begin{bmatrix} 1478.1204 & 739.0602 \\ 739.0602 & 1478.1204 \end{bmatrix}$$

$$k^{(2)} = \begin{bmatrix} 978.1679 & 489.0840 \\ 489.0840 & 978.1679 \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez de un elemento axialmente rígido de sección constante, $\boldsymbol{k}$ en la cual no se considera el efecto de corte es la siguiente asociada al sistema $\boldsymbol{P}-\boldsymbol{p}$ que se indica.



$$\boldsymbol{k}=\begin{bmatrix}\frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L}\\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L}\end{bmatrix}$$

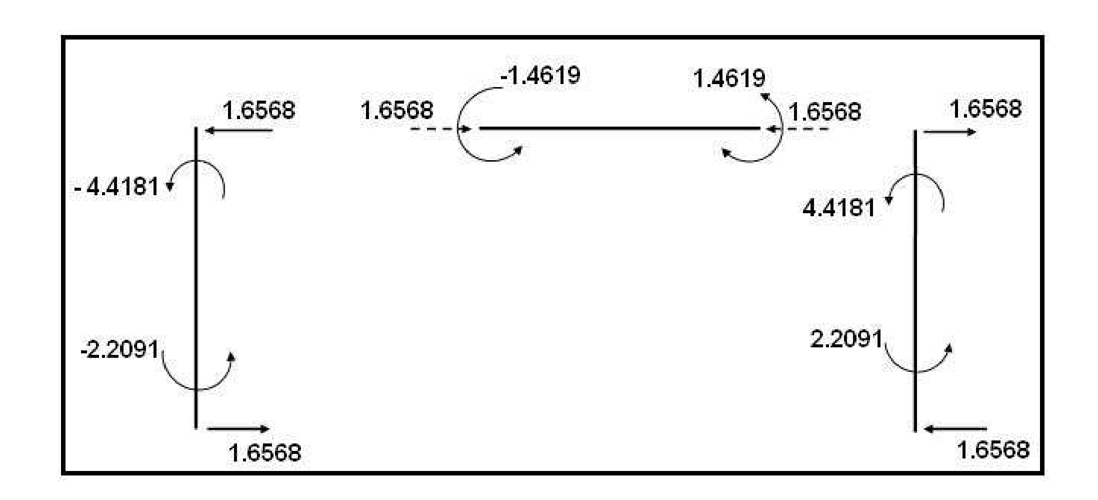
- **Vector $\boldsymbol{q}$ que se obtiene de la solución de ecuaciones $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{K}\ \boldsymbol{q}$**

$$\boldsymbol{q}=\begin{bmatrix}-0.0029890\\ 0.0029890\\ -2.892*10^{-12}\end{bmatrix}$$

- **Deformaciones $\boldsymbol{p}$ y cargas internas $\boldsymbol{P}$**

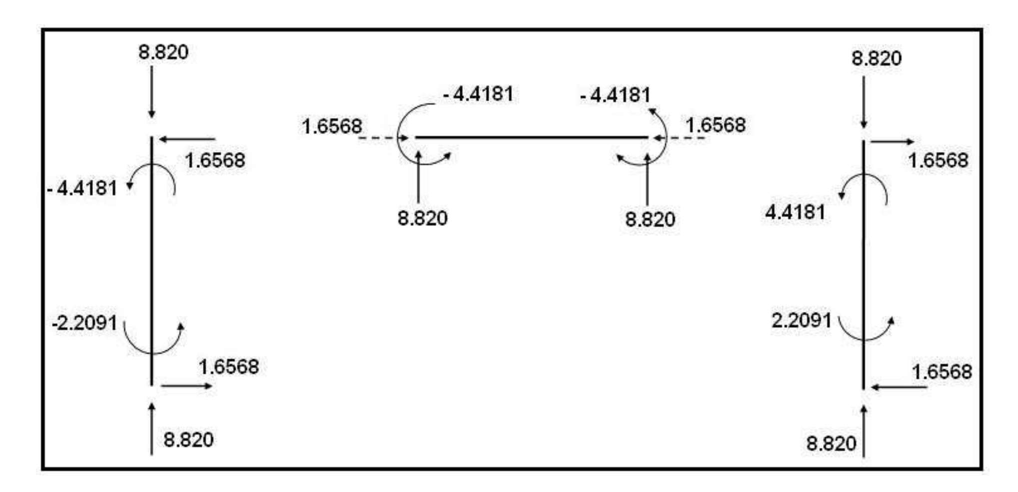
$$\boldsymbol{p}=\begin{bmatrix}-7.232*10^{-13}\\ -0.002989\\ -0.002989\\ 0.002989\\ 0.002989\\ 7.232*10^{-13}\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}-2.2091\\ -4.4181\\ -1.4619\\ 1.4619\\ 4.4181\\ 2.2091\end{bmatrix}$$

- **Solución del Problema Complementario**



Al sumar el Problema Primario al Complementario se tiene la solución Final.

- **Solución Final**



- **Comentarios**

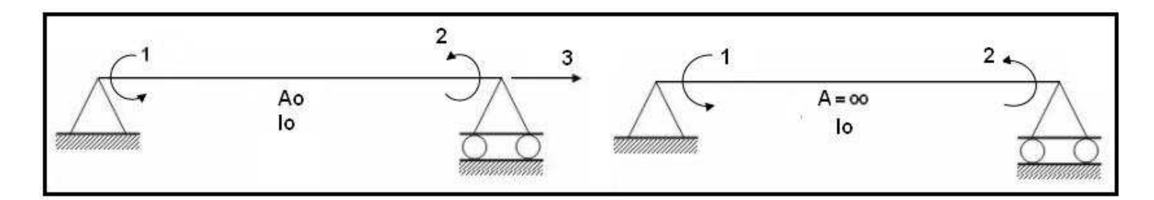
i) Comparar los resultados de éste ejercicio con los del ejemplo anterior.

ii) Antes de sacar conclusiones resolver un pórtico de 10 pisos en las mismas condiciones sometido a cargas verticales únicamente y luego a fuerzas horizontales. Ahora ¿Que conclusiones tiene?

iii) Existen algunos algoritmos que permiten obtener la matriz de rigidez de un pórtico plano en el cual sus elementos son $A=\infty$ sin necesidad de realizar el triple producto matricial.

iv) En forma similar se resuelven marcos planos con elementos transversalmente rígidos pero no todos los elementos se consideran $I=\infty$.

v) En todos los ejemplos realizados en éste numeral se trabajó con el siguiente sistema de coordenadas para los elementos.



11.5 ARMADURAS PLANAS

11.5.1 Cargas en los nudos

La forma más común de calcular una armadura plana es considerar que las cargas gravitan únicamente en los nudos. Es más cuando actúan cargas en los elementos se acostumbra encontrar cargas equivalentes en los nudos.

- **EJEMPLO N.- 8**

Resolver la armadura plana presentada en la figura 11.14 por el Método de los Desplazamientos. En la figura se indica la sección transversal de sus elementos.

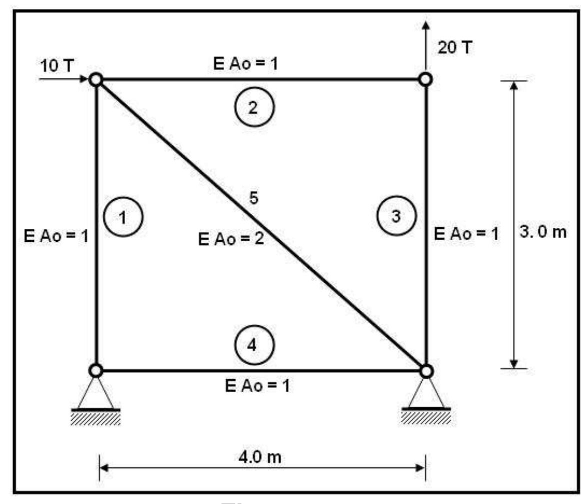


Figura 11.14

- **SOLUCIÓN**

Al igual que en el subapartado anterior todos los conceptos que permiten resolver el problema han sido ya expuestos en capítulos anteriores. Por lo tanto es recomendable que el lector haga primero un repaso. Con esta indicación en las figuras 11.15 y 11.16 se presentan los sistemas $Q-q$ y $P-p$ con los cuales se resuelve el problema.

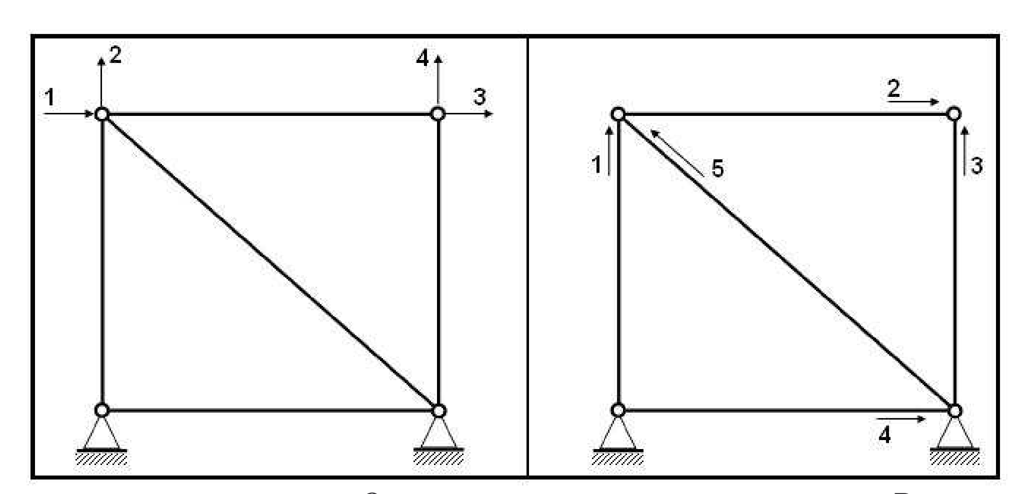


Figura 11.15 Sistema $Q-q$ **Figura 11.16** Sistema $P-p$

- **Rigidez de los elementos**

$$k = \left[\frac{EA}{L}\right]$$

$$k^{(1)} = k^{(3)} = \left[\frac{1}{3}\right]$$

$$k^{(2)} = k^{(4)} = \left[\frac{1}{4}\right]$$

$$k^{(5)} = \left[\frac{2}{5}\right]$$

- **Matriz de compatibilidad A tal que $p = A\ q$**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Matriz de rigidez de la estructura $K = \sum_{i=1}^{5} A^{(i)t}\ k^{(i)}\ A^{(i)}$**

$$K = \begin{bmatrix} 0.506 & & \textit{SIMÉTRICA} & \\ -0.192 & 0.477 & & \\ -0.250 & 0.000 & 0.250 & \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.333 \end{bmatrix}$$

- **Vector de cargas Q**

$$Q = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix}$$

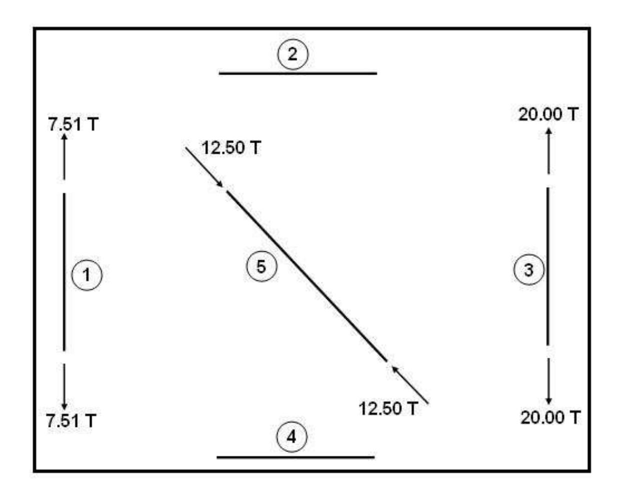
- **Vector de coordenadas q que se obtiene de la solución de $Q = K\ q$**

$$q = \begin{bmatrix} 55.95 \\ 22.52 \\ 55.95 \\ 60.01 \end{bmatrix}$$

- **Deformaciones p que se obtienen multiplicando $A\ q$. Fuerzas Internas $P = k\ p$**

$$p = \begin{bmatrix} 22.520 \\ 0.000 \\ 60.010 \\ 0.000 \\ -31.248 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 7.51 \\ 0.00 \\ 20.00 \\ 0.00 \\ -12.50 \end{bmatrix}$$

- **Resultados Finales**



En todos los problemas resueltos en éste capítulo las cargas $P^{(i)}$ se obtuvieron efectuando el producto en cada elemento de la matriz de rigidez por las deformaciones $P^{(i)} = k^{(i)} p^{(i)}$. Ahora bien se obtiene el mismo resultado multiplicando la matriz de rigidez constituida por las matrices de rigidez de cada uno e los elementos colocados en la diagonal por el vector de deformaciones p. Para el ejemplo analizado se tiene:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 22.520 \\ 0.000 \\ 60.010 \\ 0.000 \\ -31.250 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.51 \\ 0.00 \\ 20.00 \\ 0.00 \\ -12.50 \end{bmatrix}$$

Al generalizar lo expuesto se tiene que las cargas internas P pueden calcularse de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{P}^{(1)} \\ \boldsymbol{P}^{(2)} \\ .... \\ .... \\ \boldsymbol{P}^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{k}^{(1)} & & & \\ & \boldsymbol{k}^{(2)} & & & \\ & & ... & & \\ & & & ... & \\ & & & & \boldsymbol{k}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}^{(1)} \\ \boldsymbol{p}^{(2)} \\ ... \\ ... \\ \boldsymbol{p}^{(n)} \end{bmatrix}$$

11.5.2 Cargas en nudos y miembros

Finalmente se desea ilustrar la forma de solución de una armadura plana que tiene cargas en los elementos y en los nudos.

- **EJEMPLO N.- 9**

Resolver la estructura de la figura 11.17 en la cual se considera que todos los elementos tienen la misma rigidez axial EA .

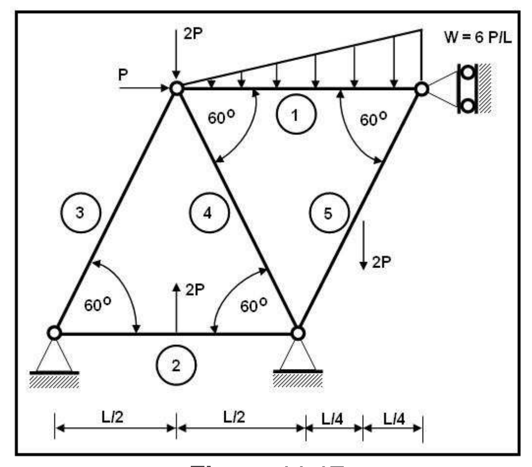


Figura 11.17

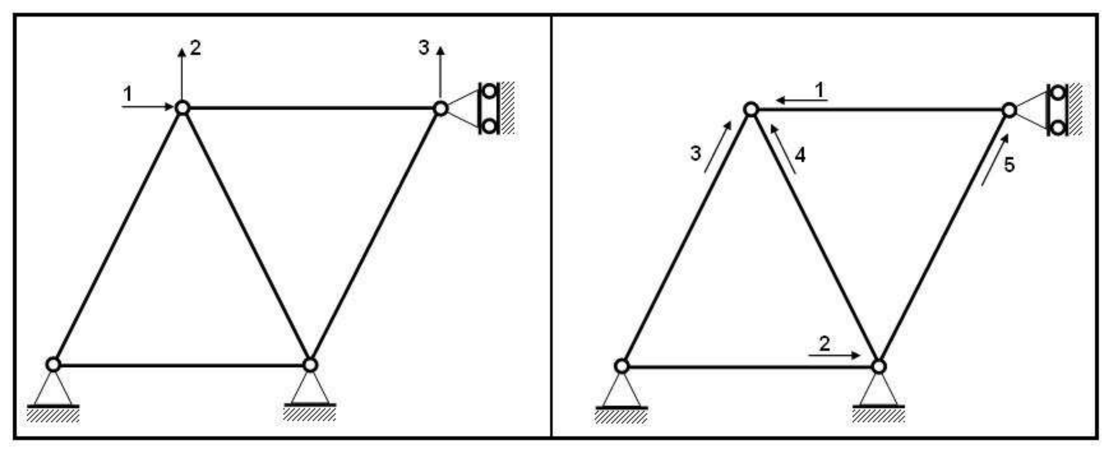


Figura 11.18 Sistema $Q-q$ **Figura 11.19** Sistema $P-p$

- **SOLUCIÓN**

Para los sistemas $\boldsymbol{Q-q}$ y $\boldsymbol{P-p}$ seleccionados en las figuras 11.18 y 11.19 respectivamente, se tiene que la matriz $\boldsymbol{A}$ es:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.500 & 0.866 & 0.000 \\ -0.500 & 0.866 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.866 \end{bmatrix}$$

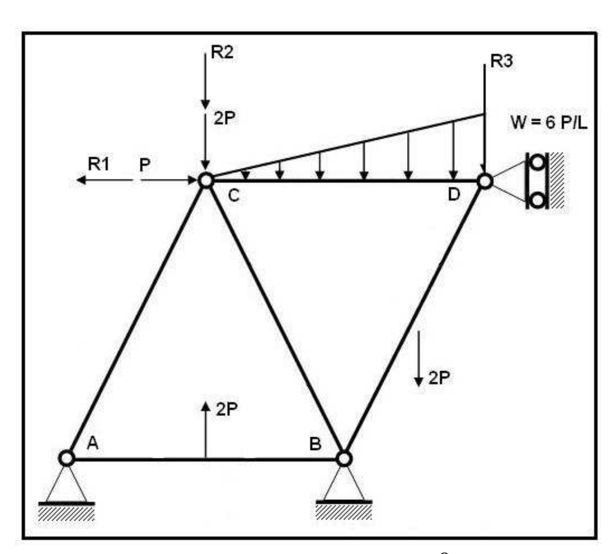
Todos los elementos de la estructura tienen la misma longitud L y rigidez axial EA. Por lo tanto:

$$\boldsymbol{k}^{(1)} = \boldsymbol{k}^{(2)} = \boldsymbol{k}^{(3)} = \boldsymbol{k}^{(4)} = \boldsymbol{k}^{(5)} = \left[\frac{EA}{L}\right]$$

La matriz de rigidez de la estructura $\boldsymbol{K}$ se encuentra de $\boldsymbol{K} = \sum_{i=1}^{5} \boldsymbol{A}^{(i)t}\ \boldsymbol{k}^{(i)}\ \boldsymbol{A}^{(i)}$

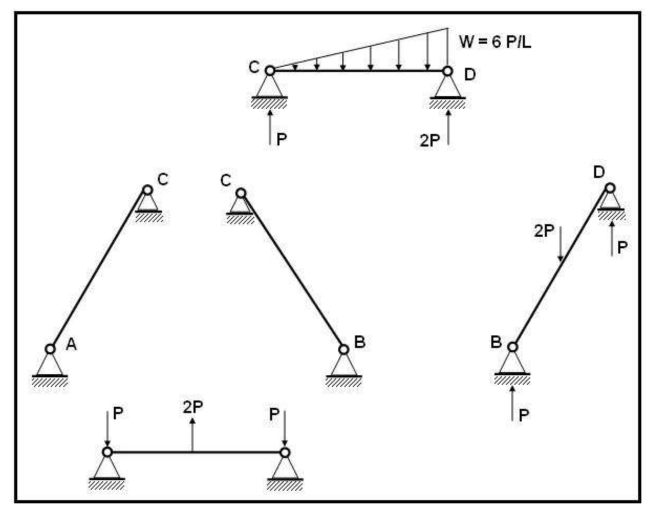
$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 1.50 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 1.50 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.75 \end{bmatrix} \frac{EA}{L}$$

Por definición el problema primario es aquel en el cual actúan todas las cargas y la condición es que el vector de coordenadas sea nulo.



Problema Primario $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$

Se recuerda que las fuerzas de fijación $\boldsymbol{R}$ son consecuencia de la condición $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$ y esto a su vez significa que **cada elemento se encuentra apoyado-apoyado**, hay que poner atención en esto. Ya no está empotrado-empotrado como sucedía en los pórticos planos por lo tanto para el equilibrio de los elementos se tiene:



Problema Primario

Al realizar el equilibrio en cada nudo se obtienen las fuerzas de fijación $\boldsymbol{R}$ y con esto se encuentra el vector de cargas generalizadas $\boldsymbol{Q}$.

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} P \\ -3P \\ -3P \end{bmatrix}$$

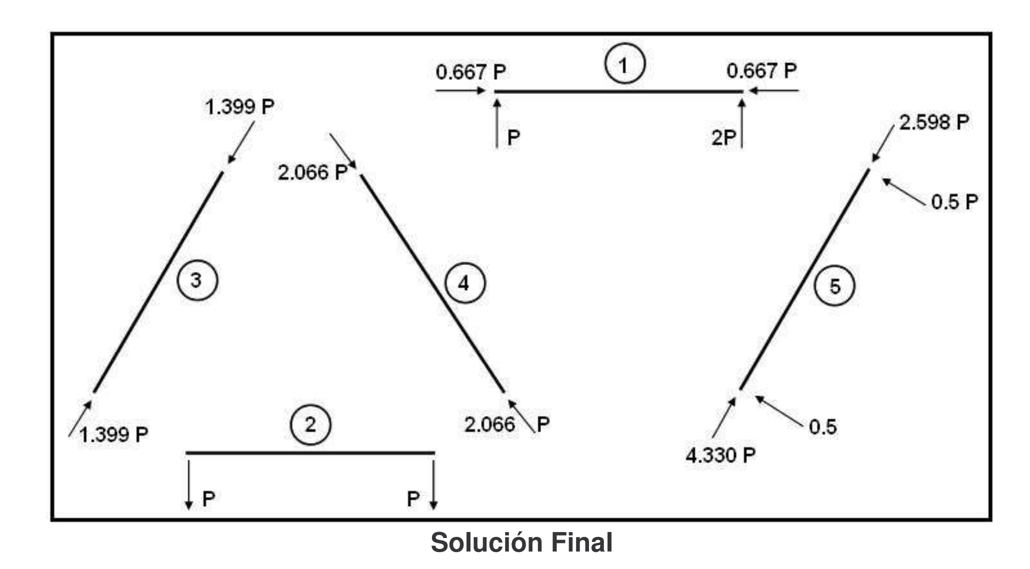
Al resolver el sistema de ecuaciones $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{K}\ \boldsymbol{q}$ se encuentra:

$$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} 0.667 \\ -2.000 \\ -4.000 \end{bmatrix} \frac{PL}{EA}$$

El resto de cálculo ya es conocido, los resultados que se obtienen son:

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} -0.667 \\ 0.000 \\ -1.399 \\ -2.066 \\ -3.464 \end{bmatrix} \frac{PL}{EA} \qquad \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} -0.667 \\ 0.000 \\ -1.399 \\ -2.066 \\ -3.464 \end{bmatrix} P$$

Finalmente la solución final se encuentra sumando el problema primario al complementario. Nótese que en el elemento 5, la reacción del problema primario se ha descompuesto en una fuerza axial y una fuerza transversal cuyos valores son $0.866\,P$ y $0.5\,P$ respectivamente, con esta aclaración será muy fácil para el lector obtener los valores finales que se indican a continuación.

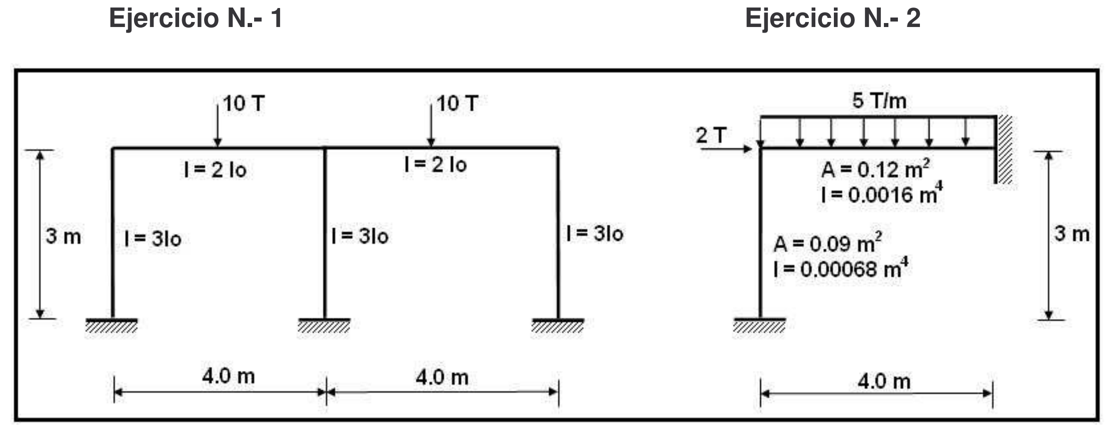


Solución Final

11.6 EJERCICIOS PROPUESTOS

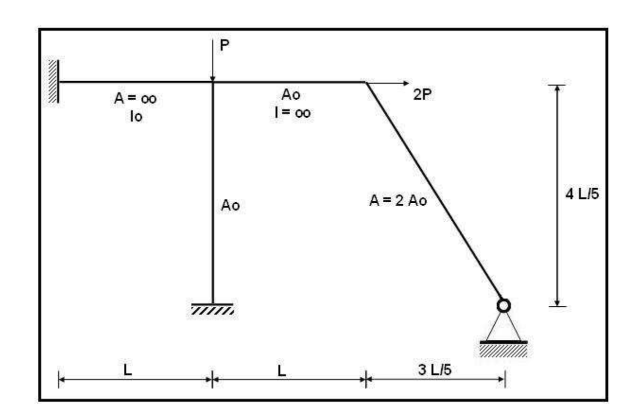
Resolver completamente las siguientes estructuras por el Método de los Desplazamientos.

Ejercicio N.- 1 **Ejercicio N.- 2**



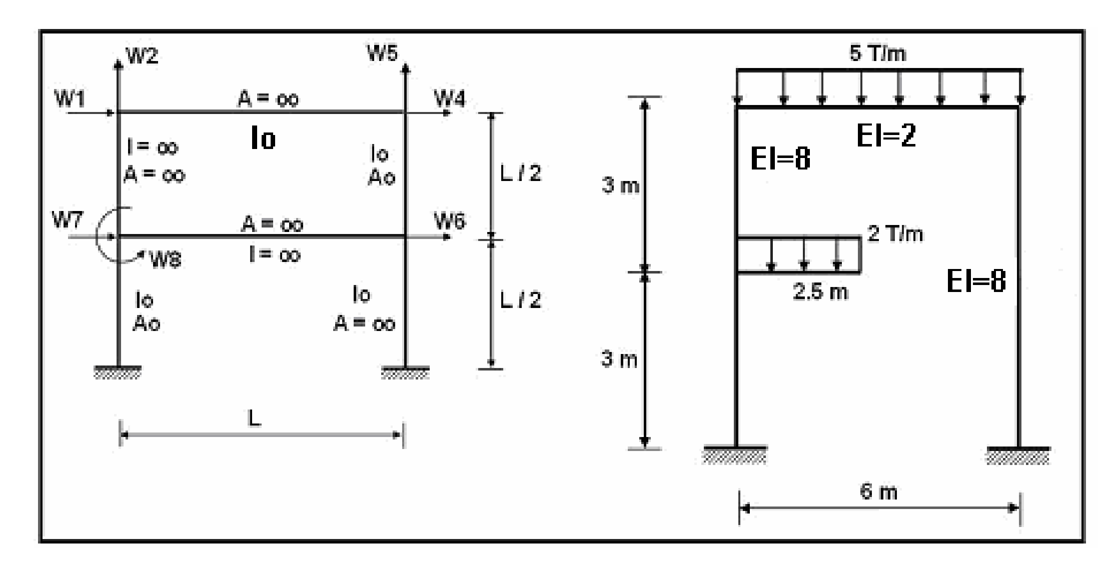
Para todos los elementos $\frac{I}{A_o} = \frac{16}{100}$ $E = 1.$ $E = 2173706.51 \frac{T}{m^2}$

Ejercicio N.- 3



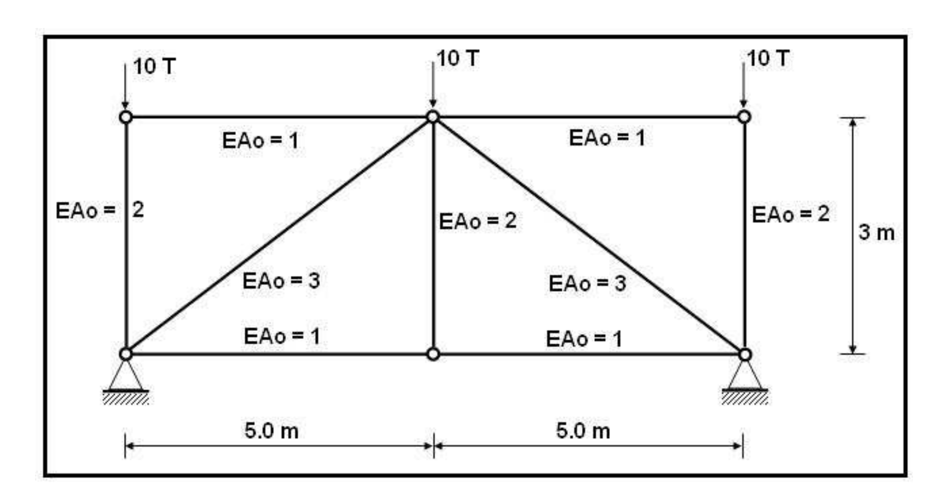
$$\frac{I_o}{A_o L^2} = \frac{1}{100} \qquad E = 1$$

Ejercicio N.- 4 **Ejercicio N.- 5**

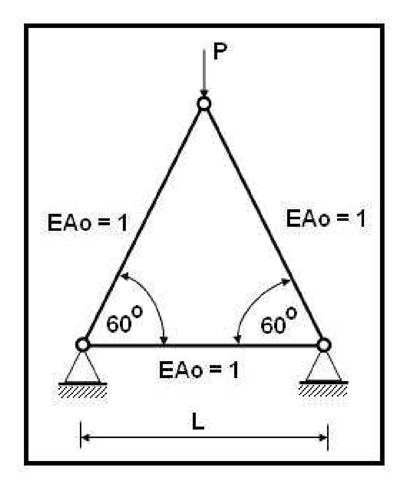


$$\frac{I_o}{A_o L^2} = \frac{1}{100} \qquad E = 1$$

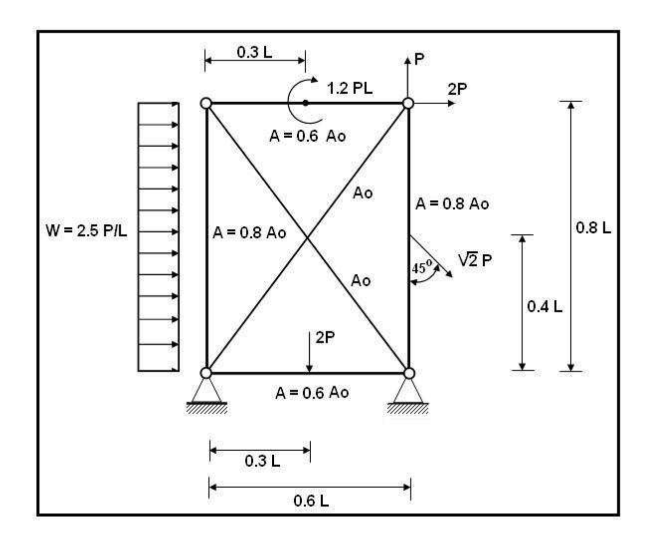
Ejercicio N.- 6



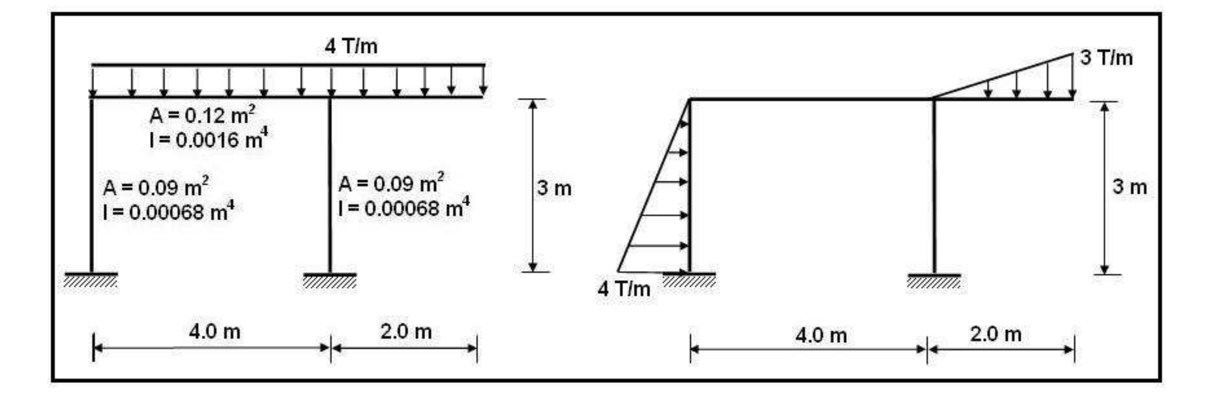
Ejercicio N.- 7



Ejercicio N.- 8



Ejercicio N.- 9 **Ejercicio N.- 10**



El módulo de elasticidad en estos dos ejercicios es $E = 2173706.51\, T/m^2$. Por otra parte para el ejercicio N.- 10 los datos de la estructura son los mismos del ejercicio N.- 9.

CAPITULO 12

MATRIZ DE RIGIDEZ DE UN ELEMENTO ORIENTADO AL USO DEL COMPUTADOR

RESUMEN

Se presenta el cálculo de las matrices de rigidez de un elemento en coordenadas locales y globales para los siguientes modelos numéricos de cálculo:

i) Elemento lineal de un pórtico plano de sección constante sin considerar el efecto de corte y considerando dicho efecto.

ii) Elemento lineal de una armadura plana de sección constante.

iii) Elemento de sección constante o variable de un pórtico plano.

iv) Elemento lineal de un pórtico plano considerando dos sectores de rigidez infinita.

v) Elementos de un pórtico plano con inercia escalonada.

Todo esto orientado al uso del ordenador. Por hacerlo didáctico se presenta el cálculo mediante la transformación de coordenadas. La aplicación de los resultados obtenidos se realiza en el capítulo 13.

12. 1 ELEMENTOS DE SECCIÓN CONSTANTE DE UN PÓRTICO PLANO

12.1.1 Matriz de rigidez de un elemento en coordenadas locales

Al considerar como sistema $\boldsymbol{P}-\boldsymbol{p}$ de un elemento el presentado en la figura 12.1, en donde no se incluyen los desplazamientos como cuerpo rígido. A éste sistema se denomina por didáctica sistema 1, el vector $\boldsymbol{p}$ mide las deformaciones con el siguiente formulario:

$$p_1 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L}$$

$$p_2 = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{L}$$

$$p_3 = u_2 - u_1$$

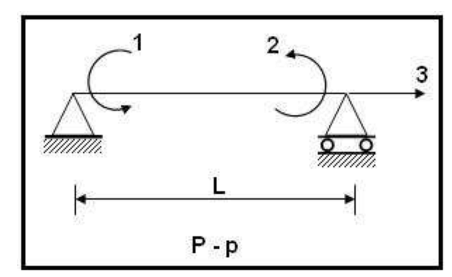


Figura 12.1 Sistema de coordenadas en el sistema 1.

Por otro lado la matriz de rigidez para elementos de sección constante en los cuales no se considera el efecto de corte es:

$$\boldsymbol{k}_1 = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}$$

Como la matriz de rigidez está asociada al sistema 1 se ha colocado el subíndice 1 en dicha matriz. Ahora se quiere calcular la matriz de rigidez para un elemento lineal en el cual se incluyan las deformaciones como cuerpo rígido. Por lo tanto el nuevo sistema $\boldsymbol{P}^* - \boldsymbol{p}^*$ será el indicado en la figura 12.2. Por didáctica se ha colocado el asterisco debido a que se va a calcular la nueva matriz de rigidez por medio de la matriz de transformación de coordenadas $\boldsymbol{T}$.

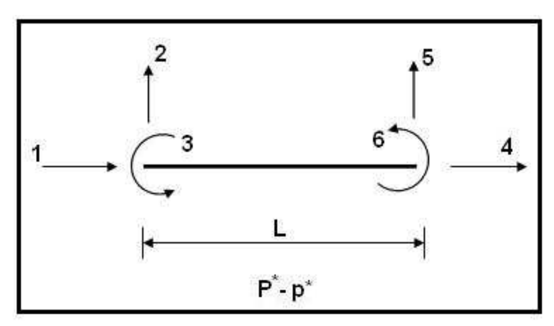


Figura 12.2 Coordenadas locales de un elemento.

Al sistema de coordenadas del elemento de la figura 11.2 se denomina sistema 2 y el significado de cada una de las deformaciones es el siguiente:

- p_1^* es la componente de desplazamiento axial del nudo inicial del elemento.
- p_2^* es la componente de desplazamiento transversal del nudo inicial del elemento.
- p_3^* es la rotación de la elástica en el nudo inicial del elemento.

- p_4^* es la componente de desplazamiento axial del nudo final del elemento.
- p_5^* es la componente de desplazamiento transversal del nudo final del elemento.
- p_6^* es la rotación de la elástica en el nudo final del elemento.

La convención de signos positiva de las deformaciones en el sistema de coordenadas 2 es la que se indica en la figura 12.2. A estas sistema se denomina **Coordenadas Locales.**

Para los elementos del vector de cargas internas $\boldsymbol{P}^*$ se tiene lo siguiente:

- P_1^* es la fuerza longitudinal axial en el nudo inicial del elemento.
- P_2^* es la fuerza transversal en el nudo inicial del elemento.
- P_3^* es el momento a flexión en el nudo inicial del elemento.
- P_4^* es la fuerza longitudinal axial en el nudo final del elemento.
- P_5^* es la fuerza transversal en el nudo final del elemento.
- P_6^* es el momento a flexión en el nudo final del elemento.

Evidentemente la matriz que relaciona las cargas $\boldsymbol{P}^*$ con los desplazamientos $\boldsymbol{p}^*$ es la matriz de rigidez de un elemento $\boldsymbol{k}^*$. En efecto se tiene que:

$$\boldsymbol{P}^* = \boldsymbol{k}^* \ \boldsymbol{p}^*$$

El objetivo de éste subapartado es calcular $\boldsymbol{k}^*$ pero el cálculo se lo va a realizar utilizando lo ya conocido para no empezar de nuevo todo. Para el efecto se determina una matriz de paso de las coordenadas del sistema 1 al sistema 2, a ésta matriz se denomina $\boldsymbol{T}$, definida de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{T} \ \boldsymbol{p}^*$$

El sistema viejo de coordenadas es el sistema 1 y el sistema nuevo de coordenadas el sistema 2. Se habla de sistemas viejo y nuevo para recordar lo estudiado en el capítulo 5. Para el cálculo de la matriz $\boldsymbol{T}$ se construyen deformadas elementales en el sistema nuevo y se mide en el viejo. El cálculo se describe a continuación.

♣ **Primera columna de $\boldsymbol{T}$**

$$p_1^* = 1 \quad y \quad p_i^* = 0 \quad i \neq 1$$

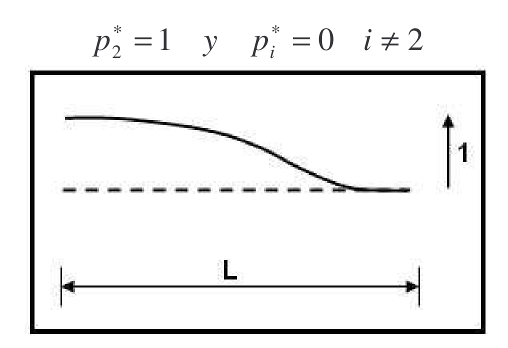
1

L

$$p_1 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L} = 0 \qquad p_2 = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{L} = 0 \qquad p_3 = u_2 - u_1 = 0 - 1 = -1$$

♣ **Segunda columna de T**

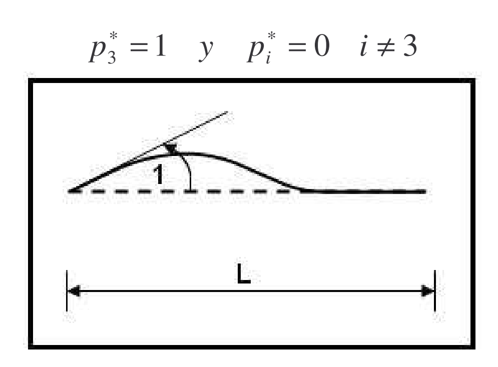
$$p_2^* = 1 \quad y \quad p_i^* = 0 \quad i \neq 2$$



$$p_1 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L} = 0 - \frac{0-1}{L} = \frac{1}{L} \qquad p_2 = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{L} = 0 - \frac{0-1}{L} = \frac{1}{L} \qquad p_3 = u_2 - u_1 = 0$$

♣ **Tercera columna de T**

$$p_3^* = 1 \quad y \quad p_i^* = 0 \quad i \neq 3$$



$$p_1 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L} = 1 - \frac{0-0}{L} = 1 \qquad p_2 = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{L} = 0 \qquad p_3 = u_2 - u_1 = 0$$

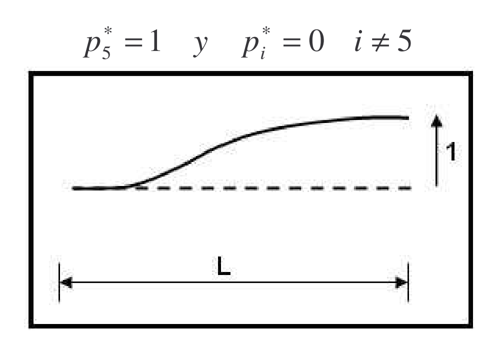
♣ **Cuarta columna de T**

$$p_4^* = 1 \quad y \quad p_i^* = 0 \quad i \neq 4$$

$$p_1 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L} = 0 \qquad p_2 = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{L} = 0 \qquad p_3 = u_2 - u_1 = 1 - 0 = 1$$

♣ **Quinta columna de T**

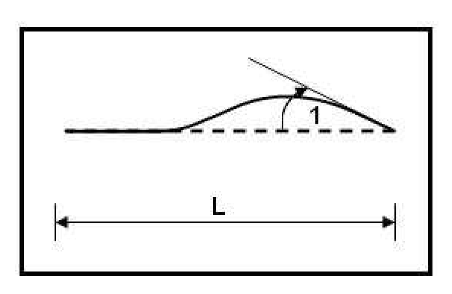
$$p_5^* = 1 \quad y \quad p_i^* = 0 \quad i \neq 5$$



$$p_1 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L} = -\frac{1}{L} \qquad p_2 = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{L} = -\frac{1}{L} \qquad p_3 = u_2 - u_1 = 0$$

♣ **Sexta columna de T**

$$p_6^* = 1 \quad y \quad p_i^* = 0 \quad i \neq 6$$



$$p_1 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L} = 0 \qquad p_2 = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{L} = 1 \qquad p_3 = u_2 - u_1 = 0$$

A la matriz T que se ha obtenido y que permite pasar de los resultados del sistema 1 al sistema 2 se le denomina T_{1-2} y vale:

$$T_{1-2} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} & 1 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para calcular la matriz de rigidez en el nuevo sistema de coordenadas k^* se debe realizar el siguiente triple producto matricial $T_{1-2}^t \; k_1 \; T_{1-2}$. A la matriz de rigidez en coordenadas locales se ha denominado k_2, luego:

$$k_2 = T_{1-2}^t \; k_1 \; T_{1-2}$$

Los resultados que se obtienen son:

$$
\boldsymbol{k}_2 = \begin{bmatrix}
\frac{EA}{L} & & & & & \\
0 & \frac{12EI}{L^3} & & SIMÉTRICA & & \\
0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & & & \\
-\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & & \\
0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \\
0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L}
\end{bmatrix}
$$

Preguntas para el lector:

i) Por qué la primera fila (o columna) más la cuarta fila (o columna) de la matriz $\boldsymbol{k}_2$ suman cero.

ii) Por qué la segunda fila (o columna) más la quinta fila (o columna) de la matriz $\boldsymbol{k}_2$ suman cero.

iii) Por qué la tercera fila(o columna) más la sexta fila (o columna) más la quinta fila (o columna) multiplicada por la longitud L suma cero.

iv) Que otra combinación lineal suma cero.

v) Por qué el rango de la matriz $\boldsymbol{k}_2$ es tres.

vi) Por qué no existe matriz de flexibilidad para el sistema de coordenadas locales.

12.1.2 Matriz de rigidez de un elemento en coordenadas globales

En forma general se puede indicar que las coordenadas locales se miden axial y transversal al eje del elemento, en cambio las coordenadas globales miden en forma horizontal y vertical en consecuencia éstas últimas tienen la misma orientación que las coordenadas de la estructura.

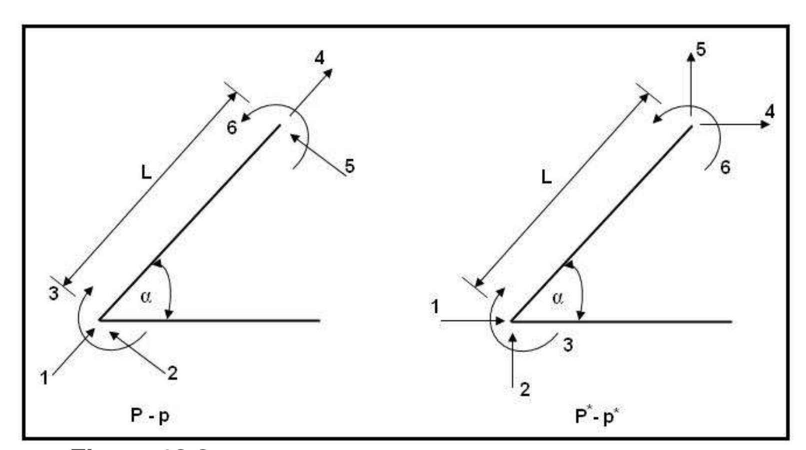


Figura 12.3 Coordenadas locales y globales de un elemento.

En la figura 12.3 se tiene un elemento inclinado que forma un ángulo α con la horizontal, a la izquierda se indica el sistema de coordenadas locales y a la derecha el sistema de coordenadas globales.

En la figura 12.3 se ha utilizado el asterisco para definir las coordenadas globales del elemento. Esto se lo hace por que se va a emplear la transformación de coordenadas para calcular $\boldsymbol{k}^*$ que posteriormente se va a denominar $\boldsymbol{k}_3$ ya que al sistema de coordenadas globales se denomina sistema 3.

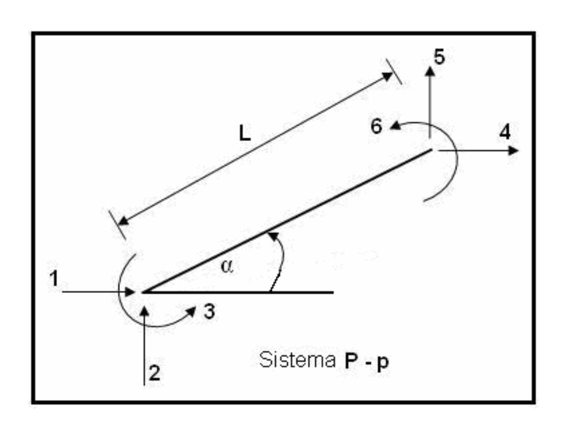
La matriz de paso del sistema 2 al sistema 3 fue estudiada con detenimiento en el capítulo 5 y ya se la había denominado $\boldsymbol{T}_{2-3}$ resultando que ésta matriz es:

$$\boldsymbol{T}_{2-3} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & sen\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -sen\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & sen\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -sen\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para simplificar la escritura se denomina $C = \cos\alpha, \quad S = sen\alpha$. Con ésta notación se realiza el siguiente producto matricial que conduce al cálculo de $\boldsymbol{k}_3$

$$\boldsymbol{k}_3 = \boldsymbol{T}_{2-3}^t \, \boldsymbol{k}_2 \, \boldsymbol{T}_{2-3}$$

$$\boldsymbol{k}_3 = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L}C^2 + \frac{12EI}{L^3}S^2 & & & & & \\ \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)SC & \frac{EA}{L}S^2 + \frac{12EI}{L^3}C^2 & & SIMÉTRICA & & \\ -\frac{6EI}{L^2}S & \frac{6EI}{L^2}C & \frac{4EI}{L} & & & \\ -\frac{EA}{L}C^2 - \frac{12EI}{L^3}S^2 & -\left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)SC & \frac{6EI}{L^2}S & \frac{EA}{L}C^2 + \frac{12EI}{L^3}S^2 & & \\ -\left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)SC & -\frac{EA}{L}S^2 - \frac{12EI}{L^3}C^2 & -\frac{6EI}{L^2}C & \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)SC & \frac{EA}{L}S^2 + \frac{12EI}{L^3}C^2 & \\ -\frac{6EI}{L^2}S & \frac{6EI}{L^2}C & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2}S & -\frac{6EI}{L^2}C & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$



¿Se puede formular las preguntas realizadas al fin del subapartado anterior?

12.1.3 Matriz de rotación T_{2-3}

Sea $\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & sen\alpha & 0 \\ -sen\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. De tal manera que $\boldsymbol{T_{2-3}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{R} \end{bmatrix}$, se desea demostrar que la matriz $\boldsymbol{T}_{2-3}$ es ortogonal.

A la primera fila de la matriz $\boldsymbol{R}$ se le denomina vector $\boldsymbol{X}$, a la segunda $\boldsymbol{Y}$ y a la tercera $\boldsymbol{Z}$. En consecuencia se tiene que:

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{Z} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X} = [\cos\alpha \quad sen\alpha \quad 0]$$
$$\boldsymbol{Y} = [-sen\alpha \quad \cos\alpha \quad 0]$$
$$\boldsymbol{Z} = [\ 0 \quad 0 \quad 1]$$

En los vectores $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}$ se cumplen las siguientes propiedades:

1. Son vectores unitarios, es decir su módulo es igual a 1. En efecto se tiene que:

$$|\boldsymbol{X}| = \sqrt{(\cos\alpha)^2 + (sen\alpha)^2} = 1$$
$$|\boldsymbol{Y}| = \sqrt{(-\boldsymbol{sen}\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2} = 1$$
$$|\boldsymbol{Z}| = \sqrt{(1)^2} = 1$$

2. El producto punto de dos vectores es igual a 0.

$$\boldsymbol{X} \bullet \boldsymbol{Y} = \cos\alpha * (-\boldsymbol{sen}\alpha) + \boldsymbol{sen}\alpha * \boldsymbol{sen}\alpha = 0$$
$$\boldsymbol{Y} \bullet \boldsymbol{Z} = -sen\alpha * 0 + \cos\alpha * 0 + 0 * 1 = 0$$
$$\boldsymbol{Z} \bullet \boldsymbol{X} = 0 * \cos\alpha + 0 * sen\alpha + 1 * 0 = 0$$

3. El producto cruz de dos vectores da como resultado el otro vector. Por ejemplo:

$$\boldsymbol{X} \ \boldsymbol{x} \ \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Z}$$

$$\boldsymbol{X} \ x \ \boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \cos\alpha & sen\alpha & 0 \\ -sen\alpha & \cos\alpha & 0 \end{bmatrix} = i \begin{vmatrix} sen\alpha & 0 \\ \cos\alpha & 0 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} \cos\alpha & 0 \\ -sen\alpha & 0 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} \cos\alpha & sen\alpha \\ -sen\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{X} \ x \ \boldsymbol{Y} = i * (0) - j * (0) + k\left((\cos\alpha)^2 - (-sen\alpha)(sen\alpha)\right) = i * 0 + j * 0 + k * 1$$
$$\boldsymbol{X} \ \boldsymbol{x} \ \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Z}$$

En forma similar se puede demostrar que $\boldsymbol{Y} \text{ x } \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{X}$ y que $\boldsymbol{Z} \ x \ \boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y}$

Se ha demostrado que el módulo de cada vector es igual a la unidad; que el producto punto es nulo y que el producto cruz da el otro vector. Por lo tanto los vectores $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}$ son ortogonales. Por otra parte el determinante de la matriz $\boldsymbol{R}$ es igual a uno. Por consiguiente $\boldsymbol{R}$ es una **matriz propia ortogonal,** en consecuencia se cumple que:

$$\boldsymbol{R}\ \boldsymbol{R}^t = \boldsymbol{R}^t\ \boldsymbol{R} = \boldsymbol{I} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{R}^{-1} = \boldsymbol{R}^t$$

Se tiene que la matriz $\boldsymbol{T}_{2-3}$ que sirve para pasar de las coordenadas locales a coordenadas globales está compuesta por submatrices que son ortogonales. Por lo tanto $\boldsymbol{T}_{2-3}$ es una matriz ortogonal y se cumple que:

$$\boldsymbol{T}_{2-3}^{\ -1} = \boldsymbol{T}_{2-3}^{\ t} \qquad (12.1)$$

Esta es una propiedad muy importante de la matriz $\boldsymbol{T}_{2-3}$ que permite calcular la inversa obteniendo su transpuesta. Esta propiedad se utiliza una vez que se tiene el vector de cargas en coordenadas globales y se desea encontrar éste vector en coordenadas locales.

12. 2 ELEMENTOS DE SECCIÓN CONSTANTE DE UNA ARMADURA PLANA

12.2.1 Matriz de rigidez de un elemento en coordenadas locales

Básicamente se siguen los mismos pasos del numeral anterior para obtener la matriz de rigidez de un elemento. Por este motivo se presenta el cálculo de $\boldsymbol{k}$ en forma directa dejando al lector la justificación de los pasos dados.

En la figura 12.4 se plantea en forma general la forma de cálculo, lo conocido expuesto en capítulos anteriores está a la izquierda y lo que se va a calcular se encuentra a la derecha.

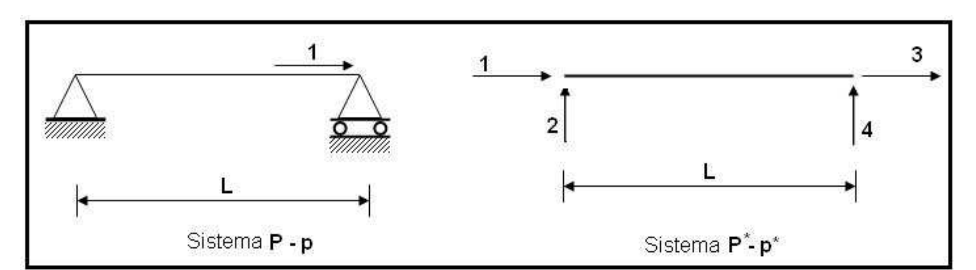


Figura 12.4 Planteamiento del problema.

En el sistema de la izquierda se tiene:

$$p_1 = u_2 - u_1 \qquad\qquad \boldsymbol{k}_1 = \left[\frac{EA}{L}\right]$$

Se desea calcular $\boldsymbol{k}^*$ que se ha denominado $\boldsymbol{k}_2$ para ello se tiene:

$$\boldsymbol{k}_2 = \boldsymbol{T}_{1-2}^{\ t}\ \boldsymbol{k}_1\ \boldsymbol{T}_{1-2}$$

Para calcular $\boldsymbol{T}_{1-2}$ se tiene que $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{T}_{1-2}\ \boldsymbol{p}^*$

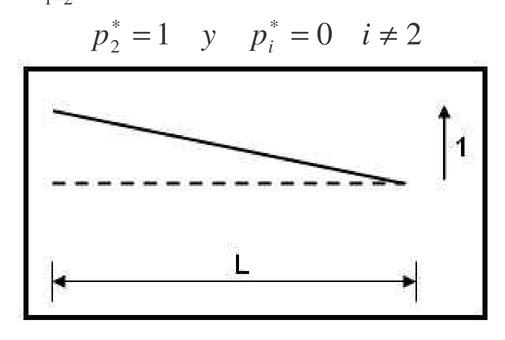
♣ **Primera columna de T_{1-2}**

$$p_1^* = 1 \quad y \quad p_i^* = 0 \quad i \neq 1$$

$$p_1 = u_2 - u_1 = 0 - 1 = -1$$

♣ **Segunda columna de T_{1-2}**

$$p_2^* = 1 \quad y \quad p_i^* = 0 \quad i \neq 2$$



$$p_1 = u_2 - u_1 = 0$$

♣ **Tercera columna de T_{1-2}**

$$p_3^* = 1 \quad y \quad p_i^* = 0 \quad i \neq 3$$

$$p_1 = u_2 - u_1 = 1 - 0 = 1$$

♣ **Cuarta columna de T_{1-2}**

$$p_4^* = 1 \quad y \quad p_i^* = 0 \quad i \neq 4$$

$$p_1 = u_2 - u_1 = 0$$

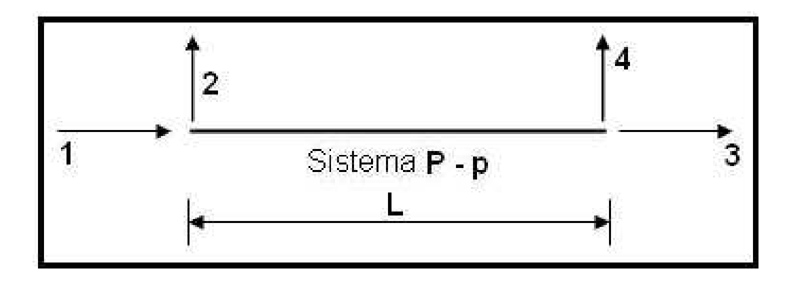
La deformada elemental que conduce al cálculo de la segunda columna de la matriz $\boldsymbol{T}_{1-2}$ se diferencia de la deformada anterior, para el caso de pórtico plano, por el hecho de que ahora el elemento es $I = \infty$. En consecuencia no trabaja a flexión; algo similar se indica con relación a la última deformada. Luego la matriz $\boldsymbol{T}_{1-2}$ tiene los siguientes valores.

$$\boldsymbol{T}_{1-2} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{k}_2 = \boldsymbol{T}_{1-2}{}^{t}\ \boldsymbol{k}_1\ \boldsymbol{T}_{1-2}$$

$$\boldsymbol{k}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\boldsymbol{EA}}{\boldsymbol{L}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{k}_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{EA}{L} & 0 & -\dfrac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{EA}{L} & 0 & \dfrac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Preguntas para el lector:

i) Cual es el rango y orden de la matriz $\boldsymbol{k}_2$.

ii) Existe matriz inversa de $\boldsymbol{k}_2$.

12.2.2 Matriz de rigidez de un elemento en coordenadas globales

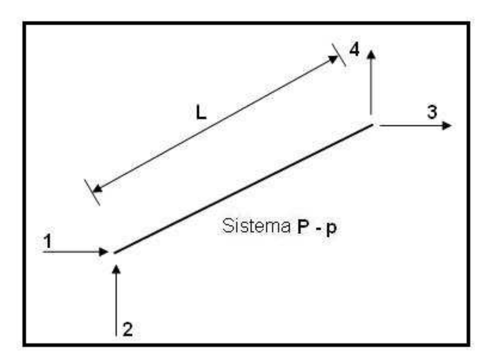
La matriz de paso de coordenadas locales a coordenadas globales en armaduras planas es:

$$\boldsymbol{T}_{2-3} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & sen\alpha & 0 & 0 \\ -sen\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & sen\alpha \\ 0 & 0 & -sen\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Para hallar la matriz de rigidez en coordenadas globales $\boldsymbol{k}_3$ se realiza la siguiente operación:

$$\boldsymbol{k}_3 = \boldsymbol{T}_{2-3}^{\ t}\ \boldsymbol{k}_2\ \boldsymbol{T}_2$$

$$\boldsymbol{k}_3 = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} \cos\alpha^2 & sen\alpha\cos\alpha & -\cos\alpha^2 & -sen\alpha\cos\alpha \\ sen\alpha\cos\alpha & sen\alpha^2 & -sen\alpha\cos\alpha & -sen\alpha^2 \\ -\cos\alpha^2 & -sen\alpha\cos\alpha & \cos\alpha^2 & sen\alpha\cos\alpha \\ -sen\alpha\cos\alpha & -sen\alpha^2 & sen\alpha\cos\alpha & sen\alpha^2 \end{bmatrix}$$



Preguntas para el lector:

i) La matriz $\boldsymbol{T}_{2-3}$ definida en el presente numeral es ortogonal.

ii) Si se desea expresar la matriz de rigidez de un elemento de una armadura plana como si fuera de orden 6 x 6. Como quedaría $\boldsymbol{k}_3$ y cual sería el sistema $\boldsymbol{P}-\boldsymbol{p}$.

12.3 ELEMENTOS DE SECCIÓN CONSTANTE O VARIABLE DE UN PÓRTICO

12.3.1 Sistema 1

En el capítulo 7 se calculó la matriz de flexibilidad $\boldsymbol{f}$ para el elemento lineal que se presenta en la figura 12.1. En esa ocasión se empleó la notación que consta en la figura 12.5 para explicar el significado físico de los elementos de la matriz $\boldsymbol{f}$ para un elemento que puede ser de sección constante o variable.

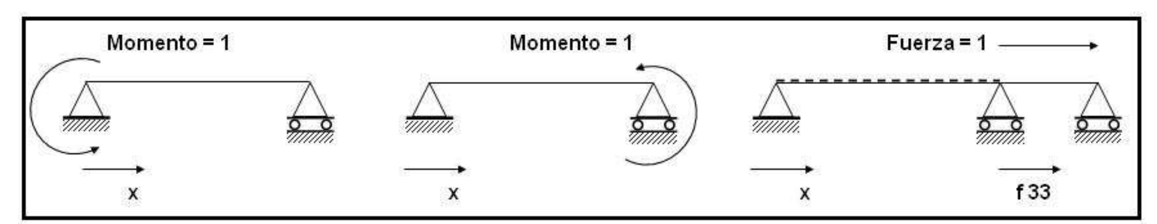


Figura 12.5 Cargas aplicadas para encontrar la matriz de flexibilidad de un elemento.

La forma de $\boldsymbol{f}$ es la siguiente:

$$f = \begin{bmatrix} f_{11} & -f_{12} & 0 \\ -f_{21} & f_{22} & 0 \\ 0 & 0 & f_{33} \end{bmatrix}$$

En éste apartado se va a utilizar la nomenclatura del Ing. Alejandro Segovia Gallegos quien denomino α al término f_{11}; ε al término $f_{12} = f_{21}$; α' al elemento f_{22}.

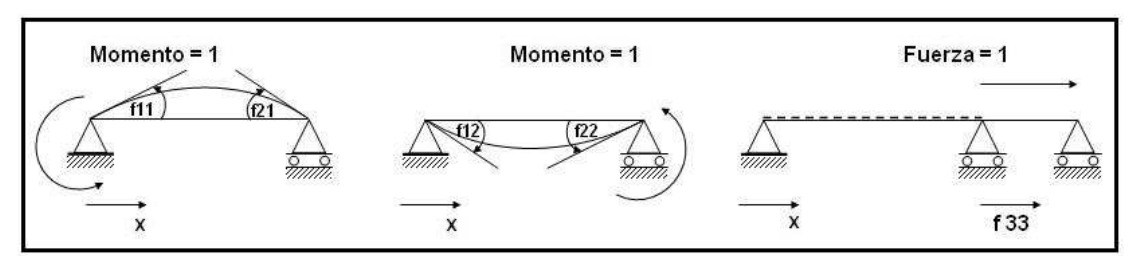


Figura 12.6 Elementos de la matriz de flexibilidad de un elemento.

Por lo tanto la matriz de flexibilidad f con la nueva nomenclatura es la siguiente:

$$f = \begin{bmatrix} \alpha & -\varepsilon & 0 \\ -\varepsilon & \alpha' & 0 \\ 0 & 0 & f_{33} \end{bmatrix}$$

Donde:

$$\alpha = f_{11} = \int_0^L \frac{(L-X)^2}{L^2}\frac{dx}{EI(x)} + \int_0^L \beta\left(\frac{1}{L}\right)^2 \frac{dx}{GA(x)}$$

$$\varepsilon = f_{21} = f_{12} = \int_0^L \frac{X(L-X)}{L^2}\frac{dx}{EI(x)} + \int_0^L \beta\left(\frac{1}{L}\right)^2 \frac{dx}{GA(x)}$$

$$\alpha' = f_{22} = \int_0^L \frac{X^2}{L^2}\frac{dx}{EI(x)} + \int_0^L \beta\left(\frac{1}{L}\right)^2 \frac{dx}{GA(x)}$$

$$f_{33} = \int_0^L \frac{dx}{EA(x)}$$

Para hallar la matriz de rigidez del elemento presentado se obtiene la inversa de f el resultado que se obtiene es:

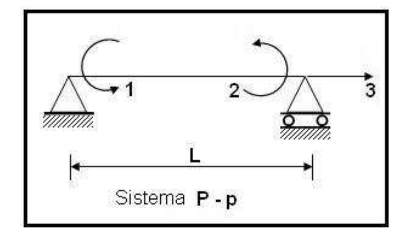
$$k = f^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha'}{\alpha\alpha'-\varepsilon^2} & \frac{\varepsilon}{\alpha\alpha'-\varepsilon^2} & 0 \\ \frac{\varepsilon}{\alpha\alpha'-\varepsilon^2} & \frac{\alpha}{\alpha\alpha'-\varepsilon^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{f_{33}} \end{bmatrix}$$

El Ing. Alejandro Segovia Gallegos denominó:

$$k = \frac{\alpha'}{\alpha\,\alpha' - \varepsilon^2} \qquad a = \frac{\varepsilon}{\alpha\,\alpha' - \varepsilon^2} \qquad k' = \frac{\alpha}{\alpha\,\alpha' - \varepsilon^2}$$

Es importante que se diferencia entre k y $\boldsymbol{k}$ el primero es un elemento de la matriz de rigidez $\boldsymbol{k}$ en cambio el segundo es la matriz de rigidez, k es el término que se encuentra en la fila 1 y columna 1 de la matriz de rigidez del elemento $\boldsymbol{k}$ que es de 3 x 3.

Resumiendo todo lo expuesto en el presente apartado, se tiene que las matrices de flexibilidad y de rigidez para un elemento de sección constante o variable asociado al siguiente sistema de coordenadas, son las siguientes:



$$\boldsymbol{f}_1 = \begin{bmatrix} \alpha & -\varepsilon & 0 \\ -\varepsilon & \alpha' & 0 \\ 0 & 0 & f_{33} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{k}_1 = \begin{bmatrix} k & a & 0 \\ a & k' & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix}$$

siendo $r = \frac{1}{f_{33}}$. Se ha colocado el subíndice 1 ya que corresponden al sistema 1.

12.3.2 Forma general de $\boldsymbol{k}_2$ en coordenadas locales

Lo que interesa en el presente apartado es ilustrar la forma de cálculo de la matriz de rigidez de un elemento de sección variable en coordenadas locales suponiendo que se conocen los elementos de rigidez k, a, k', r. Si se conoce como se resuelve para sección variable también se conocerá como se resuelve para sección constante ya que éste último es un caso particular.

La matriz de rigidez de un elemento en coordenadas locales $\boldsymbol{k}_2$ se obtiene del siguiente triple producto matricial.

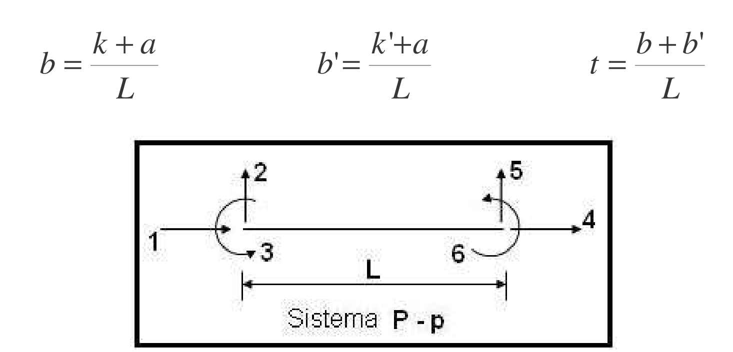
$$\boldsymbol{k}_2 = \boldsymbol{T}_{1-2}{}^{t}\ \boldsymbol{k}_1\ \boldsymbol{T}_{1-2}$$

$$\boldsymbol{T}_{1-2} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} & 1 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{k}_2 = \begin{bmatrix} r & & & & & \\ 0 & t & & SIMÉTRICA & & \\ 0 & b & k & & & \\ -r & 0 & 0 & r & & \\ 0 & -t & -b & 0 & t & \\ 0 & b' & a & 0 & -b' & k' \end{bmatrix}$$

Siendo:

$$b = \frac{k+a}{L} \qquad b' = \frac{k'+a}{L} \qquad t = \frac{b+b'}{L}$$



Preguntas al lector:

i) Se pueden realizar las preguntas indicadas en el apartado 12.1.1, en caso afirmativo conteste cada una de ellas.

ii) Como obtendría la matriz de rigidez para un elemento lineal se sección constante o variable en coordenadas globales.

iii) Cual es el valor de k, a, k', b, b', t para un elemento lineal de sección constante sin considerar el efecto de corte y considerando dicho efecto. Escribir en función de la rigidez a flexión EI.

12.3.3 Consideraciones del efecto de corte en un elemento de sección constante

Al no considerar el efecto de corte ϕ en el cálculo de un pórtico plano cuyos elementos son de sección constante se está cometiendo un error el mismo que puede ser despreciable si la relación h/L tiende a cero. Donde h es la altura de la sección transversal y L la longitud del elemento. Ahora en el caso contrario el error que se comete al no considerar ϕ aumenta conforme la relación h/L se incrementa. Concretamente en el caso de una viga esbelta o de un muro de corte (diafragma) es necesario evaluar la matriz de rigidez de un elemento considerando el efecto de corte.

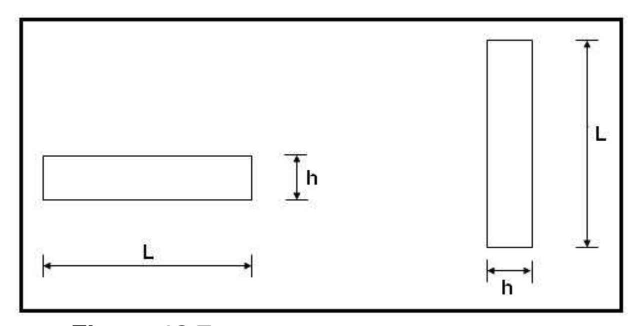


Figura 12.7 Viga esbelta y un muro de corte.

Por otra parte si los cálculos se van a realizar en un ordenador es conveniente que en el análisis se incluya el efecto de corte, al margen de que si es despreciable o no el error. De ésta manera se optimiza el cálculo. A continuación se va a presentar los valores de los elementos de la matriz de flexibilidad y de rigidez al incluir el efecto de corte y finalmente se indicará la matriz $\boldsymbol{k}_2$ incluyendo dicho efecto.

i) Los valores de $\alpha, \varepsilon, \alpha'$ para sección constante fueron obtenidos en el capítulo 7. Por lo tanto se parten de esos valores.

$$\alpha = \frac{L}{3EI_o}(1+\phi) \qquad \varepsilon = \frac{L}{6EI_o}(1-2\phi) \qquad \alpha = \alpha' \qquad \phi = \frac{3\beta\, EI_o}{GAL^2}$$

ii) Al sustituir los valores de $\alpha, \varepsilon, \alpha'$ en las siguientes expresiones:

$$k = \frac{\alpha'}{\alpha\,\alpha' - \varepsilon^2} \qquad a = \frac{\varepsilon}{\alpha\,\alpha' - \varepsilon^2} \qquad k' = \frac{\alpha}{\alpha\,\alpha' - \varepsilon^2}$$

se encuentra luego de realizar las simplificaciones del caso, que:

$$k = \frac{4EI_o}{L}\left(\frac{1+\phi}{1+4\phi}\right) \qquad a = \frac{2EI_o}{L}\left(\frac{1-2\phi}{1+4\phi}\right) \qquad k = k'$$

iii) Ahora al reemplazar los valores de k, a, k' en las expresiones de b, b', t se obtiene:

$$b = \frac{k+a}{L} \qquad b' = \frac{k'+a}{L} \qquad t = \frac{b+b'}{L}$$

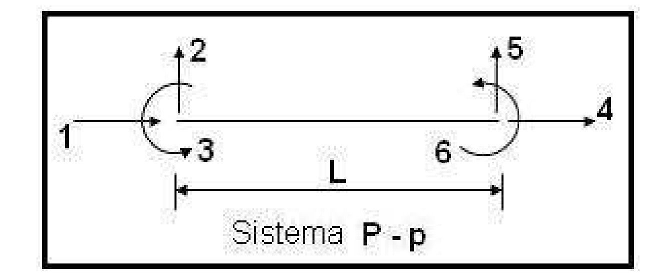
$$b = \frac{6EI_o}{L^2}\left(\frac{1}{1+4\phi}\right) \qquad b = b' \qquad t = \frac{12EI_o}{L^3}\left(\frac{1}{1+4\phi}\right)$$

iv) Finalmente por ser elementos de sección constante, el valor de $r = EA_o / L$

En resumen la matriz de rigidez $\boldsymbol{k}_2$ para un elemento de sección constante considerando el efecto de corte en coordenadas locales es el siguiente:

$$\boldsymbol{k}_2 = \begin{bmatrix} r & & & & & \\ 0 & t\left(\frac{1}{1+4\phi}\right) & & \mathit{SIMÉTRICA} & & \\ 0 & b\left(\frac{1}{1+4\phi}\right) & k\left(\frac{1+\phi}{1+4\phi}\right) & & & \\ -r & 0 & 0 & r & & \\ 0 & -t\left(\frac{1}{1+4\phi}\right) & -b\left(\frac{1}{1+4\phi}\right) & 0 & t\left(\frac{1}{1+4\phi}\right) & \\ 0 & b'\left(\frac{1}{1+4\phi}\right) & a\left(\frac{1-2\phi}{1+4\phi}\right) & 0 & -b'\left(\frac{1}{1+4\phi}\right) & k'\left(\frac{1+\phi}{1+4\phi}\right) \end{bmatrix}$$

$$\phi = \frac{3\beta\, EI_o}{GA_o L^2} \qquad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$



Es importante que el lector observe que los términos de la matriz de rigidez en coordenadas locales se obtienen a partir de $\alpha, \varepsilon, \alpha'$, a excepción del valor r. Por lo tanto cuando se analice un elemento de sección variable el problema se considera resuelto una vez que se calculan dichos valores o cuando se encuentra los términos k, a, k'.

12.4 DIAGRAMA DE MASAS ELASTICA

12.4.1 Definiciones y nomenclatura

Sea un elemento de sección variable como el presentado en la figura 12.8.a. en el cual se han definido por una parte los ejes verticales Y e Y' en el nudo inicial y final respectivamente. Adicionalmente se consideran dos coordenadas para definir la posición de un punto del elemento que son X y Z, cumpliéndose que $X + Z = L$

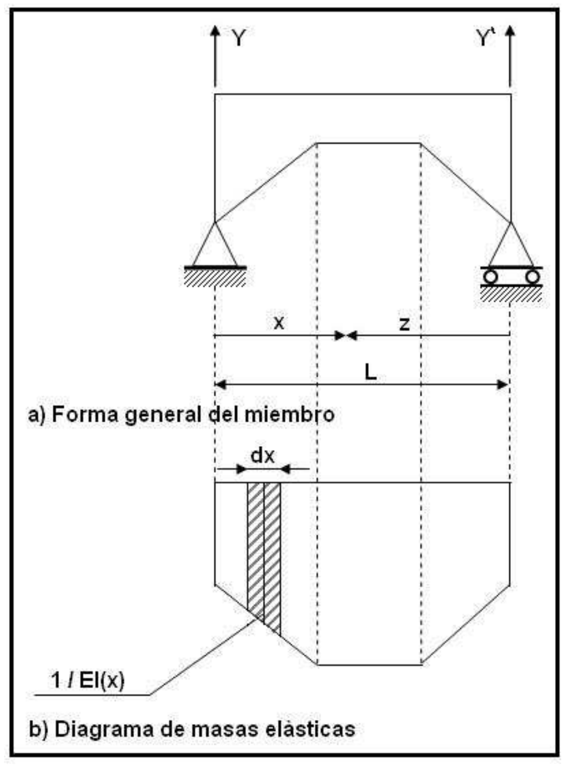


Figura 12.8 Diagrama de Masas Elásticas.

Por otra parte, el gráfico que resulta al unir los puntos cuyo valor es igual a $\frac{1}{EI(x)}$ se conoce con el nombre de **Diagrama de masas elásticas.** Para el elemento que se está considerando este diagrama es el presentado en la parte inferior de la figura 12.8. Por lo tanto para construir el diagrama

de masas elásticas se debe conocer primero el valor de $EI(x)$ en cada punto del elemento y segundo obtener el valor de su inversa con estos valores se dibuja el diagrama.

Al considerar el elemento diferencial dx de la figura 12.8.b se nota que el diferencial de área vale $\frac{dx}{EI(x)}$. En consecuencia el área total del diagrama de masas elásticas, W vendrá dado por:

$$W = \int \frac{dx}{EI(x)} \quad (12.2)$$

Se define el momento estático del diagrama de cargas elásticas con respecto al eje Y de la siguiente manera:

$$S_Y = \int_0^L X \frac{dx}{EI(x)} \quad (12.3)$$

De igual manera el momento estático del diagrama de masas con respecto al eje Y' vale:

$$S_Y^{'} = \int_0^L Z \frac{dx}{EI(x)} \quad (12.4)$$

Por otra parte los momentos de inercia del diagrama de masas elásticas con respecto a los ejes Y e Y' se evalúan con las siguientes ecuaciones:

$$I_Y = \int_0^L X^2 \frac{dx}{EI(x)} \quad (12.5)$$

$$I_Y^{'} = \int_0^L Z^2 \frac{dx}{EI(x)} \quad (12.6)$$

Finalmente el momento de inercia compuesto del diagrama de masas elásticas respecto a los ejes YY' vale:

$$I_{YY'} = \int_0^L XZ \frac{dx}{EI(x)} \quad (12.7)$$

12.4.2 Cálculo de α

En el apartado 12.3.1 de este capítulo se llegó a la siguiente expresión para calcular α en un elemento de sección constante o variable.

$$\alpha = \int_0^L \frac{(L-X)^2}{L^2} \frac{dx}{EI(x)} + \int_0^L \beta \frac{1}{L^2} \frac{dx}{GA(x)}$$

Al despreciar el efecto de corte, es decir no se considera la segunda integral y al reemplazar $X = L - Z$, se encuentra.

$$\alpha = \int_0^L \frac{(L-X)^2}{L^2} \frac{dx}{EI(x)} = \int_0^L \frac{(L-L+Z)^2}{L^2} \frac{dx}{EI(x)} = \int_0^L \frac{Z^2}{L^2} \frac{dx}{EI(x)}$$

Por ser L constante puede salir de la integral, luego:

$$\alpha = \left(\frac{1}{L}\right)^2 \int_0^L \frac{Z^2}{EI(x)} dx$$

Pero la cantidad que está en la integral es I_Y'. Por lo tanto:

$$\alpha = \frac{I_y'}{L^2} \tag{12.8}$$

12.4.3 Cálculo de ε

De igual manera al no considerar el efecto de corte la expresión de ε dada por el numeral 12.3.1 queda:

$$\varepsilon = \int_0^L \frac{X(L-X)}{L^2} \frac{dx}{EI(x)}$$

Se conoce que $Z = L - X$, por consiguiente al sustituir este valor en la integral y al sacar L^2 fuera de la integral por ser constante se tiene:

$$\varepsilon = \frac{1}{L^2} \int_0^L X\ Z \frac{dx}{EI(x)}$$

Pero la integral vale $I_{YY'}$. Luego se tiene:

$$\varepsilon = \frac{I_{YY'}}{L^2} \tag{12.9}$$

12.4.4 Cálculo de α'

Finalmente al considerar el primer término de la expresión que define a α', en el numeral 12.3.1, se tiene:

$$\alpha' = \int_0^L \left(\frac{X}{L}\right)^2 \frac{dx}{EI(x)}$$

La misma que se puede escribir de la siguiente forma:

$$\alpha' = \frac{1}{L^2} \int_0^L X^2 \frac{dx}{EI(x)}$$

En el numeral anterior se vio que la integral vale I_Y. Por lo tanto se tiene:

$$\alpha' = \frac{I_Y}{L^2} \qquad (12.10)$$

En conclusión los elementos de la matriz de rigidez de un elemento de sección constante o variable en coordenadas locales pueden ser calculados a partir del diagrama de masas elásticas, toda vez que todos los términos se obtienen de $\alpha, \varepsilon, \alpha'$. Debe anotarse que estas los términos indicados están relacionados de la siguiente manera:

$$W = \alpha + \alpha' + 2\,\varepsilon \qquad (12.11)$$

En resumen para calcular los valores de $\alpha, \varepsilon, \alpha'$ se tienen las siguientes alternativas:

- Uso de Integrales

$$\alpha = \int_0^L \frac{(L-X)^2}{L^2}\,\frac{dx}{EI(x)}$$

$$\varepsilon = \int_0^L \frac{X(L-X)}{L^2}\,\frac{dx}{EI(x)}$$

$$\alpha' = \int_0^L \left(\frac{X}{L}\right)^2 \frac{dx}{EI(x)}$$

- Uso del diagrama de masas elásticas

$$\alpha = \frac{I_y'}{L^2} \qquad \varepsilon = \frac{I_{YY'}}{L^2}$$

$$\alpha' = \frac{I_Y}{L^2} \qquad W = \alpha + \alpha' + 2\,\varepsilon$$

12.5 EJERCICIOS RESUELTOS

- **EJEMPLO N.- 1**

Utilizando el diagrama de masas elásticas, obtener la matriz de flexibilidad del elemento presentado en la figura 12.9, que se considera axialmente rígido en toda su longitud.

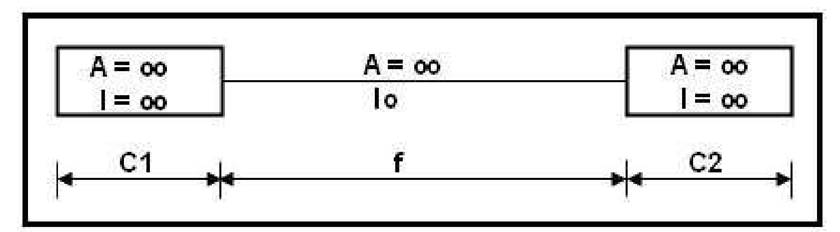


Figura 12.9 Elemento lineal con dos sectores de rigidez infinita en sus extremos.

En los edificios los nudos se consideran completamente rígidos en consecuencia el elemento de la figura 12.9 puede ser un elemento horizontal que ingresa a dos columnas, la cantidad que ingresa es C1 en el nudo inicial y C2 en el nudo final.

- **SOLUCIÓN**

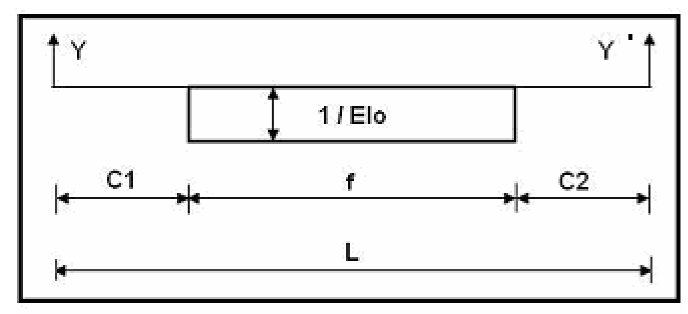


Diagrama de Masas Elásticas.

- **Cálculo de** I_Y

$$I_Y = \frac{f^3}{12EI_o} + \frac{\left(C_1 + \frac{f}{2}\right)^2 f}{EI_o} = \frac{1}{EI_o}\left(C_1^2 f + C_1 f^2 + \frac{f^3}{3}\right)$$

Se ha obtenido el momento de inercia con respecto al centro de gravedad más la distancia al cuadrado por el área. Distancia con respecto al eje Y. En forma similar se calcula con respecto a I_Y'.

- **Cálculo de** I_Y'

$$I_Y' = \frac{f^3}{12EI_o} + \frac{\left(C_2 + \frac{f}{2}\right)^2 f}{EI_o} = \frac{1}{EI_o}\left(C_2^2 f + C_2 f^2 + \frac{f^3}{3}\right)$$

- **Cálculo de** α **y** α'

$$\alpha = \frac{I_Y'}{L^2} = \frac{1}{EI_o L^2}\left(C_2^2 f + C_2 f + \frac{f^3}{3}\right) = \frac{1}{3EI_o L^2}\left(3C_2^2 f + 3C_2 f^2 + f^3\right)$$

$$\alpha' = \frac{I_Y}{L^2} = \frac{1}{EI_o L^2}\left(C_1^2 f + C_1 f + \frac{f^3}{3}\right) = \frac{1}{3EI_o L^2}\left(3C_1^2 f + 3C_1 f^2 + f^3\right)$$

- **Cálculo de** W

$$W = \frac{f}{EI_o}$$

- **Cálculo de** ε

$$W = \alpha + \alpha' + 2\,\varepsilon \qquad \varepsilon = \frac{1}{2}\left(W - \alpha - \alpha'\right)$$

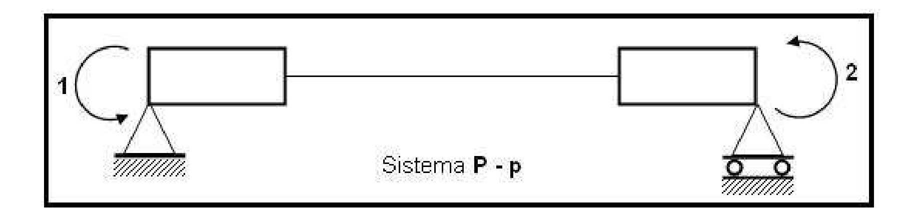
$$\varepsilon = \frac{1}{2EI_o}\left(f - \frac{C_2^2 f}{L^2} - \frac{C_2 f^2}{L^2} - \frac{f^3}{3L^2} - \frac{C_1^2 f}{L^2} - \frac{C_1 f^2}{L^2} - \frac{f^3}{3L^2}\right)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2EI_o L^2}\left(f\ L^2 - \left(C_1^2 + C_2^2\right)f - \left(C_1 + C_2\right)f^2 - \frac{2f^3}{3}\right)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{6EI_o L^2}\left(3\,f\ L^2 - 3\left(C_1^2 + C_2^2\right)f - 3\left(C_1 + C_2\right)f^2 - 2f^3\right)$$

$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} \dfrac{\left(3C_2^2\,f + 3C_2 f^2 + f^3\right)}{3EI_o L^2} & \textit{SIMÉTRICO} \\ \dfrac{1}{6EI_o L^2}\left(3\,f\,L^2 - 3\left(C_1^2 + C_2^2\right)f - 3\left(C_1 + C_2\right)f^2 - 2f^3\right) & \dfrac{\left(3C_1^2\,f + 3C_1 f^2 + f^3\right)}{3EI_o L^2} \end{bmatrix}$$

La matriz de flexibilidad encontrada es para el siguiente sistema de coordenadas $P - p$.



- **EJEMPLO N.- 2**

Calcular la matriz de rigidez del elemento mostrado en la figura 12.10 que es axialmente rígido, con un sector de rigidez infinita en el nudo inicial de longitud $C_1 = \frac{f}{5}$ que es totalmente rígido. Resolver el problema a partir de los resultados del problema anterior.

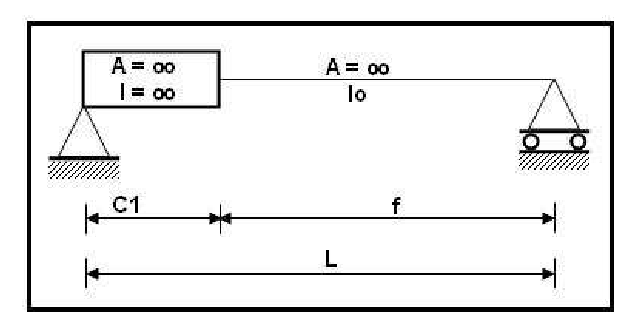


Figura 12.10 Elemento lineal con un sector de rigidez infinita.

- **SOLUCIÓN**

Al sustituir $C_1 = \frac{f}{5}$ y $C_2 = 0$ en la matriz $\boldsymbol{f}$ del problema anterior y $L = C_1 + f = \frac{6f}{5}$ se encuentra:

$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} \dfrac{25f}{108EI_o} & \dfrac{5f}{27EI_o} \\ \dfrac{5f}{27EI_o} & \dfrac{43f}{108EI_o} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto se tiene:

$$\alpha = \frac{25f}{108EI_o} \qquad \varepsilon = \frac{5f}{27EI_o} \qquad \alpha' = \frac{43f}{108EI_o}$$

- **Cálculo de** $\alpha\,\alpha' - \varepsilon^2$

$$\alpha\,\alpha' - \varepsilon^2 = \frac{f^2}{(EI_o)^2}\left[\frac{25*43}{108*108} - \frac{25}{27*27}\right] = \frac{25f^2}{432(EI_o)^2}$$

- **Cálculo de** $k,\, a,\, k'$

$$k = \frac{\alpha'}{\alpha\,\alpha' - \varepsilon^2} = \frac{\dfrac{43f}{108EI_o}}{\dfrac{25f^2}{432(EI_o)^2}} = \frac{172EI_o}{25f}$$

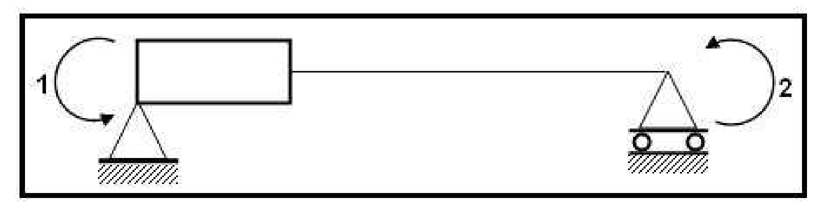
$$a = \frac{\varepsilon}{\alpha\,\alpha' - \varepsilon^2} = \frac{\dfrac{5f}{27EI_o}}{\dfrac{25f^2}{432(EI_o)^2}} = \frac{16EI_o}{5f}$$

$$k' = \frac{\alpha}{\alpha\,\alpha' - \varepsilon^2} = \frac{\dfrac{25f}{108EI_o}}{\dfrac{25f^2}{432(EI_o)^2}} = \frac{4EI_o}{f}$$

Por lo tanto la matriz de rigidez para el elemento de la figura 12.10 es:

$$\boldsymbol{k} = \frac{EI_o}{f}\begin{bmatrix} \dfrac{172}{25} & \dfrac{16}{5} \\ \dfrac{16}{5} & 4 \end{bmatrix}$$

Siendo el sistema $\boldsymbol{P-p}$ del elemento el siguiente:



Sistema $\boldsymbol{P-p}$

- **EJEMPLO N.- 3**

Para el ejemplo de la figura 12.11 probar que:

$$\alpha = \alpha' = \frac{L}{EI_o}\left(\frac{1}{3} - \lambda + \lambda^2 - \frac{2}{3}\lambda^3\right) + \frac{L}{EI_a}\left(\lambda - \lambda^2 + \frac{2}{3}\lambda^3\right)$$

$$\varepsilon = \frac{L}{EI_o}\left(\frac{1}{6} - \lambda^2 + \frac{2}{3}\lambda^3\right) + \frac{L}{EI_a}\left(\lambda^2 - \frac{2}{3}\lambda^3\right)$$

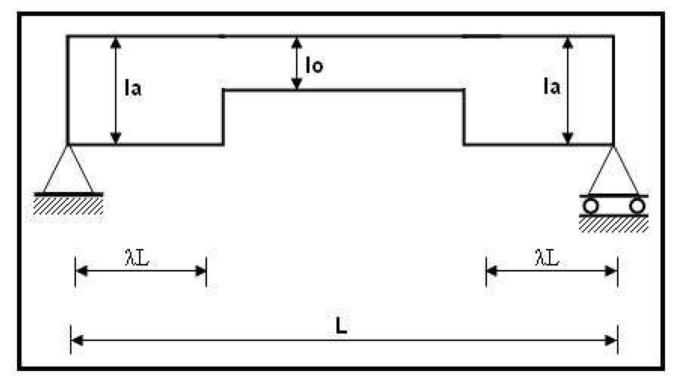
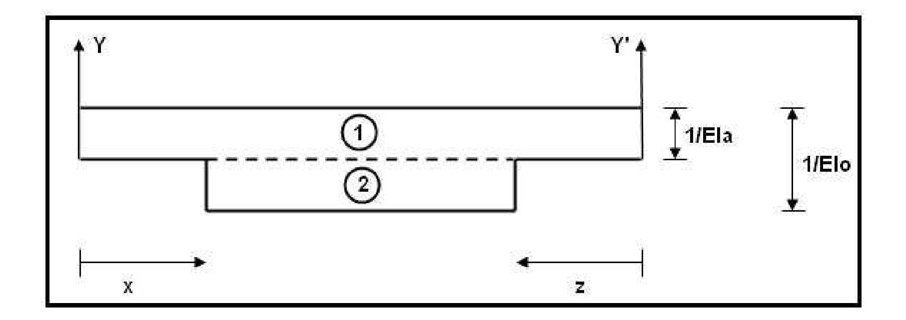


Figura 12.11 Elemento de ejemplo 3.

- **SOLUCIÓN**

  - **Diagrama de masas elásticas**



  - **Cálculo de I_Y**

$$I_Y = \frac{W_1 L^2}{3} + \frac{W_2 (L - 2\lambda L)^2}{12} + W_2 \left(\frac{L}{2}\right)^2$$

Donde:

$$W_1 = \frac{L}{EI_o} \qquad W_2 = (L - 2\lambda L)\left(\frac{1}{EI_o} - \frac{1}{EI_a}\right)$$

Sustituyendo W_1 y W_2 en I_Y. Luego de simplificar se obtiene:

$$I_Y = \frac{L^3}{EI_o}\left(\frac{1}{3} - \lambda + \lambda^2 - \frac{2}{3}\lambda^3\right) + \frac{L^3}{EI_a}\left(\lambda - \lambda^2 - \frac{2}{3}\lambda^3\right)$$

Por ser elemento simétrico se tiene que $I_Y = I_Y'$. En consecuencia $\alpha = \alpha'$

- **Cálculo de** $I_{YY'}$

$$I_{YY'} = \frac{L^3}{EI_o}\left(\frac{1}{6} - \lambda^2 + \frac{2}{3}\lambda^3\right) + \frac{L^3}{EI_a}\left(\lambda^2 - \frac{2}{3}\lambda^3\right)$$

Nótese que $I_{YY'}$ se ha evaluado sumando la contribución de la figura 1 más la contribución de la figura 2, de la siguiente forma:

$$I_{YY'} = -\frac{W_1 L^2}{12}\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{L}{2}\right)W_1 - \frac{W_2(L-2\lambda L)^2}{12} + \left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{L}{2}\right)W_2$$

$$I_{YY'} = L^2\,\frac{W_1 + W_2}{4} - \left[W_1 L^2 + W_2(L-2\lambda L)^2\right]$$

$$I_{YY'} = -I_{YC.G.} + X_o Z_o W$$

En la cual C.G.= Centro de Gravedad y X_o, Z_o son las coordenadas al C.G. de cada figura. Es necesario observar que se pudo considerar $I_{YY'}$ considerando al elemento como una sola figura. En éste caso se tiene:

$$I_{YC.G.} = \frac{L^3}{12EI_o}\left(1 - 6\lambda + 12\lambda^2 - 8\lambda^3\right) + \frac{L^3}{12EI_a}\left(6\lambda - 12\lambda^2 + 8\lambda^3\right)$$

$$X_o Z_o W = \frac{L^2}{4}\left(\frac{2\lambda L}{EI_a} + \frac{L}{EI_o}(1-2\lambda)\right)$$

Entonces al efectuar $I_{YY'} = -I_{YC.G} + X_o Z_o W$ se obtiene el resultado antes anotado.

- **Cálculo de** $\alpha, \alpha', \varepsilon$

$$\alpha = \frac{I_Y}{L^2} = \frac{I_Y'}{L^2}$$

$$\alpha = \alpha' = \frac{L}{EI_o}\left(\frac{1}{3} - \lambda + \lambda^2 - \frac{2}{3}\lambda^3\right) + \frac{L}{EI_a}\left(\lambda - \lambda^2 + \frac{2}{3}\lambda^3\right)$$

$$\varepsilon = \frac{I_{YY'}}{L^2} = \frac{L}{EI_o}\left(\frac{1}{6} - \lambda^2 + \frac{2}{3}\lambda^3\right) + \frac{L}{EI_a}\left(\lambda^2 - \frac{2}{3}\lambda^3\right)$$

Que era lo que se quería demostrar. En el ejemplo realizado se ha ilustrado el cálculo de los términos de la matriz de flexibilidad en una forma un tanto diferente al del ejemplo 1. En conclusión se puede calcular ε de algunas maneras. Finalmente se destaca que en los ejemplos realizados se ha despreciado el efecto de corte ϕ.

12.6 ELEMENTO LINEAL CON DOS SECTORES DE RIGIDEZ INFINITA

En el análisis de pórticos planos con muros de corte o en el cálculo de pórticos con nudos rígidos se debe modelar a los elementos con dos sectores de rigidez infinita como lo muestra la figura 12.12.1. Para éste modelo numérico se desea encontrar la matriz de rigidez del elemento en coordenadas locales que se indica en la figura 12.2.

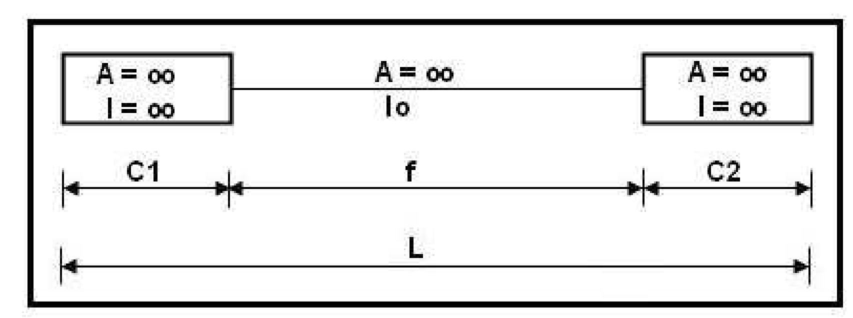


Figura 12.12.1 Elemento lineal con dos sectores de rigidez infinita.

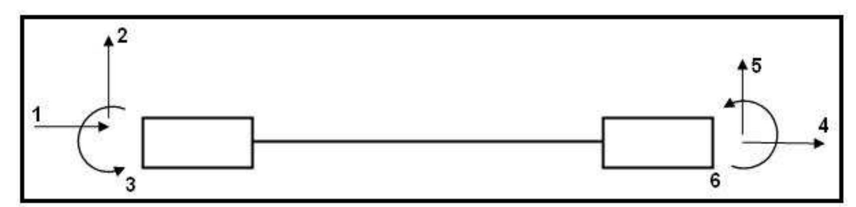


Figura 12.12.2 Sistema $P-p$

El elemento en estudio se puede analizar como si estaría compuesto por tres elementos, uno de longitud C_1 que es totalmente rígido, otro de longitud f que es completamente flexible y el último de longitud C_2 que es totalmente rígido. En la figura 12.12.3 se indica el artificio de solución.

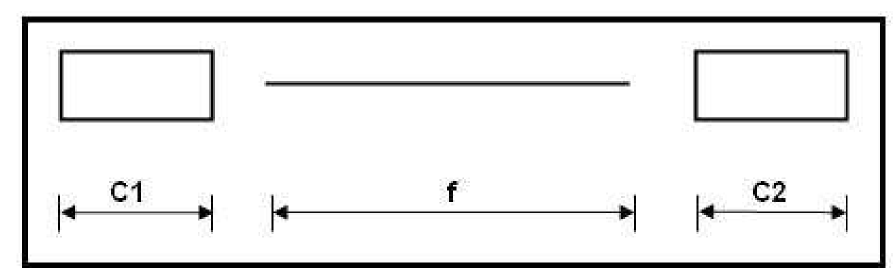


Figura 12.12.3 Artificio de solución

Sea $\boldsymbol{k}^*$ la matriz de rigidez del elemento de longitud f en coordenadas locales.

$$\boldsymbol{k}^* = \begin{bmatrix} r^* & & & & & \\ 0 & t^* & & \textit{SIMÉTRICA} & & \\ 0 & b^* & k^* & & & \\ -r^* & 0 & 0 & r^* & & \\ 0 & -t^* & -b^* & 0 & t^* & \\ 0 & b'^* & a^* & 0 & -b'^* & k'^* \end{bmatrix}$$

Donde:

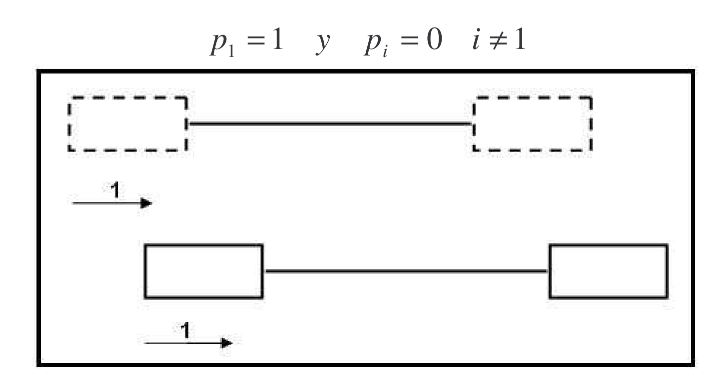
$$r^* = \frac{EA_o}{f} \qquad k^* = \frac{4EI_o}{f}\left(\frac{1+\phi}{1+4\phi}\right) \qquad a^* = \frac{2EI_o}{f}\left(\frac{1-2\phi}{1+4\phi}\right) \qquad k^* = k'^*$$

$$b^* = \frac{6EI_o}{f^2}\left(\frac{1}{1+4\phi}\right) \qquad t^* = \frac{12EI_o}{f^3}\left(\frac{1}{1+4\phi}\right) \qquad b'^* = b^*$$

El asterisco se lo ha colocado para indicar que corresponde al elemento de longitud f. Para calcular la matriz de rigidez se utiliza el concepto es decir se buscan las fuerzas que producen un determinado corrimiento unitario.

- **Primera columna de k**

$$p_1 = 1 \quad y \quad p_i = 0 \quad i \neq 1$$

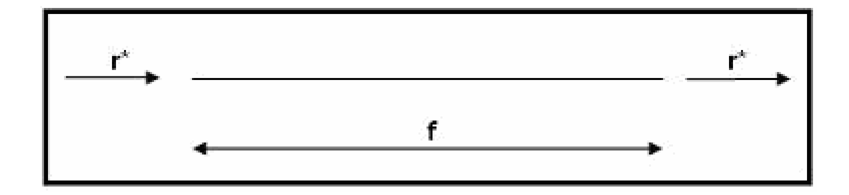


Nótese que el elemento de longitud f se ha deformado la unidad como consecuencia de esto en el elemento se generan las cargas internas que se calculan a continuación.

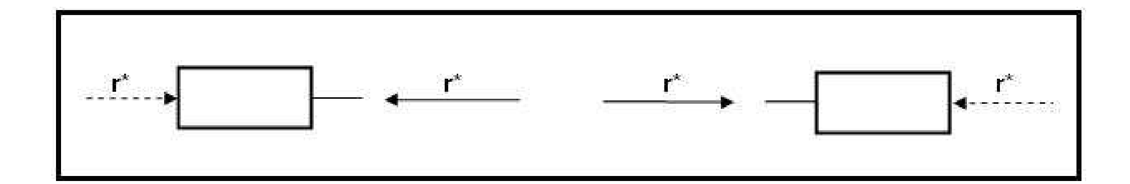
$$\boldsymbol{P}^* = \boldsymbol{k}^* \ \boldsymbol{p}^*$$

$$\begin{bmatrix} P_1^* \\ P_2^* \\ P_3^* \\ P_4^* \\ P_5^* \\ P_6^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^* & & & & & \\ 0 & t^* & & SIMÉTRICA & & \\ 0 & b^* & k^* & & & \\ -r^* & 0 & 0 & r^* & & \\ 0 & -t^* & -b^* & 0 & t^* & \\ 0 & b'^* & a^* & 0 & -b'^* & k'^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^* \\ 0 \\ 0 \\ -r^* \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

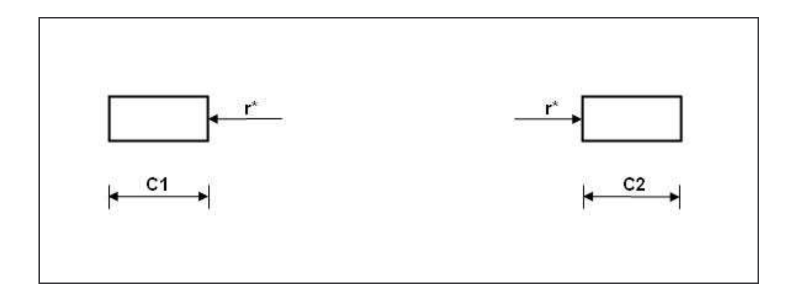
En lo restante del desarrollo del problema solo se indicará el resultado del producto matricial $\boldsymbol{P}^* = \boldsymbol{k}^* \ \boldsymbol{p}^*$. Como resultado de la deformación $p_1 = 1$ y las demás nulas en el elemento de longitud f se generan fuerzas axiales de magnitud r^*. Por consiguiente se tiene:



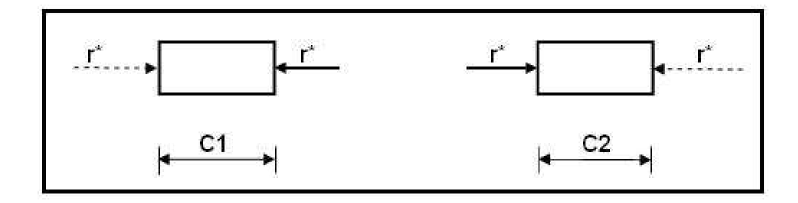
Ahora bien en la unión de los elementos de longitud f y C_1 debe existir equilibrio, lo propio sucede en la unión del elemento f con el elemento de longitud C_2.



Las fuerzas representadas con líneas entrecortadas actúan en los elementos de longitud C_1 y C_2 cambiadas de dirección.



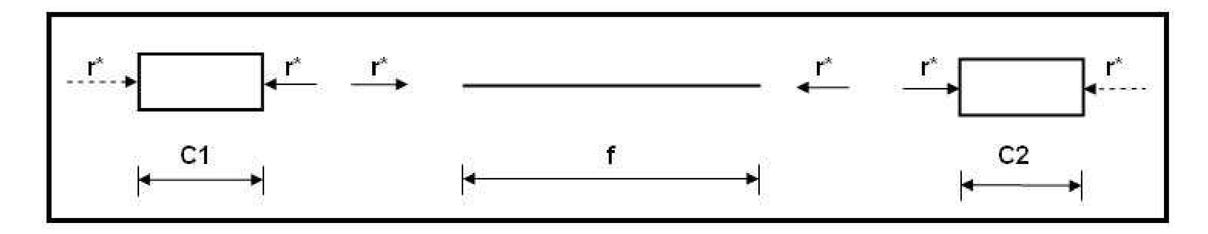
Para que estén en equilibrio los elementos C_1 y C_2 es necesario la presencia de fuerzas que se lo presenta en la siguiente figura con línea discontinua. Estas fuerzas corresponden a los elementos de la primera columna de la matriz de rigidez del elemento.



Luego:

$$k_{11} = r^* \qquad\qquad k_{41} = -r^*$$
$$k_{21} = k_{31} = k_{51} = k_{61} = 0$$

En resumen se tiene:

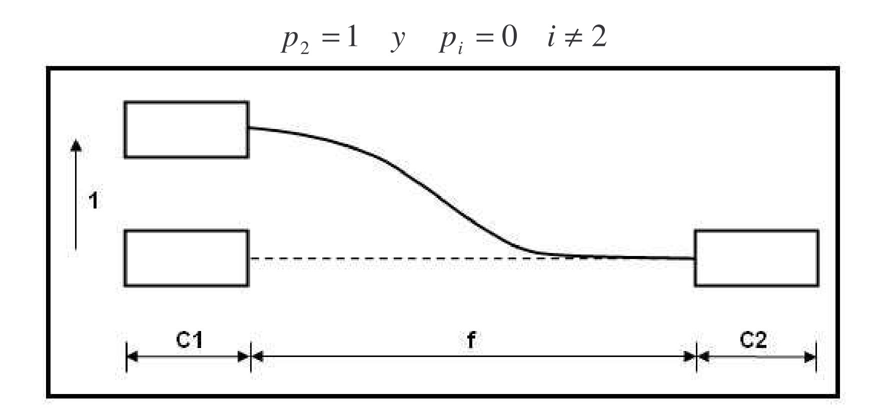


- **Segunda columna de k**

Se procede en forma similar, en éste caso se construye la deformada elemental p_2, como el elemento de longitud C_1 es totalmente rígido todo sube la unidad y por lo tanto el elemento de longitud f se deforma $\boldsymbol{p}^*$. Por facilidad de escritura se escribe la transpuesta de éste vector.

$$\boldsymbol{p}^* = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

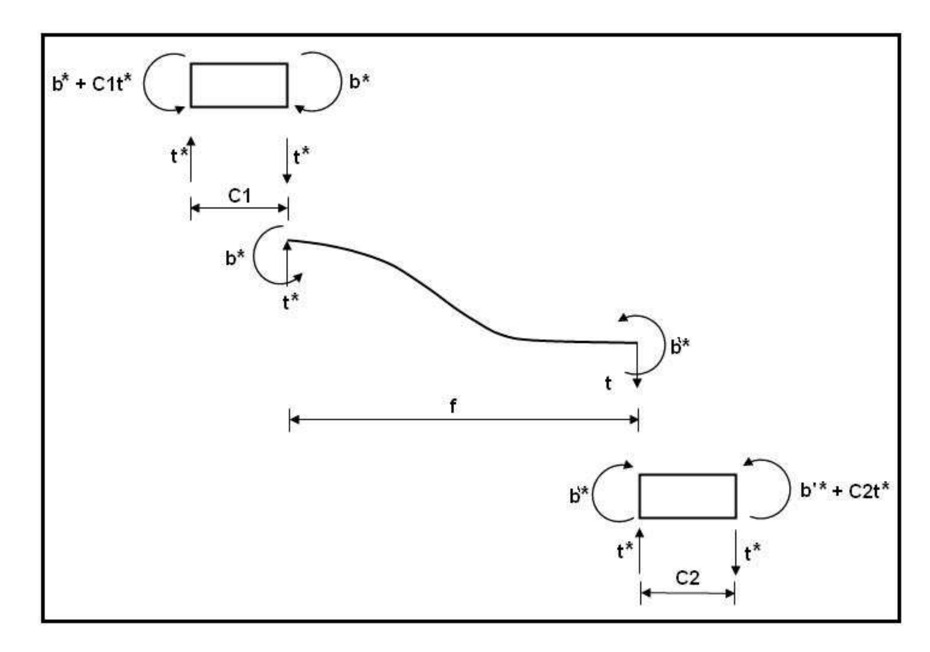
$$p_2 = 1 \quad y \quad p_i = 0 \quad i \neq 2$$



Al efectuar el producto $\boldsymbol{P}^* = \boldsymbol{k}^* \ \boldsymbol{p}^*$ se encuentra:

$$P_1^* = 0 \qquad P_2^* = t^* \qquad P_3^* = b^*$$
$$P_4^* = 0 \qquad P_5^* = -t^* \qquad P_6^* = -b'^*$$

En el gráfico que se presenta a continuación se resume el equilibrio de los elementos y de las juntas.

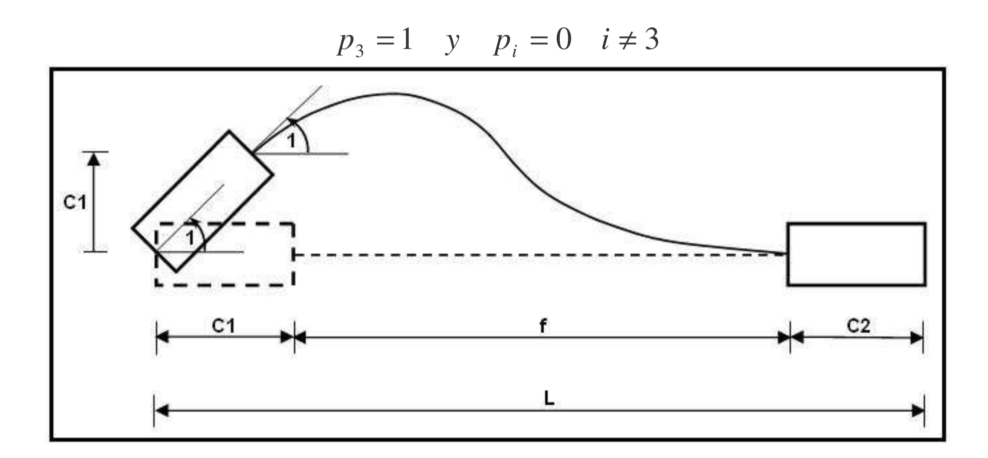


Para hallar los elementos de la segunda columna de la matriz de rigidez hay que observar las fuerzas y momentos que actúan en los extremos izquierdo y derecho de los elementos C_1 y C_2.

$$k_{12} = P_1 = 0$$
$$k_{22} = P_2 = t^*$$
$$k_{32} = P_3 = b^* + C_1 \ t^*$$
$$k_{42} = P_4 = 0$$
$$k_{52} = P_5 = -t^*$$
$$k_{62} = P_6 = b'^* + C_2 \ t^*$$

- **Tercera columna de k**

$$p_3 = 1 \quad y \quad p_i = 0 \quad i \neq 3$$



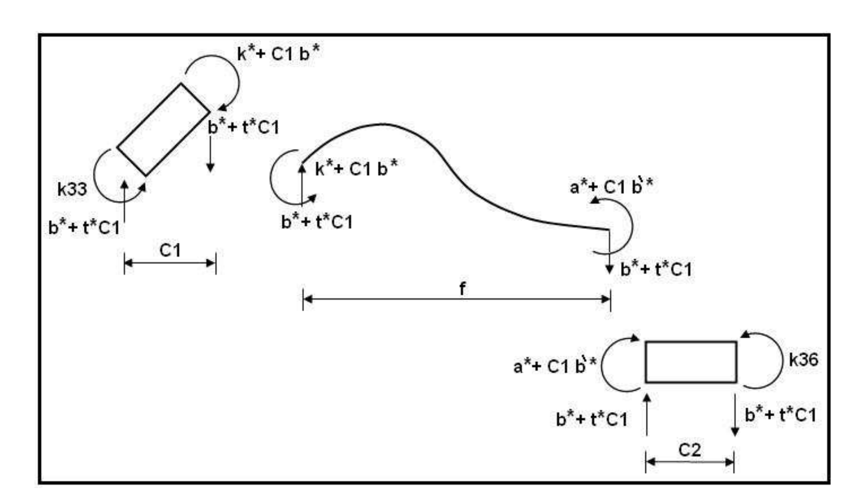
Nótese que al rotar la unidad el elemento de longitud C_1 se produce en el elemento de longitud f una rotación unitaria y un corrimiento vertical de magnitud C_1, esto es debido a que el elemento de longitud C_1 es totalmente rígido. Luego:

$$\boldsymbol{p}^{*t} = \begin{bmatrix} 0 & C_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Del producto matricial $\boldsymbol{P}^* = \boldsymbol{k}^* \ \boldsymbol{p}^*$ se obtiene:

$$P_1^* = 0 \qquad P_2^* = b^* + C_1 \ t^* \qquad P_3^* = k^* + C_1 \ b^*$$
$$P_4^* = 0 \qquad P_5^* = -\left(b^* + C_1 \ t^*\right) \qquad P_6^* = a^* + C_1 \ b'^*$$

Por lo tanto se tendrá:

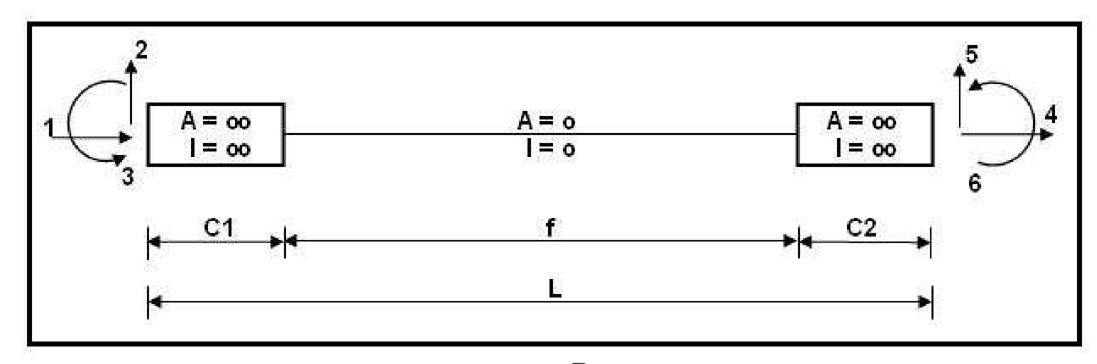


De donde:

$$k_{31} = 0 \qquad k_{32} = b^* + C_1 \ t^* \qquad k_{33} = k^* + 2C_1 b^* + C_1^2 \ t^*$$
$$k_{34} = 0 \qquad k_{35} = -\left(b^* + C_1 \ t^*\right) \qquad k_{36} = a^* + C_1 b'^* + C_2 b^* + C_1 \ C_2 \ t^*$$

Procediendo de forma similar se obtienen los elementos de la cuarta, quinta y sexta columna. La matriz de rigidez para el elemento con dos sectores de rigidez infinita indicado en la figura 12.12.1 es la siguiente:

$$
\boldsymbol{k}_2 = \begin{bmatrix}
r^* & & & & & \\
0 & t^* & & & & \\
0 & b^* + C_1\, t^* & k^* + 2C_1 b^* + C_1^2\, t^* & & \mathit{SIMÉTRICA} & \\
-r^* & 0 & 0 & r^* & & \\
0 & -t^* & -\left(b^* + C_1\, t^*\right) & 0 & t^* & \\
0 & b'^* + C_2\, t^* & a^* + C_1 b'^* + C_2 b^* + C_1 C_2 t^* & 0 & -\left(b'^* + C_2 t^*\right) & k'^* + 2C_2 b'^* + C_2^2 t^*
\end{bmatrix}
$$



Sistema $P - p$

12.7 ELEMENTO LINEAL CON INERCIA ESCALONADA

Cuando se diseña una estructura ante cargas verticales por el Método del Pórtico Equivalente el conjunto losa viga se modela como una viga de inercia escalonada como lo muestra la figura 12.13.1

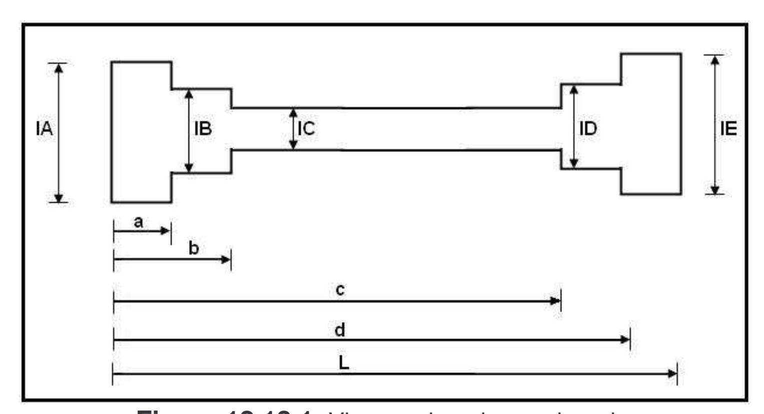


Figura 12.13.1 Viga con inercia escalonada.

En este caso se han dibujado cinco tipos de inercia, se puede tener más o menos de acuerdo al macizado de la losa. Pero no necesariamente la variación de inercia va a ser $I_A > I_B > I_C$, esto se cumple en las losas. Pero se puede tener el caso contrario $I_A < I_B < I_C$ este caso es para cuando se modela daño por sismo.

Efectivamente el diagrama de momentos por sismo es de tipo triangular con valores altos de momentos en los extremos en consecuencia son éstos puntos los que más se dañan de ahí que la inercia va a ser menor en los extremos y a medida que se aproxima al centro de luz el daño es menor y consecuentemente la inercia a flexión mayor. Se puede considerar más escalones en el modelo pero la forma de cálculo que se indica a continuación es la misma.

En la figura 12.13.1 la longitud de cada escalón de inercia se le acota a partir del nudo inicial para poder sistematizar el cálculo como se verá posteriormente. El diagrama de masas elásticas para el elemento analizado se lo presenta en la figura 12.13.2

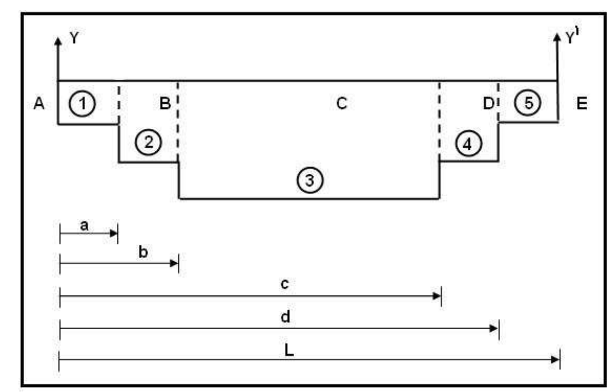


Figura 12.13.2 Diagrama de masas elásticas y numeración de figuras.

La nomenclatura utilizada en el diagrama de la figura 12.13.2 es la siguiente:

$$A = \frac{1}{EI_A} \qquad B = \frac{1}{EI_B} \qquad C = \frac{1}{EI_C} \qquad D = \frac{1}{EI_D} \qquad E = \frac{1}{EI_E}$$

Con la forma acotada para definir las inercias y longitudes de los escalones, el cálculo de los momentos de inercia y áreas se sintetiza en la tabla 12.1

Tabla 12.1 Cálculo de momentos de inercia del diagrama de masas elásticas.

Figura	X_o	W	I_Y	I_Y'
1	$\frac{a}{2}$	$A\,a$	$\frac{A\,a^3}{3}$	$\frac{A\left[L^3-(L-a)^3\right]}{3}$
2	$\frac{a+b}{2}$	$B(b-a)$	$\frac{B(b^3-a^3)}{3}$	$\frac{B\left[(L-a)^3-(L-b)^3\right]}{3}$
3	$\frac{b+c}{2}$	$C(c-b)$	$\frac{C(c^3-b^3)}{3}$	$\frac{C\left[(L-b)^3-(L-c)^3\right]}{3}$
4	$\frac{c+d}{2}$	$D(d-c)$	$\frac{D(d^3-c^3)}{3}$	$\frac{D\left[(L-c)^3-(L-d)^3\right]}{3}$
5	$\frac{d+L}{2}$	$E(L-d)$	$\frac{E(L^3-d^3)}{3}$	$\frac{E(L-d)^3}{3}$
		$\sum W$	$\sum I_Y$	$\sum I_Y'$

Una vez calculado W, I_Y, I_Y' se procede de acuerdo a lo indicado en el apartado 12.4.

En el capítulo 13 se realizan ejemplos numéricos de lo estudiado en el presente capítulo.

12.8 EJERCICIOS PROPUESTOS

EJERCICIO N.- 1

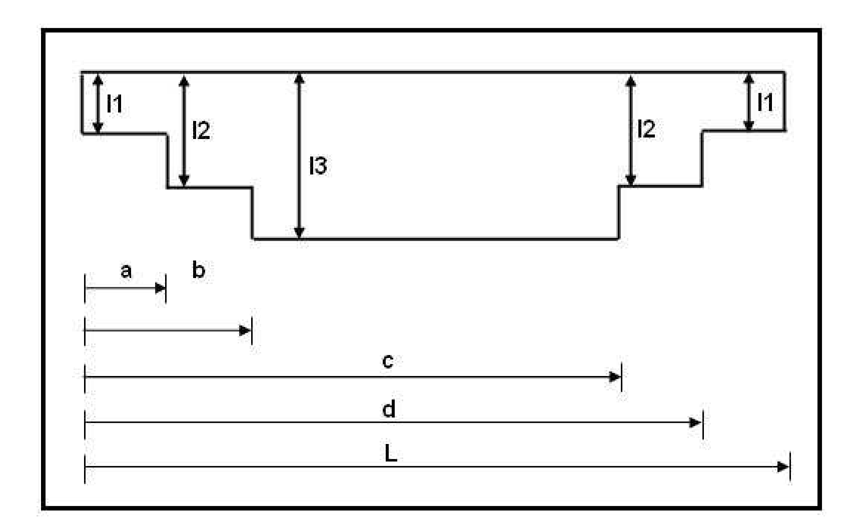
Para el elemento lineal presentado en la figura 12.2 obtener la matriz de rigidez usando el concepto. Por lo tanto encontrar las fuerzas y momentos que producen un determinado corrimiento unitario.

EJERCICIO N.- 2

Obtener los elementos de la quinta columna de la matriz de rigidez de un elemento con dos sectores de rigidez infinita.

EJERCICIO N.- 3

Usando el diagrama de masas elásticas elaborar un programa para calcular $\alpha, \varepsilon, \alpha'$ para el siguiente elemento:



EJERCICIO N.- 4

Presentar un caso práctico en donde se puede emplear los resultados obtenidos en el ejercicio anterior. Ilustre lo mismo para el caso de un elemento con dos sectores de rigidez infinita.

EJERCICIO N.- 5

Generalice el Ejercicio N.- 3 y elabore un diagrama de flujo para obtener $\alpha, \varepsilon, \alpha'$ para una viga escalonada con inercias diferentes. El número de escalones es arbitrario.

CAPITULO 13

ENSAMBLAJE DIRECTO DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ DE UNA ESTRUCTURA

RESUMEN

Se presenta el fundamento matemático que conduce al algoritmo denominado ensamblaje directo para encontrar la matriz de rigidez de una estructura por medio del ordenador. Se obtiene esta matriz para estructuras planas cuyos elementos se estudiaron en el capítulo 12. Finalmente se indica la forma de cómo obtener la matriz de rigidez para armaduras y pórticos planos utilizando el programa CAL.

13. 1 MATRIZ DE COMPATIBILIDAD A

Se va a obtener la matriz de compatibilidad $\boldsymbol{A}$ orientado al uso del ordenador, para el pórtico plano de la figura 13.1.1. Para no escribir demasiados números el marco que se analiza solo tiene dos elementos. En la figura 13.1.2 se indica el sistema de coordenadas globales de los elementos que se denomina sistema $\boldsymbol{P}-\boldsymbol{p}$ y en la figura 13.1.3 el sistema de coordenadas generalizadas $\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{q}$ de la estructura que tiene 4 grados de libertad.

Antes de calcular la matriz de compatibilidad es necesario realizar las siguientes acotaciones:

i) Los elementos del pórtico plano son totalmente flexibles, ésta hipótesis facilita la elaboración de un programa de computación para obtener la matriz de rigidez de la estructura.

ii) El sistema de coordenadas $\boldsymbol{P}-\boldsymbol{p}$ se considera en coordenadas globales.

Para el ejemplo analizado las seis primeras coordenadas del elemento corresponden a la columna y las siguientes seis a la viga.

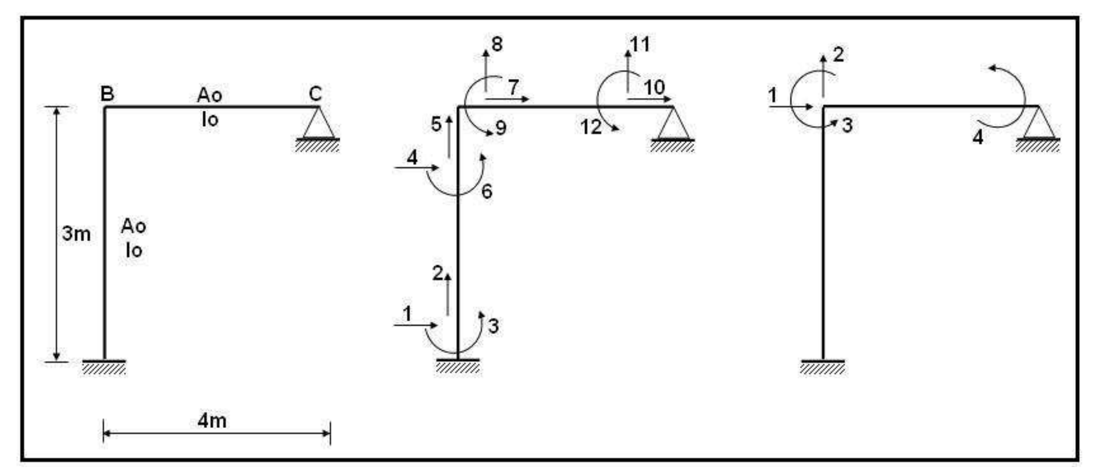


Figura 13.1.1 **Figura 13.1.2** Sistema $Q-q$ **Figura 13.1.3** Sistema $P-p$

Si bien es cierto en el capítulo 5 ya se presentó las coordenadas globales de un elemento y en el capítulo a2 se obtuvo la matriz de rigidez en coordenadas globales nos es menos cierto que todavía no se ha hablado sobre el significado de las deformaciones p y las cargas P lo que se realiza a continuación pero previamente en la figura 13.2 se presentan las coordenadas globales de un elemento inclinado que es el caso más general.

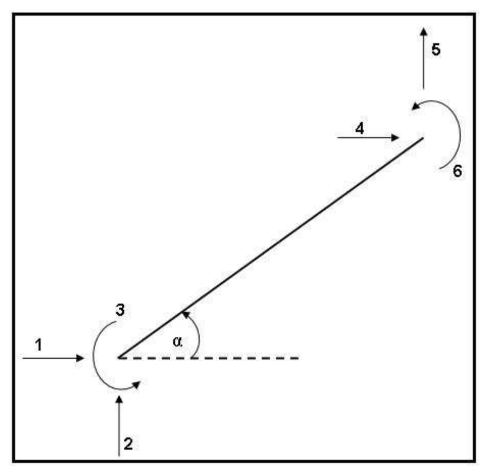


Figura 13.2 Coordenadas globales de un elemento.

El vector transpuesto de las deformaciones p tiene la siguiente forma:

$$p^t = [p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad p_4 \quad p_5 \quad p_6]$$

La convención de signos positiva de las deformaciones p se indica en la figura 13.2 y su significado es el siguiente:

p_1 es la componente de desplazamiento horizontal del nudo inicial.

p_2 es la componente de desplazamiento vertical del nudo inicial.

p_3 es la rotación del nudo inicial.

p_4 es la componente de desplazamiento horizontal del nudo inicial.

p_5 es la componente de desplazamiento vertical del nudo inicial.

p_6 es la rotación del nudo inicial.

Por otra parte el vector de cargas P es:

$$\boldsymbol{P^t} = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 \end{bmatrix}$$

P_1 es la fuerza horizontal en el nudo inicial.
P_2 es la fuerza vertical en el nudo inicial.
P_3 es el momento del nudo inicial.
P_4 es la fuerza horizontal del nudo final.
P_5 es la fuerza vertical del nudo final.
P_6 es el momento del nudo final.

Se destaca que en los programas de computación las estructuras se resuelven en coordenadas globales.

Retornando al objetivo inicial del presente apartado a continuación se procede a calcular la matriz $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{q}$$

- **Primera columna de A**

$$q_1 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 1$$

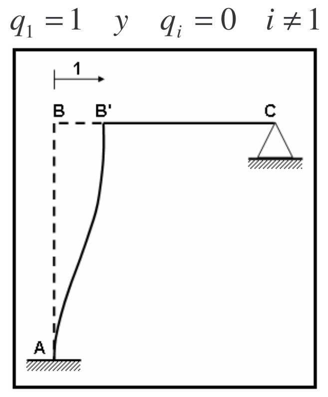


Figura 13.3.1

$p_1 = 0 \quad p_2 = 0 \quad p_3 = 0 \quad p_4 = 1 \quad p_5 = 0 \quad p_6 = 0$

$p_7 = 1 \quad p_8 = 0 \quad p_9 = 0 \quad p_{10} = 0 \quad p_{11} = 0 \quad p_{12} = 0$

- **Segunda columna de A**

$$q_2 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 2$$

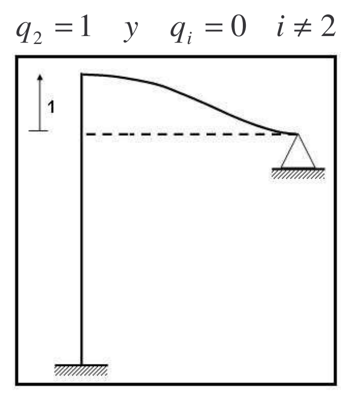


Figura 13.3.2

$p_1 = 0$ $p_2 = 0$ $p_3 = 0$ $p_4 = 0$ $p_5 = 1$ $p_6 = 0$
$p_7 = 1$ $p_8 = 1$ $p_9 = 0$ $p_{10} = 0$ $p_{11} = 0$ $p_{12} = 0$

- **Tercera columna de A**

$$q_3 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 3$$

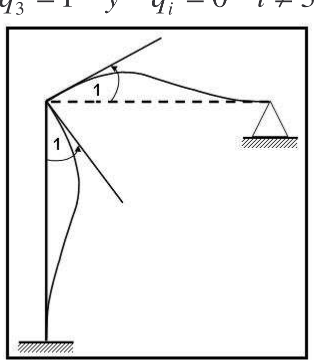


Figura 13.3.3

$p_1 = 0$ $p_2 = 0$ $p_3 = 0$ $p_4 = 0$ $p_5 = 0$ $p_6 = 1$
$p_7 = 0$ $p_8 = 0$ $p_9 = 1$ $p_{10} = 0$ $p_{11} = 0$ $p_{12} = 0$

- **Cuarta columna de A**

$$q_4 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 4$$

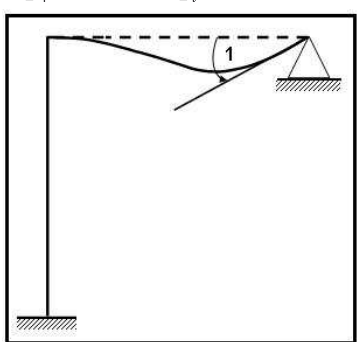


Figura 13.3.4

$p_1 = 0$ $p_2 = 0$ $p_3 = 0$ $p_4 = 0$ $p_5 = 0$ $p_6 = 0$
$p_7 = 0$ $p_8 = 0$ $p_9 = 0$ $p_{10} = 0$ $p_{11} = 0$ $p_{12} = 1$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^{(1)} \\ === \\ \boldsymbol{A}^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz $\boldsymbol{A}$ orientada al uso del computador está compuesta únicamente por ceros y unos, como se acaba de apreciar. Su cálculo es muy sencillo pero implica demasiados números.

13.2 MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA ESTRUCTURA

La matriz de rigidez de un elemento está en concordancia con el sistema de coordenadas del elemento. Por lo tanto si el sistema de coordenadas de miembro está en coordenadas globales la matriz de rigidez del elemento se evaluará en coordenadas globales.

Por ahora no interesan los valores de la matriz de rigidez de un elemento razón por la cual se resuelve en forma literal el pórtico plano de la figura 13.1.1. Se va a utilizar el índice 1 para indicar que corresponde a la columna y el índice 2 para la viga. Al emplear los formularios indicados en el capítulo 12 y considerando que se resuelve literalmente se tiene para el ejemplo, lo siguiente:

$$k^{(1)} = \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & k_{13}^{(1)} & k_{14}^{(1)} & k_{15}^{(1)} & k_{16}^{(1)} \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} & k_{23}^{(1)} & k_{24}^{(1)} & k_{25}^{(1)} & k_{26}^{(1)} \\ k_{31}^{(1)} & k_{32}^{(1)} & k_{33}^{(1)} & k_{34}^{(1)} & k_{35}^{(1)} & k_{36}^{(1)} \\ k_{41}^{(1)} & k_{42}^{(1)} & k_{43}^{(1)} & k_{44}^{(1)} & k_{45}^{(1)} & k_{46}^{(1)} \\ k_{51}^{(1)} & k_{52}^{(1)} & k_{53}^{(1)} & k_{54}^{(1)} & k_{55}^{(1)} & k_{56}^{(1)} \\ k_{61}^{(1)} & k_{62}^{(1)} & k_{63}^{(1)} & k_{64}^{(1)} & k_{65}^{(1)} & k_{66}^{(1)} \end{bmatrix}$$

$$k^{(2)} = \begin{bmatrix} k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} & k_{13}^{(2)} & k_{14}^{(2)} & k_{15}^{(2)} & k_{16}^{(2)} \\ k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} & k_{23}^{(2)} & k_{24}^{(2)} & k_{25}^{(2)} & k_{26}^{(2)} \\ k_{31}^{(2)} & k_{32}^{(2)} & k_{33}^{(2)} & k_{34}^{(2)} & k_{35}^{(2)} & k_{36}^{(2)} \\ k_{41}^{(2)} & k_{42}^{(2)} & k_{43}^{(2)} & k_{44}^{(2)} & k_{45}^{(2)} & k_{46}^{(2)} \\ k_{51}^{(2)} & k_{52}^{(2)} & k_{53}^{(2)} & k_{54}^{(2)} & k_{55}^{(2)} & k_{56}^{(2)} \\ k_{61}^{(2)} & k_{62}^{(2)} & k_{63}^{(2)} & k_{64}^{(2)} & k_{65}^{(2)} & k_{66}^{(2)} \end{bmatrix}$$

Como se estudio en el capítulo 10, la matriz de rigidez de la estructura se obtiene con la siguiente ecuación.

$$\boldsymbol{K} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{A}^{(i)\,t} \boldsymbol{k}^{(i)} \boldsymbol{A}^{(i)}$$

Para el presente ejemplo los triples productos matriciales indicados en la ecuación 2, son:

- **Producto** $\boldsymbol{A}^{(1)t}\ \boldsymbol{K}^{(i)}\ \boldsymbol{A}^{(i)}$

$$\boldsymbol{A}^{(1)t}\boldsymbol{k}^{(1)}\ \boldsymbol{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} k_{44}^{(1)} & k_{45}^{(1)} & k_{46}^{(1)} & 0 \\ k_{54}^{(1)} & k_{55}^{(1)} & k_{56}^{(1)} & 0 \\ k_{64}^{(1)} & k_{65}^{(1)} & k_{66}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Producto** $\boldsymbol{A}^{(2)t}\ \boldsymbol{K}^{(2)}\ \boldsymbol{A}^{(2)}$

$$\boldsymbol{A}^{(2)t}\boldsymbol{k}^{(2)}\ \boldsymbol{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} & k_{13}^{(2)} & k_{16}^{(2)} \\ k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} & k_{23}^{(2)} & k_{26}^{(2)} \\ k_{31}^{(2)} & k_{32}^{(2)} & k_{33}^{(2)} & k_{36}^{(2)} \\ k_{61}^{(2)} & k_{62}^{(2)} & k_{63}^{(2)} & k_{66}^{(2)} \end{bmatrix}$$

Luego la matriz de rigidez del marco plano resulta:

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} k_{44}^{(1)} + k_{11}^{(2)} & \vdots\ k_{45}^{(1)} + k_{12}^{(2)} & \vdots\ k_{46}^{(1)} + k_{13}^{(2)} & \vdots\ k_{16}^{(2)} \\ \hdashline k_{54}^{(1)} + k_{21}^{(2)} & \vdots\ k_{55}^{(1)} + k_{22}^{(2)} & \vdots\ k_{56}^{(1)} + k_{23}^{(2)} & \vdots\ k_{26}^{(2)} \\ \hdashline k_{64}^{(1)} + k_{31}^{(2)} & \vdots\ k_{65}^{(1)} + k_{32}^{(2)} & \vdots\ k_{66}^{(1)} + k_{33}^{(2)} & \vdots\ k_{36}^{(2)} \\ \hdashline k_{61}^{(2)} & \vdots\ k_{62}^{(2)} & \vdots\ k_{63}^{(2)} & \vdots\ k_{66}^{(2)} \end{bmatrix}$$

13.3 ENSAMBLAJE DIRECTO

En el capítulo 5 se definió lo que es el vector de colocación, VC, de un elemento; para el marco plano de la figura 13.1.3 los vectores de colocación, son:

$$VC(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$VC(2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Los tres primeros dígitos de VC corresponden a los grados de libertad del nudo inicial y los tres últimos a los grados de libertad del nudo final.

Se llega a obtener el mismo resultado de la matriz de rigidez de la estructura analizada en los numerales anteriores, si sobre la matriz de rigidez de cada elemento se coloca el vector de colocación respectivo, en la parte superior y a la derecha, como se explica a continuación.

Los elementos de la primera columna de la matriz de rigidez del elemento 1 van a la posición cero en la matriz de rigidez de la estructura pero como no existe la posición toda la primera columna no contribuye, razón por la cual se traza una línea vertical, lo propio sucede con la segunda y tercera columnas. Los elementos de la cuarta columna si contribuyen a la formación de **K**. Ahora bien, a nivel de filas, la primera fila tiene un cero por lo que no contribuye trazándose por tanto una línea horizontal, de igual manera la segunda y tercera filas no contribuyen.

- **Elemento 1**

$$[\,0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3\,]$$

$$k^{(1)} = \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & k_{13}^{(1)} & k_{14}^{(1)} & k_{15}^{(1)} & k_{16}^{(1)} \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} & k_{23}^{(1)} & k_{24}^{(1)} & k_{25}^{(1)} & k_{26}^{(1)} \\ k_{31}^{(1)} & k_{32}^{(1)} & k_{33}^{(1)} & k_{34}^{(1)} & k_{35}^{(1)} & k_{36}^{(1)} \\ k_{41}^{(1)} & k_{42}^{(1)} & k_{43}^{(1)} & k_{44}^{(1)} & k_{45}^{(1)} & k_{46}^{(1)} \\ k_{51}^{(1)} & k_{52}^{(1)} & k_{53}^{(1)} & k_{54}^{(1)} & k_{55}^{(1)} & k_{56}^{(1)} \\ k_{61}^{(1)} & k_{62}^{(1)} & k_{63}^{(1)} & k_{64}^{(1)} & k_{65}^{(1)} & k_{66}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Los elementos no rayados son la contribución del elemento 1 a la matriz de rigidez de la estructura. El vector de colocación indica la posición en la cual deben ubicarse estos términos así el elemento $k_{44}^{(1)}$ va a la columna 1 fila 1, el término $k_{54}^{(1)}$ va a la columna 1 fila 2, etc.

Por lo tanto la matriz de rigidez de miembro se ensambla en la matriz de rigidez de la estructura mediante su vector de colocación.

- **Elemento 2**

$$[\,1 \quad 2 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 4\,]$$

$$k^{(2)} = \begin{bmatrix} k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} & k_{13}^{(2)} & k_{14}^{(2)} & k_{15}^{(2)} & k_{16}^{(2)} \\ k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} & k_{23}^{(2)} & k_{24}^{(2)} & k_{25}^{(2)} & k_{26}^{(2)} \\ k_{31}^{(2)} & k_{32}^{(2)} & k_{33}^{(2)} & k_{34}^{(2)} & k_{35}^{(2)} & k_{36}^{(2)} \\ k_{41}^{(2)} & k_{42}^{(2)} & k_{43}^{(2)} & k_{44}^{(2)} & k_{45}^{(2)} & k_{46}^{(2)} \\ k_{51}^{(2)} & k_{52}^{(2)} & k_{53}^{(2)} & k_{54}^{(2)} & k_{55}^{(2)} & k_{56}^{(2)} \\ k_{61}^{(2)} & k_{62}^{(2)} & k_{63}^{(2)} & k_{64}^{(2)} & k_{65}^{(2)} & k_{66}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{matrix}$$

El elemento $k_{11}^{(2)}$ va a la posición (1 , 1) y se sumará al término $k_{44}^{(1)}$ que ya estaba en esa posición, el término $k_{21}^{(2)}$ va a la posición (2 , 1) y se suma a $k_{54}^{(1)}$, etc. De esta forma se obtiene la matriz de rigidez para la estructura de la figura N.- 13.1.1 y cuyo resultado se indica al final del apartado 13.2.

El fundamento del ensamblaje directo viene dado por el concepto de rigidez de una estructura asociado a la circunstancia de que la matriz **A** está compuesta únicamente por ceros y unos.

13.4 EJERCICIOS RESUELTOS

- **EJEMPLO N.- 1**

Determinar la matriz de rigidez, por ensamblaje directo de la estructura mostrada en la figura 13.4.1. El sistema de coordenadas de la estructura se indica en la figura 13.4.2 al igual que la numeración de los elementos. Considerar que: $\frac{I_0}{A_0 L^2} = \frac{1}{80}$

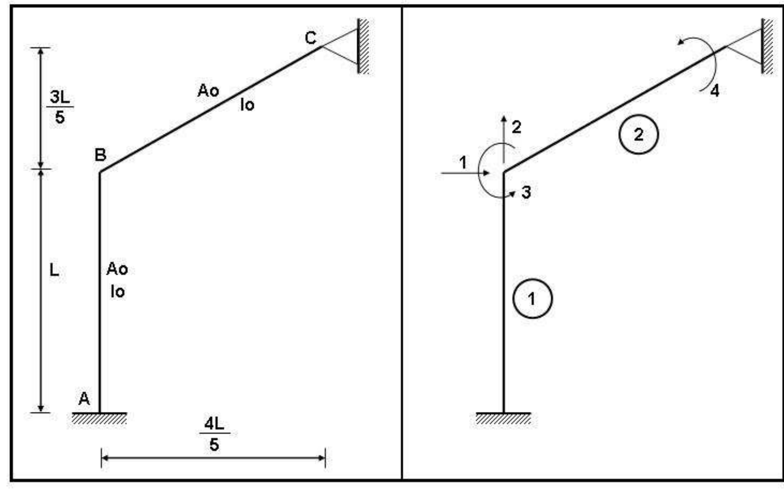


Figura 13.4.1 **Figura 13.4.2** Sistema **Q – q**

- **SOLUCIÓN**

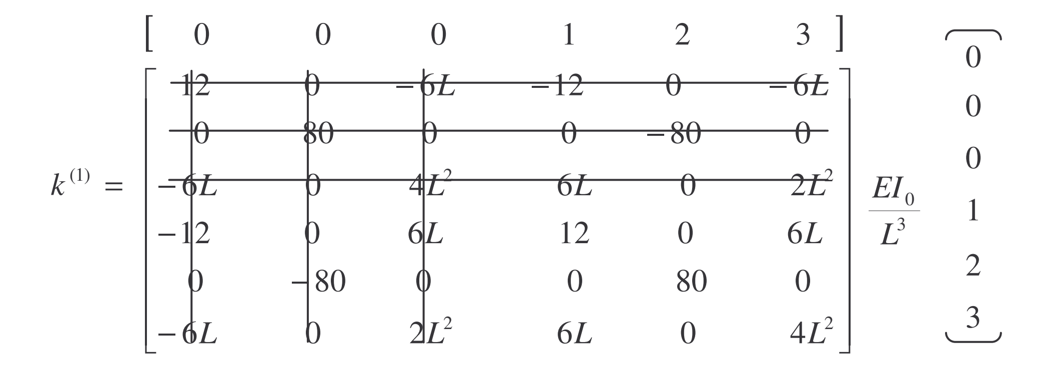
Para el 1, se considera que el nudo inicial corresponde a la junta A y el final al nudo B. Luego el ángulo que forma el eje del elemento con el eje X es 90 grados. La matriz de rigidez en coordenadas globales resulta.

$$\boldsymbol{k}^{(1)} = \begin{bmatrix} 12 & 0 & -6L & -12 & 0 & -6L \\ 0 & 80 & 0 & 0 & -80 & 0 \\ -6L & 0 & 4L^2 & 6L & 0 & 2L^2 \\ -12 & 0 & 6L & 12 & 0 & 6L \\ 0 & -80 & 0 & 0 & 80 & 0 \\ -6L & 0 & 2L^2 & 6L & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \frac{EI_0}{L^3}$$

No se considera el efecto de corte y se ha reemplazado la condición de que $A_0 = 80\ I_o / L^2$ dato del problema. Para el elemento 1 el vector de colocación es:

$$VC(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Luego al colocar el VC sobre y a la derecha de la matriz de rigidez de miembro, se tiene:



$$\begin{matrix} [\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3\ ] \end{matrix}$$

$$k^{(1)} = \begin{bmatrix} 12 & 0 & -6L & -12 & 0 & -6L \\ 0 & 80 & 0 & 0 & -80 & 0 \\ -6L & 0 & 4L^2 & 6L & 0 & 2L^2 \\ -12 & 0 & 6L & 12 & 0 & 6L \\ 0 & -80 & 0 & 0 & 80 & 0 \\ -6L & 0 & 2L^2 & 6L & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \frac{EI_0}{L^3} \quad \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

La matriz de rigidez de la estructura analizada es de 4 x 4 y la contribución del miembro 1, es:

$$
\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 12 & \vdots & & \vdots & 6L & \vdots & \\ \hdashline & \vdots & 80 & \vdots & & \vdots & \\ \hdashline 6L & \vdots & & \vdots & 4L^2 & \vdots & \\ \hdashline & \vdots & & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix} \frac{EI_o}{L^3}
$$

Para el elemento 2 se tiene que:

$$
sen\alpha = \frac{3}{5} \qquad \cos\alpha = \frac{4}{5}
$$

Al reemplazar estos valores en la matriz de rigidez de miembro en coordenadas globales y al proceder en forma similar al elemento 1 teniendo presente que:

$$
VC^{(2)} = [1 \quad 2 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 4]
$$

se tiene:

$$
\begin{matrix} [\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 4\ ] \end{matrix}
$$

$$
k^{(2)} = \frac{EI_o}{L^3} \begin{bmatrix} \frac{1388}{25} & \frac{816}{25} & -\frac{18L}{5} & -\frac{1388}{25} & -\frac{816}{25} & -\frac{18L}{5} \\ \frac{816}{25} & \frac{912}{25} & \frac{24L}{5} & -\frac{816}{25} & -\frac{912}{25} & \frac{24L}{5} \\ -\frac{18L}{5} & \frac{24L}{5} & 4L^2 & \frac{18L}{5} & -\frac{24L}{5} & 2L^2 \\ -\frac{1388}{25} & -\frac{816}{25} & \frac{18L}{5} & \frac{1388}{25} & \frac{816}{25} & \frac{18L}{5} \\ -\frac{816}{25} & -\frac{912}{25} & -\frac{24L}{5} & \frac{816}{25} & \frac{912}{25} & -\frac{24L}{5} \\ -\frac{18L}{5} & \frac{24L}{5} & 2L^2 & \frac{18L}{5} & -\frac{24L}{5} & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{matrix}
$$

La contribución del elemento 2 a la matriz de rigidez del pórtico analizado, es:

$$
K = \begin{bmatrix} \frac{1388}{25} & \vdots & \frac{816}{25} & \vdots & -\frac{18L}{5} & \vdots & -\frac{18L}{5} \\ \hdashline \frac{816}{25} & \vdots & \frac{912}{25} & \vdots & \frac{24L}{5} & \vdots & \frac{24L}{5} \\ \hdashline -\frac{18L}{5} & \vdots & \frac{24L}{5} & \vdots & 4L^2 & \vdots & 2L^2 \\ \hdashline -\frac{18L}{5} & \vdots & \frac{24L}{5} & \vdots & 2L^2 & \vdots & 4L^2 \end{bmatrix} \frac{EI_o}{L^3}
$$

Al sumar la contribución de los elementos 1 y 2 se obtiene:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{1688}{25} & \vdots & \frac{816}{25} & \vdots & \frac{12L}{5} & \vdots & \frac{-18L}{5} \\ \frac{816}{25} & \vdots & \frac{2912}{25} & \vdots & \frac{24L}{5} & \vdots & \frac{24L}{5} \\ \frac{12L}{5} & \vdots & \frac{24L}{5} & \vdots & 8L^2 & \vdots & 2L^2 \\ \frac{-18L}{5} & \vdots & \frac{24L}{5} & \vdots & 2L^2 & \vdots & 4L^2 \end{bmatrix} \frac{EI_o}{L^3}$$

- **EJEMPLO N.- 2**

Determinar la matriz de rigidez del pórtico plano presentado en la figura 13.5.1 si sus elementos son totalmente flexibles. Las columnas son de 40 x 40 y la viga de 30 x 30. Considerar un módulo $E = 2100000 \quad T/m^2$.

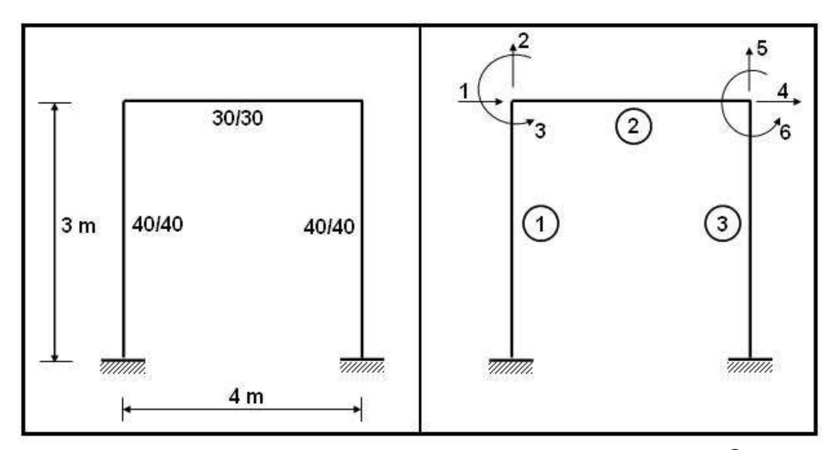


Figura 13.5.1 **Figura 13.5.2** Sistema $Q-q$

- **SOLUCIÓN**

Se indican las matrices de rigidez de los elementos en coordenadas globales y los respectivos vectores de colocación.

- **Elemento 1**

$$\boldsymbol{k}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1988.00 & 0.00 & -2982.00 & -1988.00 & 0.00 & -2982.00 \\ 0.00 & 112000.00 & 0.00 & 0.00 & -112000.00 & 0.00 \\ -2982.00 & 0.00 & 5964.00 & 2982.00 & 0.00 & 2982.00 \\ -1988.00 & 0.00 & 2982.00 & 1988.00 & 0.00 & 2982.00 \\ 0.00 & -112000.00 & 0.00 & 0.00 & 112000.00 & 0.00 \\ -2982.00 & 0.00 & 2982.00 & 2982.00 & 0.00 & 5964.00 \end{bmatrix}$$

$$VC^{(1)} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3]$$

- **Elemento 2**

$$\boldsymbol{k}^{(2)} = \begin{bmatrix} 47250.00 & 0.00 & 0.00 & -47250.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 267.75 & 535.50 & 0.00 & -267.75 & 535.50 \\ 0.00 & 535.50 & 1428.00 & 0.00 & -535.50 & 714.00 \\ -47250.00 & 0.00 & 0.00 & 47250.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & -267.75 & -535.50 & 0.00 & 267.75 & -535.50 \\ 0.00 & 535.50 & 714.00 & 0.00 & -535.50 & 1428.00 \end{bmatrix}$$

$$VC^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

- **Elemento 3**

$$\boldsymbol{k}^{(3)} = \boldsymbol{k}^{(1)}$$

$$VC^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Al realizar el ensamblaje de la matriz de rigidez de la estructura se obtiene:

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 49238.00 & 0.00 & 2982.00 & -47250.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 112270.00 & 535.50 & 0.00 & -267.75 & 535.50 \\ 2982.00 & 535.50 & 7392.00 & 0.00 & -535.50 & 714.00 \\ -47250.00 & 0.00 & 0.00 & 49238.00 & 0.00 & 2982.00 \\ 0.00 & -267.75 & -535.50 & 0.00 & 112270.00 & -535.50 \\ 0.00 & 535.50 & 714.00 & 2982.00 & -535.50 & 7392.00 \end{bmatrix}$$

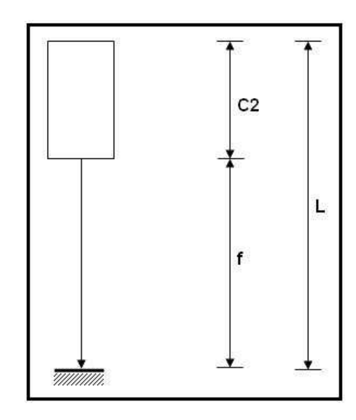
- **EJEMPLO N.- 3**

Resolver el ejemplo N.- 2 considerando que los nudos son rígidos.

- **SOLUCIÓN**

De acuerdo a la nomenclatura indicada en el capítulo 12, se tiene:

- **Elementos 1 y 3**



$C_1 = 0$ $\qquad C_2 = 0.15\ m.$ $\qquad f = 2.85\ m.$ $\qquad L = 3.00\ m$

$$\phi = \frac{3\beta EI}{GAf^2} = 0.01477$$

$$k^* = \frac{4EI_o}{f}\left(\frac{1+\phi}{1+4\phi}\right) = 6024.56652 = k'^*$$

$$a = \frac{2EI_o}{f}\left(\frac{1-2\phi}{1+4\phi}\right) = 2880.75171$$

$$b^* = \frac{6EI_o}{f^2}\left(\frac{1}{1+4\phi}\right) = 3124.67306 = b'^*$$

$$t^* = \frac{12EI_o}{f^3}\left(\frac{1}{1+4\phi}\right) = 2192.75303$$

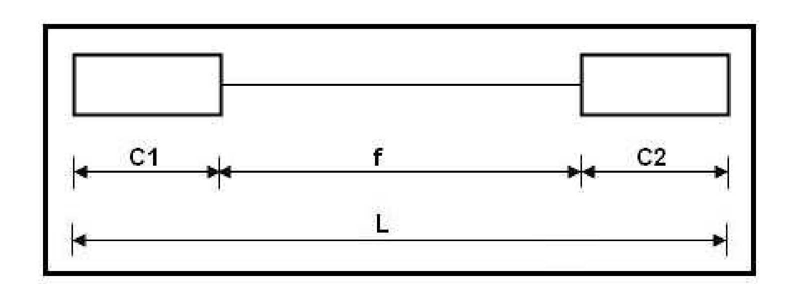
$$r^* = \frac{EA_o}{f} = 117894.7368$$

La matriz de rigidez en coordenadas globales resulta:

$$\boldsymbol{k}^{(1)} = \begin{bmatrix} 2192.80 & 0.00 & -3124.70 & -2192.80 & 0.00 & -3453.60 \\ 0.00 & 117894.70 & 0.00 & 0.00 & -117894.00 & 0.00 \\ -3124.70 & 0.00 & 6024.60 & 3124.70 & 0.00 & 3349.50 \\ -2192.70 & 0.00 & 3142.70 & 2192.80 & 0.00 & 3453.60 \\ 0.00 & -117894.70 & 0.00 & 0.00 & 117894.70 & 0.00 \\ -3453.60 & 0.00 & 3349.50 & 3353.60 & 0.00 & 7011.30 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{k}^{(1)} = \boldsymbol{k}^{(3)}$$

- **Elemento 2**



$C_1 = 0.20$ $\qquad C_2 = 0.20\ m.$ $\qquad f = 3.60\ m.$ $\qquad L = 4.00\ m$

$$\phi = \frac{3\beta EI}{GAf^2} = 0.00521$$

$$k^* = \frac{4EI_o}{f}\left(\frac{1+\phi}{1+4\phi}\right) = 1550.89543 = k'^*$$

$$a = \frac{2EI_o}{f}\left(\frac{1-2\phi}{1+4\phi}\right) = 763.39029$$

$$b^* = \frac{6EI_o}{f^2}\left(\frac{1}{1+4\phi}\right) = 642.85714 = b'^*$$

$$t^* = \frac{12EI_o}{f^3}\left(\frac{1}{1+4\phi}\right) = 357.14286$$

$$r^* = \frac{EA_o}{f} = 52500$$

La matriz de rigidez en coordenadas globales resulta:

$$\boldsymbol{k}^{(2)} = \begin{bmatrix} 52500.00 & 0.00 & 0.00 & -52500.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 357.14 & 714.29 & 0.00 & -357.14 & 714.29 \\ 0.00 & 714.29 & 1822.32 & 0.00 & -714.29 & 777.68 \\ -52500.00 & 0.00 & 0.00 & 52500.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & -357.14 & -714.29 & 0.00 & 357.14 & -714.29 \\ 0.00 & 714.29 & 777.68 & 0.00 & -714.29 & 1822.32 \end{bmatrix}$$

Los vectores de colocación de cada elemento son los indicados en el ejemplo anterior, razón por la cual no se los ha presentado. Al efectuar el ensamblaje se obtiene:

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 54693.00 & 0.00 & 3453.60 & -52500.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 118250.00 & 714.29 & 0.00 & -357.14 & 714.29 \\ 3453.60 & 714.29 & 8833.60 & 0.00 & -714.29 & 777.68 \\ -52500.00 & 0.00 & 0.00 & 54693.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & -357.14 & -714.29 & 0.00 & 118250.00 & -714.29 \\ 0.00 & 714.29 & 777.68 & 3453.60 & -714.29 & 8833.60 \end{bmatrix}$$

- **EJEMPLO N.- 4**

Determinar la matriz de rigidez por ensamblaje directo de la armadura plana indicada en la figura 13.6.1. En la tabla 13.1 se indica el área de cada uno de los elementos. Por otra parte en la figura 13.6.2 se presenta el sistema de coordenadas generalizadas $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{q}$

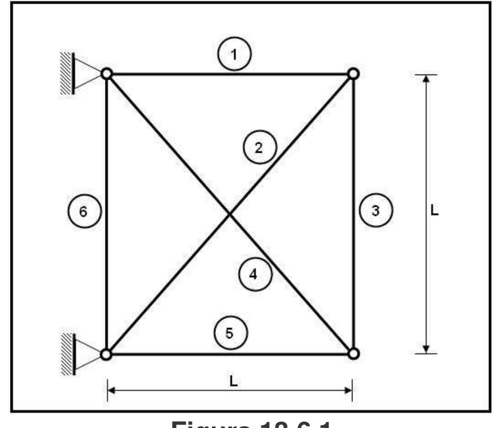


Figura 13.6.1

Tabla 13.1 Área transversal de los elementos.

Elemento	Área Transversal
1	A_o
2	$\frac{A_o}{\sqrt{2}}$
3	A_o
4	$\frac{A_o}{\sqrt{2}}$
5	A_o
6	A_o

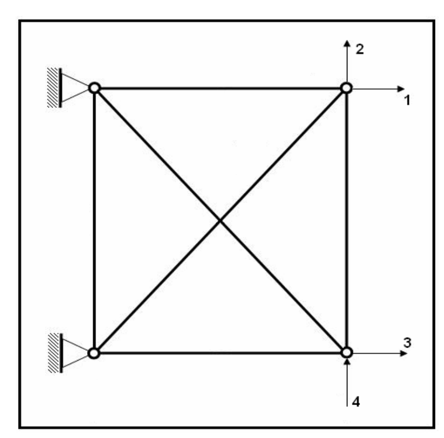


Figura 13.6.2 Sistema $Q-q$

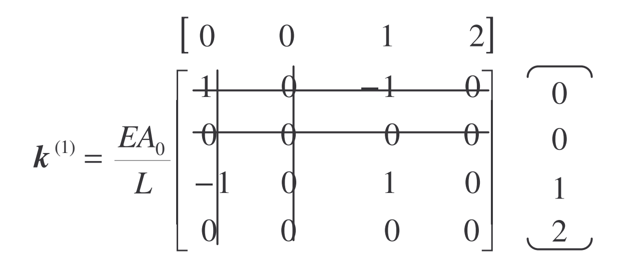
- **SOLUCIÓN**

De acuerdo al sistema de coordenadas generalizadas indicadas en la figura 13.6.2, los vectores de colocación de cada elemento son los siguientes:

$$VC(1) = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 2]$$
$$VC(2) = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 2]$$
$$VC(3) = [3 \quad 4 \quad 1 \quad 2]$$
$$VC(4) = [3 \quad 4 \quad 0 \quad 0]$$
$$VC(5) = [0 \quad 0 \quad 3 \quad 4]$$
$$VC(3) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

A continuación se escribe la matriz de rigidez de cada uno de los elementos en coordenadas globales con su respectivo vector de colocación colocado sobre la matriz y a la derecha.

- **Elemento 1**



$$\begin{matrix} & [0 & 0 & 1 & 2] \\ k^{(1)} = \frac{EA_0}{L} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \end{matrix}$$

- **Elemento 2**

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{k}^{(2)} = \frac{EA_0}{2L}\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

- **Elemento 3**

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{k}^{(3)} = \frac{EA_0}{L}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

- **Elemento 4**

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{k}^{(4)} = \frac{EA_0}{2L}\begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

- **Elemento 5**

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{k}^{(5)} = \frac{\boldsymbol{EA_0}}{\boldsymbol{L}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

- **Ensamblaje de la matriz de rigidez de la estructura**

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 1+0.25 & 0.25 & & \\ 0.25 & 0.25+1 & & -1 \\ & & 0.25+1 & -0.25 \\ & -1 & -0.25 & 1+0.25 \end{bmatrix} \frac{EA_0}{L}$$

Luego, la matriz de la estructura, resulta:

$$K = \frac{EA_0}{L}\begin{bmatrix} 1.25 & 0.25 & 0.0 & 0.0 \\ 0.25 & 1.25 & 0.0 & -1.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.25 & -0.25 \\ 0.0 & -1.0 & -0.25 & 1.25 \end{bmatrix}$$

- **EJEMPLO N.- 5**

Encontrar la matriz de rigidez de miembro de la estructura de la figura 13.7.1, en el cual el miembro vertical es un elemento de un pórtico plano y el horizontal de una armadura plana. Considerar los grados de libertad de la figura 13.7.2.

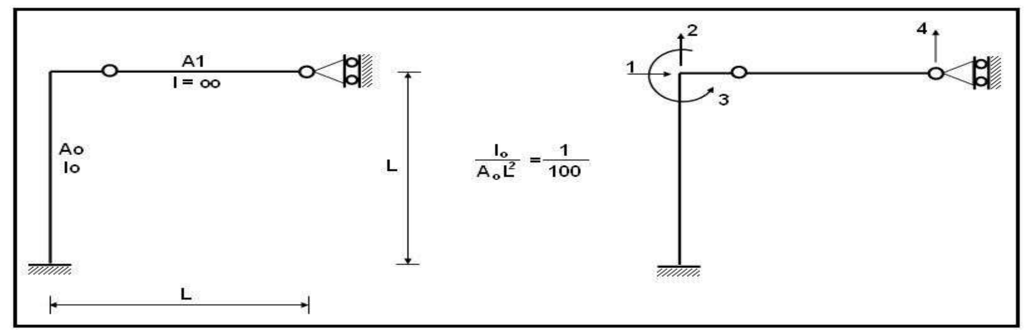


Figura N.- 13.7.1 Pórtico del ejemplo N.- 5 **Figura N.- 13.7.2** Sistema $Q - q$.

- **SOLUCIÓN**

  - **Elemento Vertical**

$$k = \begin{bmatrix} 12 & 0 & -6L & -12 & 0 & -6L \\ 0 & 100 & 0 & 0 & -100 & 0 \\ -6L & 0 & 4L^2 & 6L & 0 & 2L^2 \\ -12 & 0 & 6L & 12 & 0 & 6L \\ 0 & -100 & 0 & 0 & 100 & 0 \\ -6L & 0 & 2L^2 & 6L & 0 & 4L^2 \end{bmatrix}\frac{EI_o}{L^3}$$

$$VC^{(1)} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3]$$

  - **Elemento Horizontal**

$$k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\frac{EA_1}{L}$$

$$VC^{(2)} = [1 \quad 2 \quad 0 \quad 4]$$

- **Ensamblaje Directo**

$$K = \begin{bmatrix} \frac{12EI_o}{L^3} + \frac{EA_1}{L} & 0 & \frac{6EI_o}{L^2} & 0 \\ 0 & \frac{100EI_o}{L^3} & 0 & 0 \\ \frac{6EI_o}{L^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **EJEMPLO N.- 6**

Encontrar la matriz de rigidez por ensamblaje directo de la estructura de la figura 13.8.1. La variación de inercia del elemento horizontal se presenta en la figura 13.8.2 y se desprecia la deformación axial en dicho elemento. Considerar $E = 2100000\ T/m^2$.

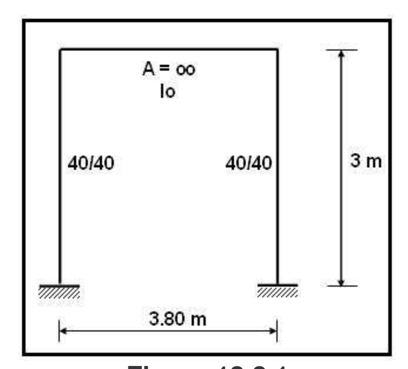


Figura 13.8.1

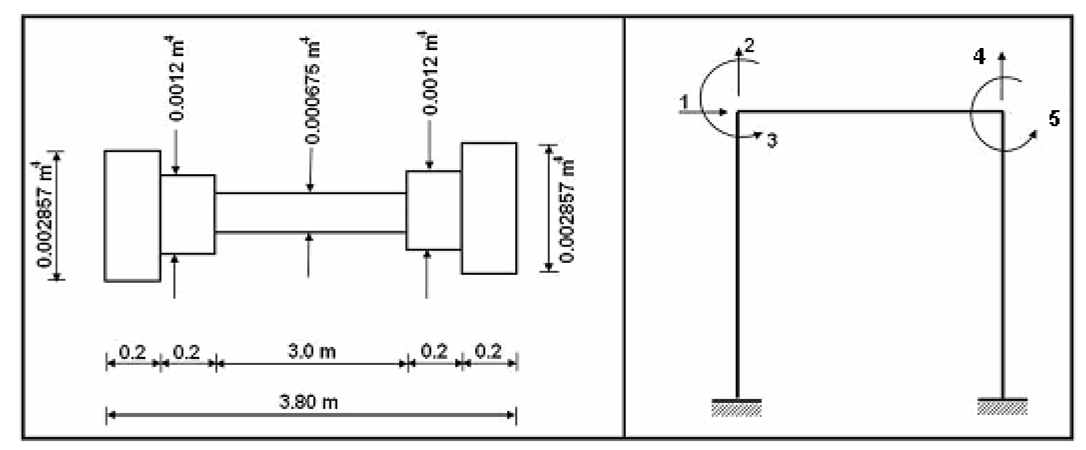


Figura 13.8.2 Variación de inercia en elemento horizontal. **Figura 13.8.3** Sistema $Q-q$

- **SOLUCIÓN**

En la figura 13.8.3 se presenta el sistema de coordenadas con el cual se resuelve el problema. Nótese que hay 5 grados de libertad esto se debe a que el elemento horizontal es axialmente rígido. En la figura 13.8.4 se presenta el diagrama de masas elásticas para el elemento con inercia escalonada que se analiza.

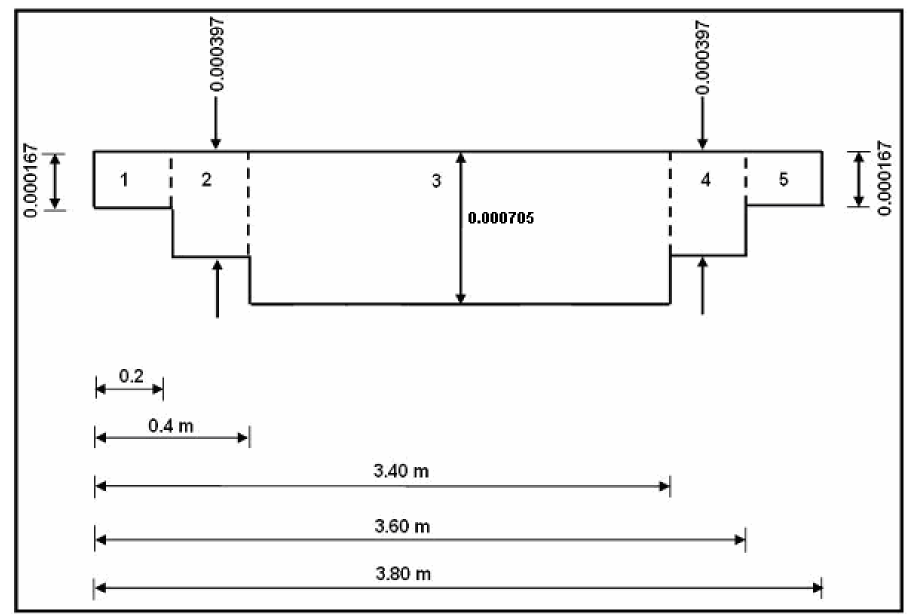


Figura 13.8.4 Diagrama de masas elásticas y figuras elementales.

En base a la nomenclatura y teoría expuesta en el capítulo anterior, en la tabla 13.2 se indica el cálculo de los momentos de inercia del diagrama de masas elásticas.

Tabla 13.2 Cálculo de momentos de inercia

Figura	X_0	W	I_Y	I_Y'
	(m)	(m^2)	(m^4)	(m^4)
1	0.10	0.000033	4.45333x10^{-7}	0.000457
2	0.30	0.000079	0.000007	0.000973
3	1.90	0.002115	0.009221	0.009221
4	3.50	0.000079	0.000973	0.000007
5	3.70	0.000033	0.000457	4.45333x10^{-7}
	SUMATORIA	0.002339	0.010658	0.010658

$$\alpha = \frac{I_Y'}{L^2} = \frac{0.010658}{3.8^2} = 0.000738$$

$$\alpha' = \frac{I_Y}{L^2} = \frac{0.010658}{3.8^2} = 0.000738$$

$$\varepsilon = \frac{W - \alpha - \alpha'}{2} = \frac{0.002339 - 2\,(0.000738)}{2} = 0.000432$$

$$\alpha\,\alpha' - \varepsilon^2 = (0.000738)^2 - (0.000432)^2 = 3.580942x10^{-7}$$

$$k = k' = \frac{\alpha}{\alpha\,\alpha' - \varepsilon^2} = \frac{0.000738}{3.580942x10^{-7}} = 2060.9104$$

$$a = \frac{\varepsilon}{\alpha\,\alpha' - \varepsilon^2} = \frac{0.000432}{3.580942x10^{-7}} = 1260.3865$$

$$b = b' = \frac{k + a}{L} = \frac{2060.9104 + 1260.3865}{3.80} = 874.0255$$

$$t = \frac{b + b'}{L} = \frac{2\,(874.0255)}{3.80} = 460.0134$$

La matriz de rigidez del elemento en coordenadas locales para un elemento de sección constante sin considerar la deformación axial es:

$$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} t & b & -t & b' \\ b & k & -b & a \\ -t & -b & t & -b' \\ b' & a & -b' & k' \end{bmatrix}$$

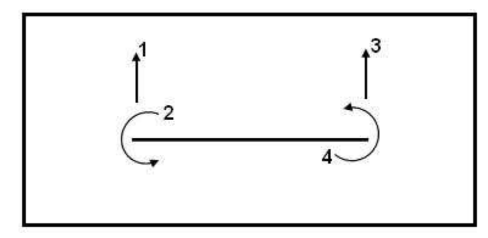


Figura 13.8.5 Sistema $\boldsymbol{P}-\boldsymbol{p}$

El sistema de coordenadas para el elemento horizontal se indica en la figura 13.8.5. Por ser el elemento horizontal la matriz de rigidez en coordenadas locales es igual a la matriz de rigidez en coordenadas globales. Por consiguiente al reemplazar los valores encontrados se tiene:

$$k = \begin{bmatrix} 460.0134 & 874.0255 & -460.0134 & 874.0255 \\ 874.0255 & 2060.9104 & -874.0255 & 1260.3865 \\ -460.0134 & -874.0255 & 460.0134 & -874.0255 \\ 874.0255 & 1260.3865 & -874.0255 & 2060.9104 \end{bmatrix}$$

El vector de colocación para el elemento horizontal es:

$$VC = [2 \quad 3 \quad 4 \quad 5]$$

La matriz de rigidez de miembro en coordenadas globales de los elementos verticales es la misma y corresponde a la mostrada en el ejemplo 2. Esta es:

$$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} 1988.00 & 0.00 & -2982.00 & -1988.00 & 0.00 & -2982.00 \\ 0.00 & 112000.00 & 0.00 & 0.00 & -112000.00 & 0.00 \\ -2982.00 & 0.00 & 5964.00 & 2982.00 & 0.00 & 2982.00 \\ -1988.00 & 0.00 & 2982.00 & 1988.00 & 0.00 & 2982.00 \\ 0.00 & -112000.00 & 0.00 & 0.00 & 112000.00 & 0.00 \\ -2982.00 & 0.00 & 2982.00 & 2982.00 & 0.00 & 5964.00 \end{bmatrix}$$

Los vectores de colocación para los elementos verticales izquierdo y derecho, respectivamente, son:

$$VC = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3]$$
$$VC = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 4 \quad 5]$$

Al efectuar el ensamblaje directo se obtiene la matriz de rigidez buscada.

$$K = \begin{bmatrix} 3976.00 & 0.00 & 2982.00 & 0.00 & 2982.00 \\ 0.00 & 112460.00 & 874.00 & -460.00 & 874.00 \\ 2982.00 & 874.00 & 8024.90 & -874.00 & 1260.40 \\ 0.00 & -460.00 & -874.00 & 112460.00 & -874.00 \\ 2982.00 & 874.00 & 1260.40 & -874.00 & 8024.90 \end{bmatrix}$$

13.5 OTROS COMANDOS DE CAL

En este numeral se indican algunos comandos de CAL orientados exclusivamente al cálculo de la matriz de rigidez de una estructura por ensamblaje directo en pórticos planos y armaduras planas.

- **LOADI VC R=? C=?**

Este comando sirve para cargar los vectores de colocación de cada uno de los elementos de la estructura los mismos que están inmersos en la matriz denominada VC. El nombre que se da a esta matriz es arbitraria.

Cada una de las columnas de VC contiene el vector de colocación de un elemento. Para pórticos planos y armaduras planas el valor de R=6 para pórticos planos está correcto pero para armaduras planas debería ser 4 pero está programado para 6 de tal manera que cuando se trate de una armadura plana en el tercera y sexta fila que corresponden a los giros se colocará 0 para el caso de armadura plana.

- **ADDK K Ki VC N=?**

Con este comando se suma la contribución de la matriz de rigidez del elemento denominado **Ki** a la matriz de rigidez de la estructura **K**. Es necesario indicar la columna en la cual se encuentra el vector de colocación esto se realiza identificando la columna **N** del arreglo **VC.**

- **FRAME Ki T I = ? A = ? E = ? X = Xi, Xj Y = Yi, Yj**

El comando **FRAME** determina la matriz de rigidez de elemento **Ki** en coordenadas globales y la matriz de rotación de coordenadas locales a globales **T** pero la definida en el capítulo 5 para el programa CAL. Se debe especificar además la inercia de la sección transversal **I**, el área de la sección transversal **A**, el módulo de elasticidad del material **E** y las coordenadas del nudo inicial **i** y final **j**. Primero se indican las coordenadas en sentido **X**, luego en sentido **Y**. En los dos casos primero del nudo inicial y luego del nudo final. Es importante que todos los datos se den en unidades compatibles.

- **LOAD XYZ R=? C=?**

El comando **LOAD XYZ** sirve para definir las coordenadas X, Y, Z de un nudo de una armadura plana o espacial. Para cada nudo se ocupará una fila de datos. En armaduras planas se colocará Z=0. Es fundamental que la matriz que contiene las coordenadas de nudo se denomine XYZ.

- **TRUSS Ki T A = ? E = ? N = Ni,Nj**

El comando **TRUSS** permite calcular la matriz de rigidez de un elemento de una armadura plana o espacial en coordenadas globales. **Ki** es el nombre que se le da a la matriz de rigidez del elemento, **T** el nombre de la matriz que contiene la matriz de transformación de coordenadas locales a globales para CAL, **A** es el área de la sección transversal, **E** es el módulo de elasticidad del material, **N** sirve para identificar el nudo inicial y final del elemento de la armadura, es importante que antes se haya utilizado el comando LOAD XYZ.

- **EJEMPLO N.- 7**

Preparar el archivo de datos para CAL correspondiente a la estructura del ejemplo 2 resuelto en éste capítulo.

- **SOLUCIÓN**

```
B1
C   MATRIZ DE RIGIDEZ DE LOS ELEMENTOS EN COORDENADAS GLOBALES
FRAME   K1   T1   I=0.002133   A=0.16   E=2100000   X=0,0   Y=0,3
FRAME   K2   T2   I=0.000675   A=0.09   E=2100000   X=0,4   Y=3,3
FRAME   K3   T3   I=0.002133   A=0.16   E=2100000   X=4,4   Y=0,3
C   MATRIZ DE VECTORES DE COLOCACIÓN
LOADI   VC   R=6   C=3
0   1   0
0   2   0
0   3   0
1   4   4
2   5   5
3   6   6
C   MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA ESTRUCTURA
ZERO   K   R=6   C=6
ADDK   K   K1   VC   N=1
ADDK   K   K2   VC   N=2
ADDK   K   K3   VC   N=3
PRINT   K
QUIT
```

- **EJEMPLO N.- 8**

Preparar el archivo de datos para utilizar el programa CAL correspondiente a la armadura plana del ejemplo 4, si el valor de A_o es igual a 1 cm^2, el módulo de elasticidad es 2000000 Kg/cm^2 y la longitud L es igual a 30 cm.

- **SOLUCIÓN**

En la figura 13.9 se indica la numeración de los nudos y elementos de la armadura plana del ejemplo 4.

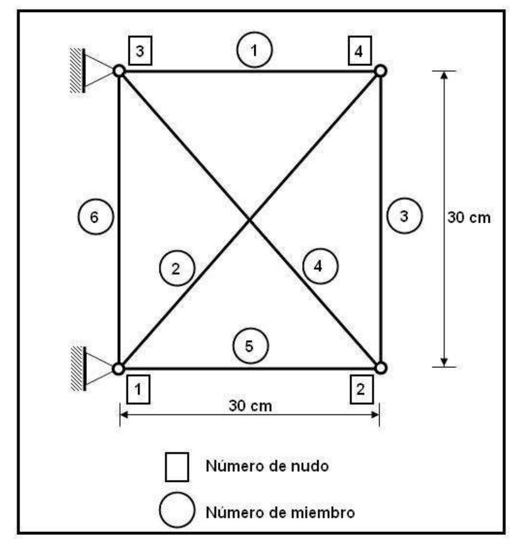


Figura 13.9 Numeración de nudos y elementos

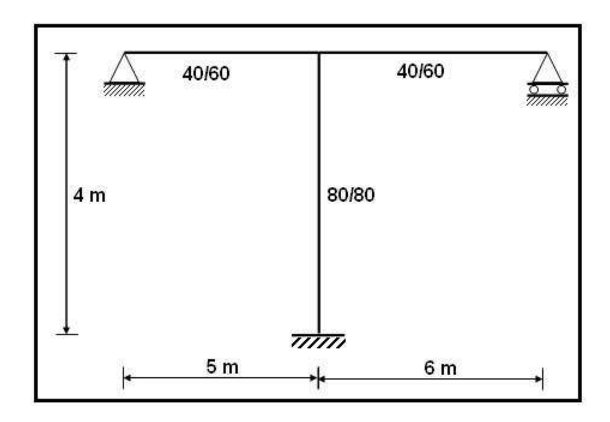
```
B1
C COORDENADAS DE LOS NUDOS
LOAD  XYZ    R=4  C=3
0      0      0
30     0      0
0      30     0
30     30     0
C MATRIZ DE RIGIDEZ DE LOS ELEMENTOS EN COORDENADAS GLOBALES
TRUSS  K1   T1    A=1    E=2000000    N=3,4
TRUSS  K2   T2    A=0.7071    E=2000000    N=1,4
TRUSS  K3   T3    A=1    E=2000000    N=2,4
TRUSS  K4   T4    A=0.7071    E=2000000    N=2,3
TRUSS  K5   T5    A=1    E=2000000    N=1,2
TRUSS  K6   T6    A=1    E=2000000    N=1,3
C MATRIZ DE VECTORES DE COLOCACION
LOADI   VC   R=6    C=6
0    0     3      3     0     0
0    0     4      4     0     0
0    0     0      0     0     0
1    1     1      0     3     0
2    2     2      0     4     0
0    0     0      0     0     0
C MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA ARMADURA PLANA
ZERO   K   R=4     C=4
ADDK    K     K1      VC    N=1
ADDK    K     K2      VC    N=2
ADDK    K     K3      VC    N=3
ADDK    K     K4      VC    N=4
ADDK    K     K5      VC    N=5
ADDK    K     K6      VC    N=6
PRINT    K
QUIT
```

Se ha presentado el archive de datos para el programa CAL para el sistema de coordenadas generalizadas indicado en la figura 13.6.2.

13.6 EJERCICIOS PROPUESTOS

EJERCICIO N.- 1

Determinar la matriz de rigidez por ensamblaje directo de la siguiente estructura, sin considerar nudos rígidos pero considerando el efecto de corte. Datos: $E = 2100000\ T/m^2$, $G = 0.4\ E$, $I_V = 0.072\ m^4$, $I_c = 0.03413\ m^4$.



EJERCICIO N.- 2

Preparar el archivo de datos para el programa CAL, para determinar la matriz de rigidez del ejercicio anterior.

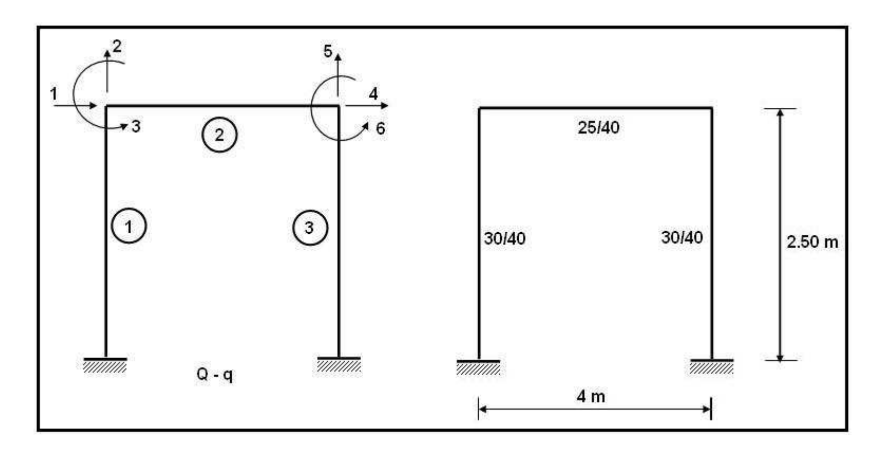
EJERCICIO N.- 3

Obtener la matriz de rigidez del ejercicio número 1 considerando nudos rígidos.

EJERCICIO N.- 4

Encontrar la matriz de rigidez de la siguiente estructura si los vectores de colocación son los siguientes:

$$VC(1) = [1 \quad 2 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$
$$VC(2) = [4 \quad 5 \quad 6 \quad 1 \quad 2 \quad 3]$$
$$VC(3) = [4 \quad 5 \quad 6 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

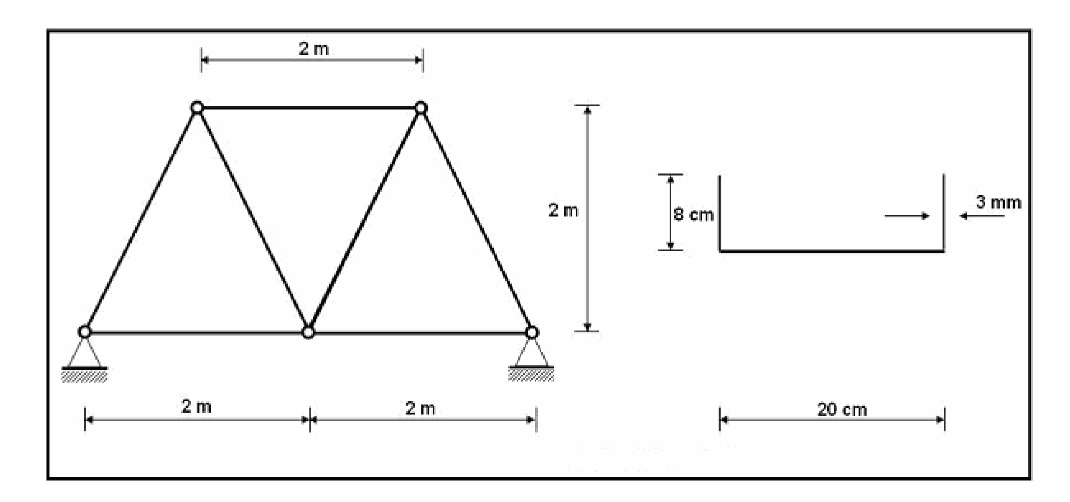


EJERCICIO N.- 5

Preparar el archivo de datos para el programa CAL del ejercicio 4.

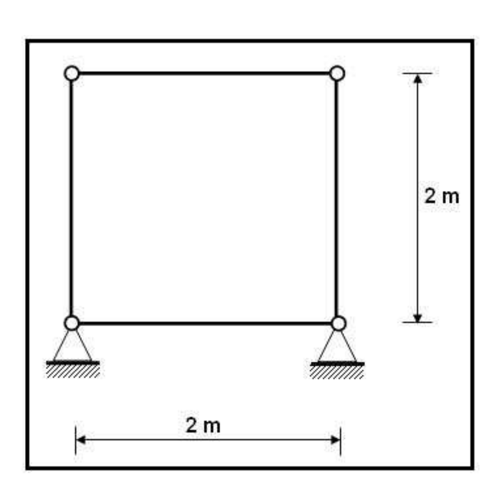
EJERCICIO N.- 6

Obtener la matriz de rigidez por ensamblaje directo de la siguiente armadura plana compuesta por perfiles C de 3 mm de espesor. Considerar $E = 2000000\ kg/cm^2$



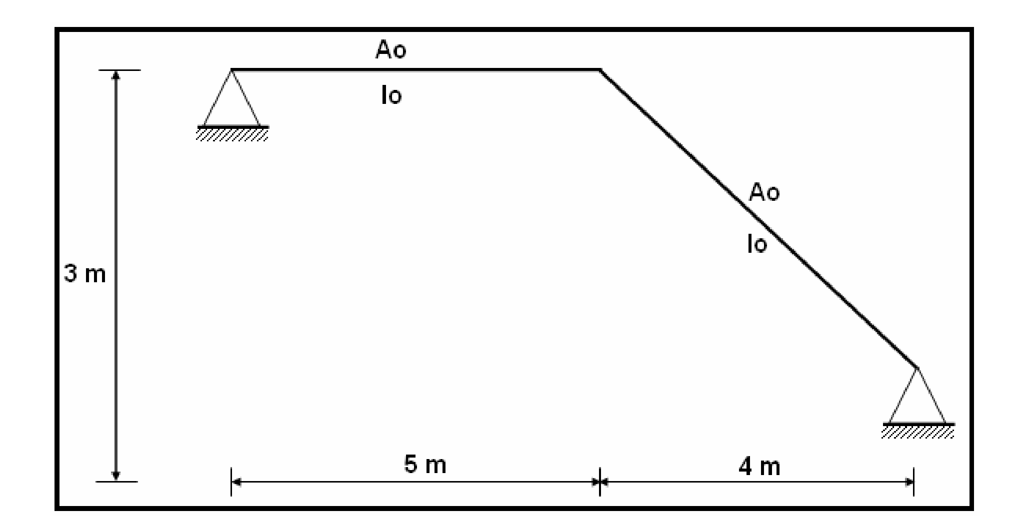
EJERCICIO N.- 7

Indicar si la siguiente armadura es estable o inestable usando la matriz de rigidez de la estructura. Considerar que cada elemento es un perfil C igual al del ejemplo anterior.



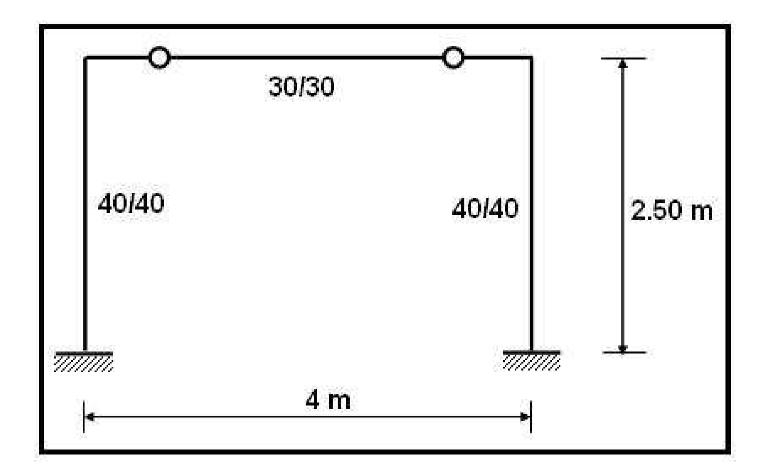
EJERCICIO N.- 8

Determinar la matriz de rigidez por ensamblaje directo del siguiente marco plano. Los dos elementos tienen la misma sección transversal y en ellos se cumple que: $\frac{A_o}{I_o\ L^2} = 80$

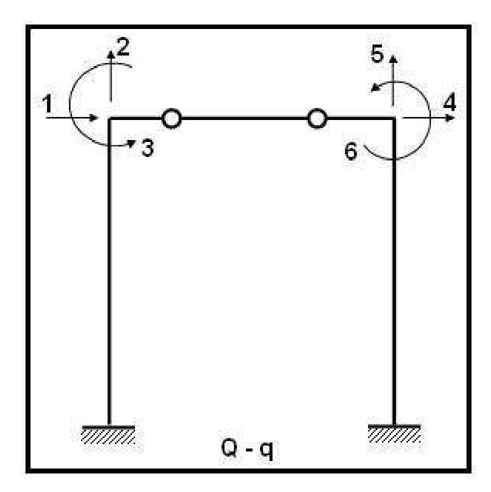


EJERCICIO N.- 9

Encontrar la matriz de rigidez por ensamblaje directo de la siguiente estructura.

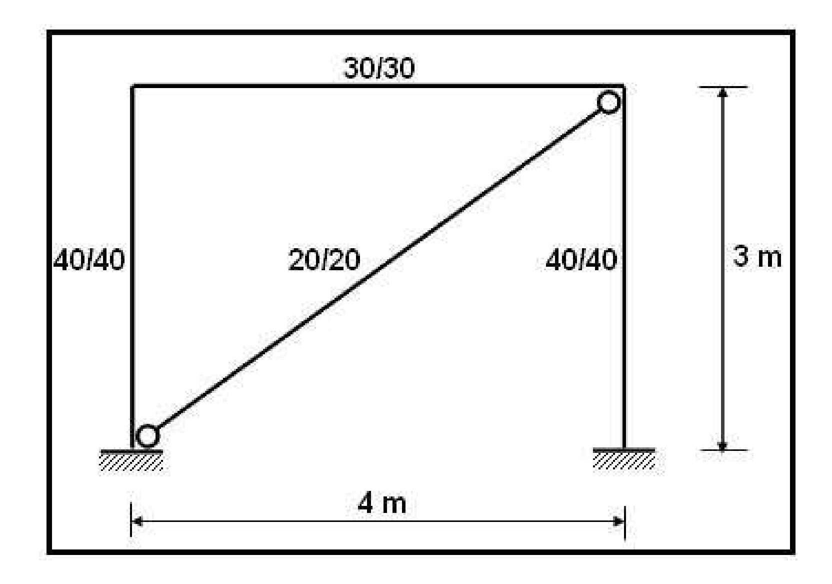


Considerar $E = 2100000\, T/m^2$ y el siguiente sistema de coordenadas de la estructura.



EJERCICIO N.- 10

Determinar la matriz de rigidez por ensamblaje directo de la siguiente estructura. Considerar $E = 2100000 \; T/m^2$.



CAPITULO 14

SOLUCIÓN DE UNA ESTRUCTURA PLANA ORIENTADA AL USO DEL COMPUTADOR

RESUMEN

Se presenta con detalle la solución de una armadura plana y de un pórtico plano a partir del vector de coordenadas generalizado $\boldsymbol{q}$, orientado al uso del ordenador. El cálculo anterior que corresponde a la matriz de rigidez de la estructura $\boldsymbol{K}$ y al vector de cargas generalizadas $\boldsymbol{Q}$ ha sido explicado con bastante detenimiento en capítulos anteriores. Por lo tanto en éste capítulo se explica el cálculo de:

a. Deformaciones de los elementos $\boldsymbol{p}$ en coordenadas globales.

b. Acciones de los elementos $\boldsymbol{P}$ en coordenadas globales y locales.

c. Acciones finales de los elementos que es la suma del problema primario más el problema complementario.

14. 1 ANTECEDENTES

En el capítulo 5 se estudió el cálculo del vector de cargas generalizadas $\boldsymbol{Q}$ orientado al uso del computador, un resumen del mismo se presenta a continuación para el caso de estructuras con cargas en los elementos.

i) Se determina el vector de cargas de empotramiento perfecto en coordenadas locales $\boldsymbol{Q}_2$.

ii) Se encuentra la matriz de paso de coordenadas locales a globales $\boldsymbol{T}_{2-3}$.

iii) Se calcula el vector de empotramiento perfecto en coordenadas globales Q_3 y se le cambia de signo para tener acciones en las juntas, con la siguiente ecuación:

$$Q_3 = -T_{2-3}{}^t \; Q_2$$

iv) Se realiza el ensamblaje de Q_3 en el vector de cargas generalizado Q mediante el vector de colocación del elemento respectivo.

Por otra parte en el capítulo 13 se estudió el cálculo de la matriz de rigidez de la estructura por ensamblaje directo. El procedimiento de cálculo para cada uno de los elementos de una estructura es el siguiente:

i) Se determina la matriz de rigidez de cada elemento en coordenadas globales k_3.

ii) Se realiza el ensamblaje directo de k_3 en la matriz de rigidez de la estructura K con el vector de colocación del elemento analizado.

Una vez que se ha determinado K y Q se procede a resolver un sistema de ecuaciones lineales para determinar el vector de coordenadas q como se ilustró en el capítulo 11.

A partir del vector q se continúa en éste capítulo con el cálculo matricial de una estructura plana, dejando indicado que el mismo procedimiento se realiza para estructuras espaciales, con las modificaciones del caso en cuanto se refiere al vector de colocación, matriz de rigidez del elemento y la determinación de las acciones de empotramiento perfecto.

14.2 DEFORMACIONES DE LOS ELEMENTOS

Para la estructura mostrada en la figura 14.1.1 cuyos elementos son totalmente flexibles se ha seleccionado un sistema de coordenadas generalizadas $Q-q$ el mismo que se indica en la figura 14.1.2 y un sistema de coordenadas globales $P-p$ de cada uno de los elementos que se indica en la figura 14.1.3.

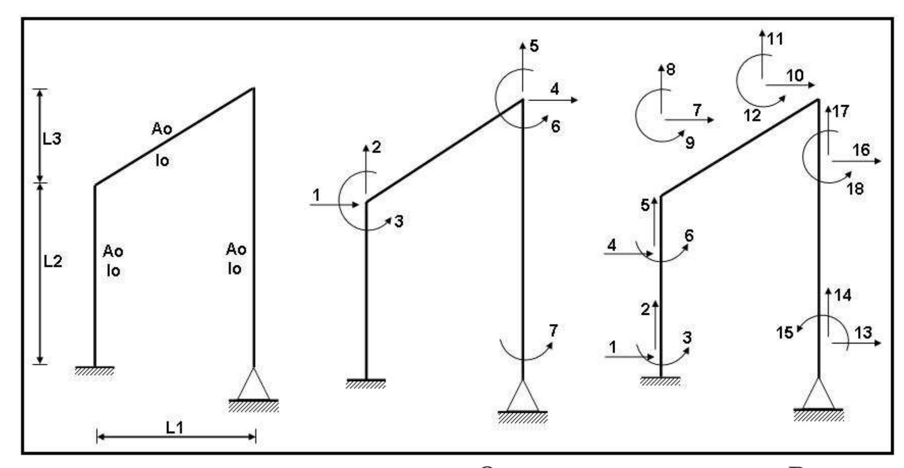


Figura 14.1.1 **Figura 14.1.2** $Q-q$ **Figura 14.1.3** $P-p$

De acuerdo a la numeración del sistema de coordenadas de los elementos se tiene que la columna izquierda corresponde al elemento 1, la viga inclinada al elemento 2 y la columna derecha al elemento 3. En los capítulos 9 y 10 se estudió la forma de cálculo de la matriz de compatibilidad de deformaciones A. Para el presente ejemplo ésta vale:

- **Elemento 1**

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Elemento 2**

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Elemento 3**

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Únicamente por facilidad se ha escrito las submatrices de la matriz de compatibilidad de deformación $\boldsymbol{A}$ se pudo haber escrito directamente ésta matriz pero es más cómodo escribir las submatrices.

El vector de cargas generalizadas $\boldsymbol{q}$ para la estructura analizada tiene la siguiente forma:

$$\boldsymbol{q}^t = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 & q_6 & q_7 \end{bmatrix}$$

Para encontrar las deformaciones de los elementos $\boldsymbol{p}$ en coordenadas globales se realiza el producto matricial de la matriz de compatibilidad de deformaciones $\boldsymbol{A}$ por el vector de coordenadas $\boldsymbol{q}$.

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{q}$$

El producto matricial indicado se puede realizar con la matriz $\boldsymbol{A}$ completa o sino con las submatrices de $\boldsymbol{A}$ teniendo en cuenta en éste último caso que se va a obtener las deformaciones de un elemento determinado de ésta manera se resuelve en el ordenador.

$$\boldsymbol{p}^{(1)} = \boldsymbol{A}^{(1)}\,\boldsymbol{q}$$

$$p^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto las deformaciones del elemento 1 en coordenadas globales son:

$$p^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

Para el elemento analizado el vector de colocación es:

$$VC(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

El algoritmo con el cual se obtiene el vector de deformaciones p sin necesidad de realizar el producto matricial se presenta a continuación:

i) Encerar el vector p, para el caso plano éste vector tiene 6 elementos.
ii) Determinar el vector de colocación del elemento.
iii) Ensamblar q en p por medio del vector de colocación. Cuando el vector de colocación es cero, queda cero en el vector de deformaciones, cuando es diferente de cero se obtiene del vector q la cantidad respectiva y se ensambla, el vector de colocación indica la posición del vector q que tomarse para el vector p.

Para los elementos 2 y 3 de la estructura analizada los vectores de colocación son:

$$VC(2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$VC(3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 7 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Al aplicar el algoritmo indicado los vectores de deformación de los elementos 2 y 3 resultan.

$$p^{(2)} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{bmatrix} \qquad p^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_7 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{bmatrix}$$

14.3 ACCIONES DE LOS ELEMENTOS

Una vez que se tienen las deformaciones de los elementos en coordenadas globales p se obtienen las acciones de los elementos en coordenadas globales P multiplicando la matriz de rigidez de miembro k_3 por las deformaciones p. En el capítulo 12 se indicó que la designación de k_3 era para indicar que se refiere al sistema 3, que es **coordenadas globales**, se va a obviar el número y se designará simplemente k como se lo realizó en el capítulo 13. Por lo tanto se tiene:

$$P^{(i)} = k^{(i)}\ p^{(i)}$$

Se destaca una vez más que $P^{(i)}$ son las acciones en coordenadas globales del elemento i. A éste vector por didáctica en el presente capítulo se lo designa como PG donde la letra G indica que se trata de coordenadas globales. Por otro lado $k^{(i)}$ es la matriz de rigidez de un elemento en coordenadas globales y $p^{(i)}$ es el vector de deformaciones en coordenadas globales.

En el computador se resuelve la estructura en coordenadas globales. Pero no es fácil su interpretación cuando se tienen elementos inclinados razón por la cual se acostumbra pasar las acciones de los elementos de coordenadas globales a coordenadas locales.

Se denomina PL las acciones de los elementos en coordenadas locales y el paso de coordenadas globales a locales se realiza con la matriz T_{2-3} para ello se recuerda a continuación lo estudiado en los capítulos 5 y 12.

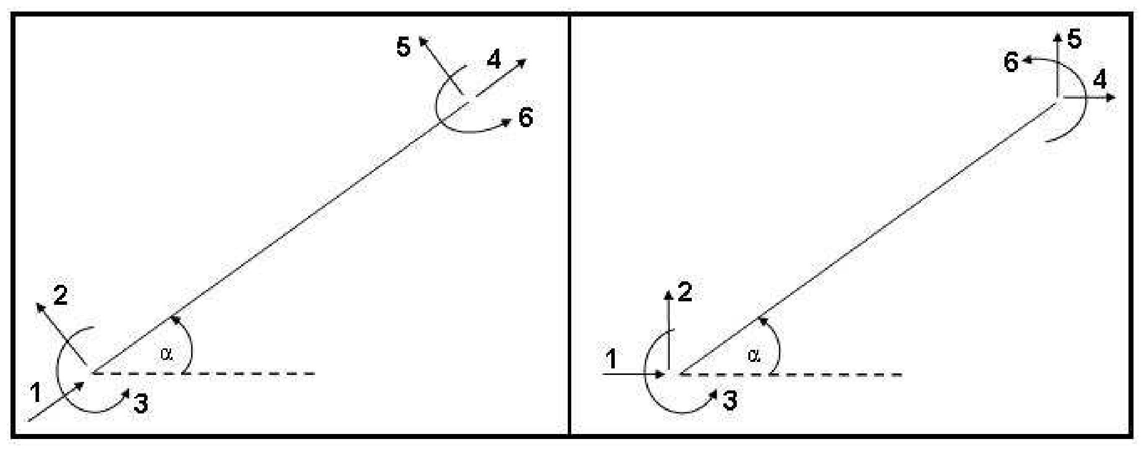


Figura 14.2.1 Sistema $PL - pL$ **Figura 14.2.2** Sistema $PG - pG$

De acuerdo a la notación indicada en las figuras 14.2.1 y 14.2.2 se tiene:

$$pL = T_{2-3}\ pG \quad (14.1)$$

$$PG = T_{2-3}{}^{t}\ PL \quad (14.2)$$

$$T_{2-3}{}^{t} = T_{2-3}{}^{-1} \quad (14.3)$$

La ecuación (14.1) es por definición de la matriz de transformación de coordenadas. La ecuación (14. 2) es un teorema de la matriz T estudiado en el capítulo 5 y la ecuación (14.3) es debida a que la matriz T_{2-3} es ortogonal. Lo que interesa es encontrar PL para el efecto de la ecuación (14.2) se tiene:

$$PL = \left(T_{2-3}{}^{t}\right)^{-1}\ PG$$

Pero la transpuesta de la matriz T_{2-3} es la inversa luego se tendría que la inversa de la inversa es la misma matriz en consecuencia la última ecuación queda:

$$PL = T_{2-3}\ PG \qquad (14.4)$$

Por lo tanto para encontrar las acciones de los elementos en coordenadas locales PL se debe multiplicar la matriz T_{2-3} por el vector de cargas en coordenadas globales PG. Si la estructura solo tiene cargas en las juntas en éste paso se termina de resolver el problema. Se destaca que se ha resuelto el Problema Complementario. Cuando la estructura tiene cargas en los elementos a las acciones PL obtenidas se debe sumar el problema primario para encontrar la solución total.

14.4 EJERCICIOS RESUELTOS

- **EJEMPLO N.- 1**

Resolver el ejemplo N.- 4 desarrollado en el capítulo 11 pero en forma similar a la que se realiza en el ordenador. En la figura 14.3.1 se describe el problema que es una estructura que tiene solo cargas en las juntas luego no existe problema primario y en las figuras 14.3.2 y 14.3.3 se indican los sistemas de coordenadas generalizadas $Q-q$ y el sistema de coordenadas globales de los elementos $P-p$. Considerar $E = 2173706.513\ T/m^2$.

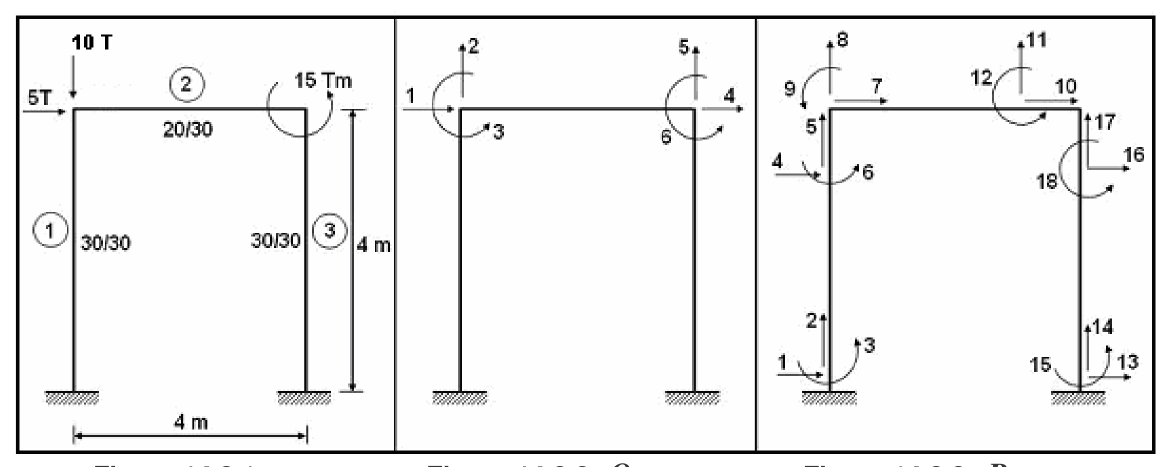


Figura 14.3.1 **Figura 14.3.2** $Q-q$ **Figura 14.3.3** $P-p$

- **SOLUCIÓN**

La matriz de rigidez de la estructura K y el vector de cargas generalizadas Q se indican en el capítulo 11, en el ejemplo 4. La solución del sistema de ecuaciones lineales: $Q = K\ q$ reporta:

$$q = \begin{bmatrix} 0.006271 \\ -0.000225 \\ -0.002422 \\ 0.006130 \\ 0.000020 \\ 0.005242 \end{bmatrix}$$

Los vectores de colocación son:

$$VC(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$
$$VC(2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$
$$VC(3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Los vectores de deformación en coordenadas globales que resultan al aplicar el algoritmo indicado son:

$$\boldsymbol{p}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.000000 \\ 0.000000 \\ 0.000000 \\ 0.006271 \\ -0.000225 \\ -0.002422 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{p}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.006271 \\ -0.000225 \\ -0.002422 \\ 0.006130 \\ 0.000020 \\ 0.005242 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{p}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.000000 \\ 0.000000 \\ 0.000000 \\ 0.006130 \\ 0.000020 \\ 0.005242 \end{bmatrix}$$

Las matrices de rigidez de los elementos en coordenadas globales son:

$$\boldsymbol{k}^{(1)} = \boldsymbol{k}^{(3)} = \begin{bmatrix} 277.15 & & & & & \\ 0.00 & 48908.40 & & & \textbf{\textit{SIMÉTRICA}} & \\ -554.30 & 0.00 & 1478.12 & & & \\ -277.15 & 0.00 & 554.30 & 277.15 & & \\ 0.00 & -48908.40 & 0.00 & 0.00 & 48908.40 & \\ -554.30 & 0.00 & 739.06 & 554.30 & 0.00 & 1478.12 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{k}^{(2)} = \begin{bmatrix} 32605.60 & & & & & \\ 0.00 & 183.41 & & & \textbf{\textit{SIMÉTRICA}} & \\ 0.00 & 366.81 & 978.17 & & & \\ -32605.60 & 0.00 & 0.00 & 32605.60 & & \\ 0.00 & -183.41 & -366.81 & 0.00 & 183.41 & \\ 0.00 & 366.81 & 489.08 & 0.00 & -366.81 & 978.17 \end{bmatrix}$$

Las acciones de los elementos en coordenadas globales $\boldsymbol{PG}$ son:

$$\boldsymbol{PG}^{(i)} = \boldsymbol{k}^{(i)}\ \boldsymbol{p}^{(i)}$$

$$\boldsymbol{PG}^{(1)} = \begin{bmatrix} -0.395 \\ 11.004 \\ 1.686 \\ 0.395 \\ -11.004 \\ -0.104 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{PG}^{(2)} = \begin{bmatrix} 4.597 \\ 0.989 \\ 0.105 \\ -4.597 \\ -0.989 \\ 3.853 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{PG}^{(3)} = \begin{bmatrix} -4.605 \\ -0.978 \\ 7.272 \\ 4.605 \\ 0.978 \\ -11.146 \end{bmatrix}$$

La matriz de paso de coordenadas locales a globales para el elemento 1 es la siguiente:

$$T_{2-3}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para el elemento 2 la matriz T_{2-3} es la identidad y para el elemento 3 la mencionada matriz es igual a la del elemento 1. Las acciones de los elementos en coordenadas locales PL se obtiene con la siguiente ecuación matricial:

$$PL^{(i)} = T_{2-3}^{(i)} \; PG^{(i)}$$

$$PG^{(1)} = \begin{bmatrix} 11.004 \\ 0.395 \\ 1.686 \\ -11.004 \\ -0.395 \\ -0.104 \end{bmatrix} \qquad PG^{(2)} = \begin{bmatrix} 4.597 \\ 0.989 \\ 0.105 \\ -4.597 \\ -0.989 \\ 3.853 \end{bmatrix} \qquad PG^{(3)} = \begin{bmatrix} -0.978 \\ 4.605 \\ 7.272 \\ 0.978 \\ -4.605 \\ 11.146 \end{bmatrix}$$

Al no existir cargas en los elementos aquí termina el problema. El significado físico de los vectores obtenidos se puede ver al final del ejemplo 4 resuelto en el capítulo 11.

- **EJEMPLO N.- 2**

Resolver el ejemplo N.- 6 desarrollado en el capítulo 11 pero de una manera similar a la que se resuelve en el ordenador. La estructura es la misma que la del ejemplo que se acaba de resolver únicamente que ahora en lugar de tener cargas en las juntas se tiene una carga uniforme distribuida que actúa sobre el elemento 2 y que vale 4.41 T/m.

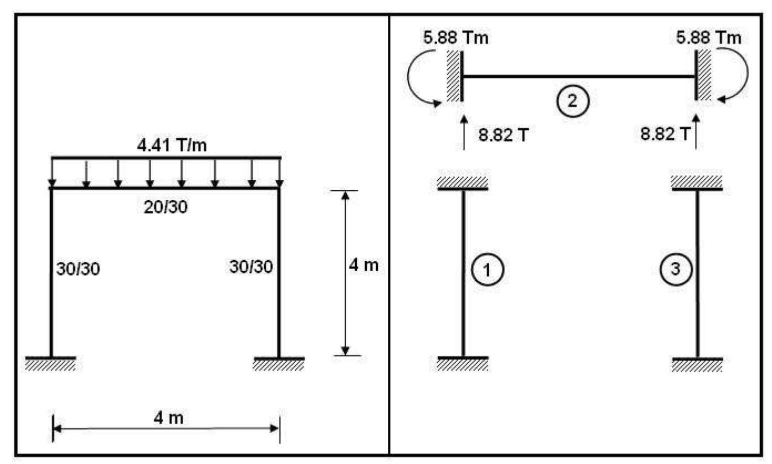


Figura 14.4.1 **Figura 14.4.2** Problema Primario

- **SOLUCIÓN**

La matriz de rigidez de la estructura de la figura 14.4.1 es la misma que la del ejemplo anterior. En la figura 14.4.2 se presenta el problema primario en base al cual se obtiene el vector de cargas generalizadas $\boldsymbol{Q}$. Con la matriz de rigidez de la estructura $\boldsymbol{K}$ y el vector de cargas $\boldsymbol{Q}$ se obtiene el vector de coordenadas $\boldsymbol{q}$. Los vectores $\boldsymbol{Q}$ y $\boldsymbol{q}$ que se encuentran son:

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 0.000 \\ -8.820 \\ -5.880 \\ 0.000 \\ -8.820 \\ 5.880 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} 0.0000254 \\ -0.0001803 \\ -0.0029962 \\ -0.0000254 \\ -0.0001803 \\ 0.0029962 \end{bmatrix}$$

Como se está resolviendo con el mismo sistema de coordenadas generalizadas del ejercicio anterior los vectores de colocación de cada uno de los elementos son los del ejemplo 1. Con esta indicación las deformaciones de los elementos en coordenadas globales, son:

$$\boldsymbol{p}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.0000000 \\ 0.0000000 \\ 0.0000000 \\ 0.0000254 \\ -0.0001803 \\ -0.0029962 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{p}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.0000254 \\ -0.0001803 \\ -0.0029962 \\ -0.0000254 \\ -0.0001803 \\ 0.0029962 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{p}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.0000000 \\ 0.0000000 \\ 0.0000000 \\ -0.0000254 \\ -0.0001803 \\ 0.0029962 \end{bmatrix}$$

Las matrices de rigidez en coordenadas globales son las del ejemplo anterior. Luego al efectuar el producto $\boldsymbol{PG}^{(i)} = \boldsymbol{k}^{(i)}\ \boldsymbol{p}^{(i)}$ se tiene:

$$\boldsymbol{PG}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.654 \\ 8.818 \\ -2.200 \\ -1.654 \\ -8.818 \\ -4.415 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{PG}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.656 \\ 0.000 \\ -1.465 \\ -1.656 \\ 0.000 \\ 1.465 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{PG}^{(3)} = \begin{bmatrix} -1.654 \\ 8.818 \\ 2.200 \\ 1.654 \\ -8.818 \\ 4.415 \end{bmatrix}$$

Al pasar las acciones de coordenadas globales a coordenadas locales empleando la matriz de transformación de coordenadas $\boldsymbol{T}_{2-3}$ se obtiene:

$$\boldsymbol{PL}^{(1)} = \begin{bmatrix} 8.818 \\ -1.654 \\ -2.200 \\ -8.818 \\ 1.654 \\ -4.415 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{PG}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.656 \\ 0.000 \\ -1.465 \\ -1.656 \\ 0.000 \\ 1.465 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{PG}^{(3)} = \begin{bmatrix} 8.818 \\ 1.654 \\ 2.200 \\ -8.818 \\ -1.654 \\ 4.415 \end{bmatrix}$$

Se ha resuelto el problema complementario. Por lo tanto a las acciones de los elementos obtenidas se deben sumar las acciones del problema primario. En la figura 14.4.2 se indica el problema primario para el ejemplo, si se agrupa estas acciones en un vector denominado $\boldsymbol{Q}_2$ se tiene:

$$\boldsymbol{Q}_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{Q}_2^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 8.82 \\ 5.88 \\ 0.00 \\ 8.82 \\ -5.88 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{Q}_2^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}$$

La solución total es igual al problema primario más el problema complementario. Sea $\boldsymbol{PT}$ el vector de acciones finales de los elementos el mismo que se obtiene de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{PT}^{(i)} = \boldsymbol{PL}^{(i)} + \boldsymbol{Q}_2^{(i)}$$

Al realizar la suma matricial indicada en cada uno de los elementos del marco plano se halla:

$$\boldsymbol{PT}^{(1)} = \begin{bmatrix} 8.818 \\ -1.654 \\ -2.200 \\ -8.818 \\ 1.654 \\ -4.415 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{PT}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.656 \\ 8.820 \\ 4.415 \\ -1.656 \\ 8.820 \\ -4.415 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{PT}^{(3)} = \begin{bmatrix} 8.818 \\ 1.654 \\ 2.200 \\ -8.818 \\ -1.654 \\ 4.415 \end{bmatrix}$$

El significado físico de las acciones $\boldsymbol{PT}$ se indican al final del ejemplo 6 del capítulo 11.

- **EJEMPLO N.- 3**

Resolver la armadura plana de la figura 14.5.1 cuyo sistema de coordenadas generalizadas se indica en la figura 14.5.2. El módulo de elasticidad del material es $E = 2000000\ T/m^2$. Todos los elementos tienen la misma sección transversal y el área es igual a 2 cm^2.

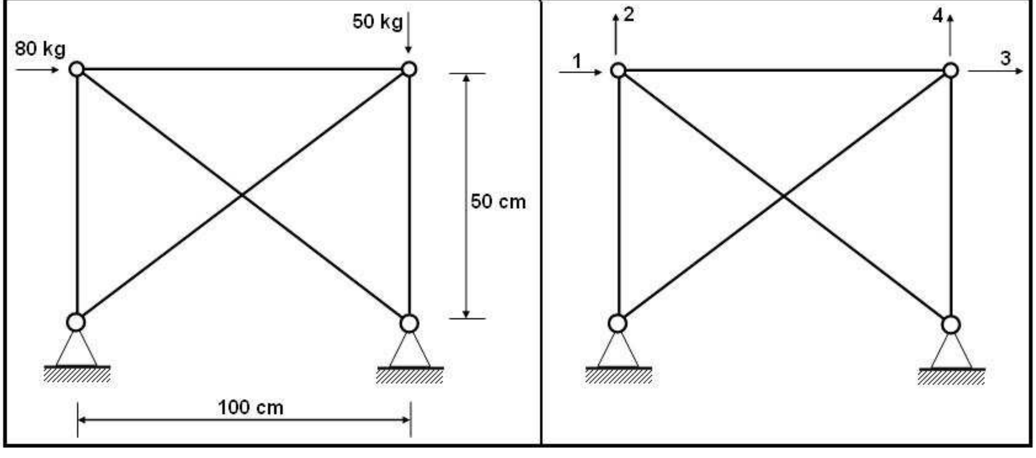


Figura 14.5.1 **Figura 14.5.2** Sistema $Q - q$

- **SOLUCIÓN**

La matriz de rigidez de la estructura $\boldsymbol{K}$ resulta:

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 68621.67 & & & \\ -14310.84 & 87155.42 & \textbf{\textit{SIMÉTRICA}} & \\ -40000.00 & 0.00 & 68621.67 & \\ 0.00 & 0.00 & 14310.84 & 87155.42 \end{bmatrix}$$

Los vectores de cargas y coordenadas generalizadas son:

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 80 \\ 0 \\ 0 \\ -50 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} 0.002017 \\ 0.000331 \\ 0.001341 \\ -0.000793 \end{bmatrix}$$

Lo expuesto hasta aquí de la solución de éste ejemplo ha sido tratado con detenimiento en capítulos anteriores. En la figura 14.5.3 se presenta la numeración de los elementos y el sistema de coordenadas globales de cada uno de los elementos. Como se identifica al elemento la numeración del sistema $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}$ no se la realiza en forma continua como en los otros ejemplos, se pudo haber numerado de corrido.

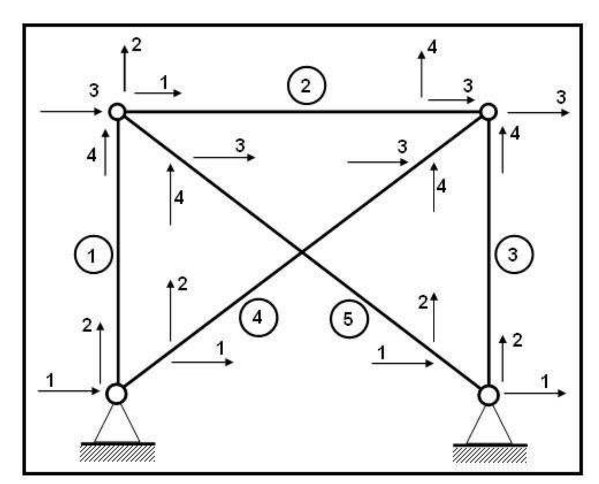


Figura 14.5.3 Coordenadas globales de los elementos.

Por otra parte los vectores de colocación de la armadura plana analizada son los siguientes:

$$VC(1) = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 2]$$
$$VC(2) = [1 \quad 2 \quad 3 \quad 4]$$
$$VC(3) = [0 \quad 0 \quad 3 \quad 4]$$
$$VC(4) = [0 \quad 0 \quad 3 \quad 4]$$
$$VC(5) = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 2]$$

En base al vector de colocación y al vector de coordenadas generalizadas $\boldsymbol{q}$ se obtienen los vectores de deformación $\boldsymbol{p}$ en coordenadas globales; estos son:

$$\boldsymbol{p}^{(1)} = \boldsymbol{p}^{(5)} = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ 0.002017 \\ 0.000331 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{p}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.002017 \\ 0.000331 \\ 0.001341 \\ -0.000793 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{p}^{(3)} = \boldsymbol{p}^{(4)} = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ 0.001341 \\ -0.000793 \end{bmatrix}$$

Las matrices de rigidez de cada uno de los elementos en coordenadas globales son:

$$\boldsymbol{k}^{(1)} = \boldsymbol{k}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.00 & & & \\ 0.00 & 80000.00 & \boldsymbol{\mathit{SIMÉTRICA}} & \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & \\ 0.00 & -80000.00 & 0.00 & 80000 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{k}^{(2)} = \begin{bmatrix} 40000.00 & & & \\ 0.00 & 0.00 & \boldsymbol{\mathit{SIMÉTRICA}} & \\ -40000.00 & 0.00 & 40000.00 & \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{k}^{(4)} = \begin{bmatrix} 28621.67 & & & \\ 14310.84 & 7155.42 & \boldsymbol{\mathit{SIMÉTRICA}} & \\ -28621.67 & -14310.84 & 28621.67 & \\ -14310.84 & -7155.42 & 14310.84 & 7155.42 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{k}^{(5)} = \begin{bmatrix} 28621.67 & & & \\ -14310.84 & 7155.42 & \boldsymbol{\mathit{SIMÉTRICA}} & \\ -28621.67 & 14310.84 & 28621.67 & \\ 14310.84 & -7155.42 & -14310.84 & 7155.42 \end{bmatrix}$$

Las fuerzas internas de elemento $\boldsymbol{P}$ en coordenadas globales se obtienen del producto matricial de la matriz de rigidez de miembro en coordenadas globales por el vector de deformación también en coordenadas globales. El resultado de éste producto es el siguiente:

$$\boldsymbol{P}^{(i)} = \boldsymbol{k}^{(i)} \ \boldsymbol{p}^{(i)}$$

$$\boldsymbol{P}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ -26.4 \\ 0.0 \\ 26.4 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{P}^{(2)} = \begin{bmatrix} 27.04 \\ 0.00 \\ -27.04 \\ 0.00 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{P}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 63.5 \\ 0.0 \\ -63.5 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{P}^{(4)} = \begin{bmatrix} -27.04 \\ -13.50 \\ 27.04 \\ 13.50 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{P}^{(5)} = \begin{bmatrix} -52.9 \\ 26.5 \\ 52.9 \\ -26.5 \end{bmatrix}$$

Las fuerzas de los elementos encontradas se presentan en la figura 14.5.4, teóricamente ahí se podría dar por finalizado el problema pero es bastante difícil utilizarlas para el diseño lo mejor es tener en coordenadas locales. Por ese motivo los resultados se pasan a dichas coordenadas por medio de la matriz $\boldsymbol{T}_{2-3}$

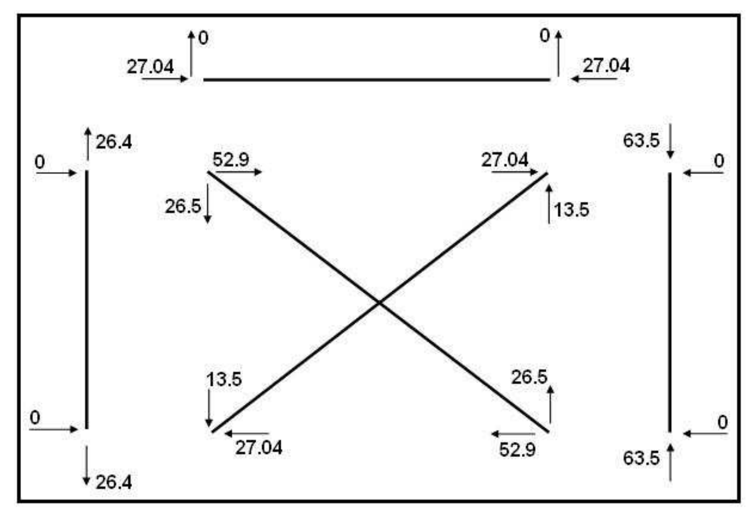


Figura 14.5.4 Acciones de los elementos en coordenadas globales

$$
\boldsymbol{T}_{2-3} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & sen\alpha & 0.0 & 0.0 \\ -sen\alpha & \cos\alpha & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & \cos\alpha & sen\alpha \\ 0.0 & 0.0 & -sen\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}
$$

El valor del ángulo α para los diferentes elementos, son:

$\alpha(1) = 90^0, \quad \alpha(2) = 0^0, \alpha(3) = 90^0, \quad \alpha(4) = 26.565^0, \quad \alpha(5) = 153.435^0$

Luego las matrices $\boldsymbol{T}_{2-3}$ son:

$$
\boldsymbol{T}_{2-3}^{(1)} = \boldsymbol{T}_{2-3}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{T}_{2-3}^{(4)} = \begin{bmatrix} 0.89443 & 0.44721 & 0.00 & 0.00 \\ -0.44721 & 0.89443 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.89443 & 0.44721 \\ 0.00 & 0.00 & -0.44721 & 0.89443 \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{T}_{2-3}^{(5)} = \begin{bmatrix} -0.89443 & 0.44721 & 0.00 & 0.00 \\ -0.44721 & -0.89443 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & -0.89443 & 0.44721 \\ 0.00 & 0.00 & -0.44721 & -0.89443 \end{bmatrix}
$$

Para el elemento 2 la matriz $\boldsymbol{T}_{2-3}$ es la identidad. Finalmente para encontrar las acciones de los elementos en coordenadas locales se multiplica la matriz de transformación de coordenadas por el vector de fuerzas en coordenadas globales como se ha realizado en los ejemplos anteriores.

$$PL^{(1)} = \begin{bmatrix} -26.4 \\ 0.0 \\ 26.4 \\ 0.0 \end{bmatrix} \qquad PL^{(2)} = \begin{bmatrix} 27.04 \\ 0.00 \\ 27.04 \\ 0.00 \end{bmatrix} \qquad PL^{(3)} = \begin{bmatrix} 63.5 \\ 0.0 \\ -63.5 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

$$PL^{(4)} = \begin{bmatrix} -30.2 \\ 0.0 \\ 30.2 \\ 0.0 \end{bmatrix} \qquad PL^{(5)} = \begin{bmatrix} 52.9 \\ 0.0 \\ -52.9 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

Los resultados alcanzados se muestran en la figura 14.5.5. Finalmente se deja al lector comprobar el equilibrio de las juntas.

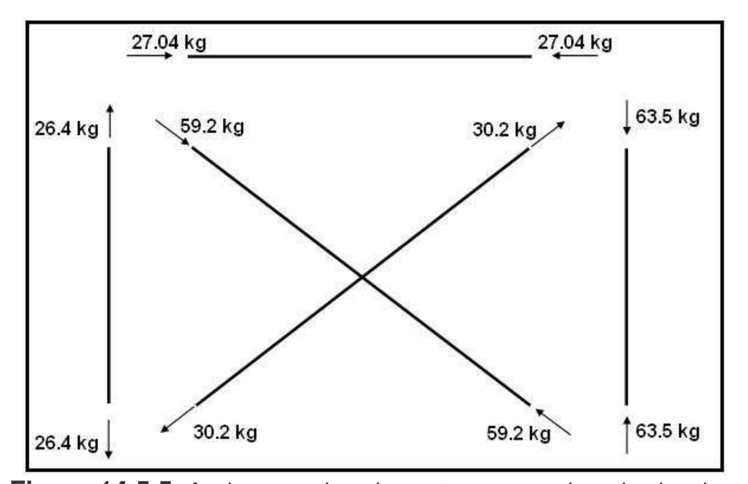


Figura 14.5.5 Acciones en los elementos en coordenadas locales.

14.5 USO DE CAL

Se han presentado varios comandos para resolver pórticos y armaduras planas, faltando para su solución total conocer el comando **MEMFRC** que se indica a continuación.

- **MEMFRC T Q VC P N = ?**

Este comando permite encontrar las acciones finales de los elementos en coordenadas locales pero para **cuando solo actúan cargas en las juntas de la estructura.** Es decir corresponde a la solución del Problema Complementario. Las coordenadas locales que considera CAL son diferentes a las que se han considerado en éste libro para pórticos y armaduras planas. En efecto las coordenadas locales de CAL son las indicadas en la figura 14.6. El significado de las variables que acompañan al comando **MEMFRC** son: **T** es el nombre de la matriz de paso de coordenadas locales a coordenadas globales; **Q** es el nombre del vector que contiene a las coordenadas generalizadas q de la estructura; **VC** es el nombre de la matriz que contiene el vector de colocación de cada elemento de la estructura; **P** es el nombre del vector que contiene las acciones finales del elemento en coordenadas locales. Para pórticos planos este vector contiene 4 elementos y para armaduras planas 1 elemento de acuerdo a lo indicado en la figura 14.6. Finalmente en la variable **N** se debe especificar dentro de la matriz que contiene a los vectores de colocación la columna en la cual se encuentra el vector de colocación del elemento analizado.

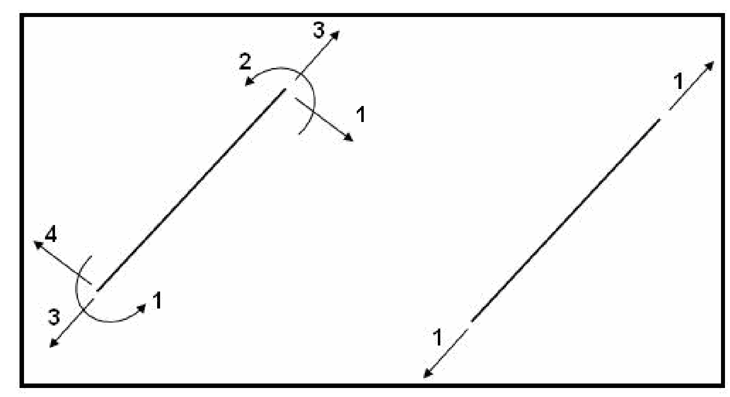


Figura 14.6 Coordenadas locales de CAL para Pórticos y Armaduras Planas.

- **EJEMPLO N.- 4**

Preparar el archivo de datos para resolver el ejemplo N.- 1 con CAL. Imprimir el vector de coordenadas generalizadas y acciones finales en los elementos.

- **SOLUCIÓN**

```
B1
C MATRIZ DE RIGIDEZ DE LOS ELEMENTOS EN COORDENADAS GLOBALES
FRAME   K1   T1  I=0.000675   A=0.09    E=2173706.5    X=0,0     Y=0,4
FRAME   K2   T2  I=0.000450   A=0.06    E=2173706.5    X=0,4     Y=4,4
DUP  K1   K3
DUP  T1   T3
LOADI    VC   R=6   C=3
0      1        0
0      2        0
0      3        0
1      4        4
2      5        5
3      6        6
C MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA ESTRUCTURA
ZERO      K     R=6     C=6
ADDK      K      K1       VC       N=1
ADDK      K      K2       VC       N=2
ADDK      K      K3       VC       N=3
C VECTOR DE CARGAS GENERALIZADAS
LOAD       Q     R=6     C=1
5
-10
0
0
0
15
C VECTOR DE COORDENADAS GENERALIZADAS
SOLVE       K       Q
PRINT      Q
C    ACCIONES FINALES EN LOS ELEMENTOS DE ACUERDO A FIGURA 14.6
MEMFRC      T1       Q     VC       P1     N=1
MEMFRC      T2       Q     VC       P2     N=2
MEMFRC      T3       Q     VC       P3     N=3
PRINT     P1
PRINT     P2
PRINT     P3
QUIT
```

- **EJEMPLO N.- 5**

Preparar el archivo de datos para CAL para resolver el ejemplo N.- 2. Imprimir acciones en los elementos del problema complementario y finales.

- **SOLUCIÓN**

```
B1
FRAME   K1   T1   I=0.000675    A=0.09     E=2173706.5       X=0,0      Y=0,4
FRAME   K2   T2   I=0.000450    A=0.06     E=2173706.5       X=0,4      Y=4,4
DUP    K1     K3
DUP    T1     T3
LOADI     VC      R=6       C=3
0      1        0
0      2        0
0      3        0
1      4        4
2      5        5
3      6        6
ZERO     K     R=6     C=6
ADDK     K      K1       VC       N=1
ADDK     K      K2       VC       N=2
ADDK     K      K3       VC       N=3
LOAD      Q     R=6     C=1
0.0
-8.820
-5.880
0.0
-8.820
5.880
SOLVE    K    Q
C  ACCIONES DEL PROBLEMA COMPLEMENTARIO, COORDENADAS DE CAL
MEMFRC    T1      Q      VC      P1      N=1
MEMFRC    T2      Q      VC      P2      N=2
MEMFRC    T3      Q      VC      P3      N=3
PRINT    P1
PRINT    P2
PRINT    P3
RETURN
B2
C  ACCIONES DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO
LOAD      Q2      R=6      C=1
0.0
8.82
5.88
0.0
8.82
-5.88
C  VALORES OBTENIDOS AL EJECUTAR BLOQUE DE TRABAJO 1
LOAD   P2     R=6      C=1
1.6507
0.00
-1.47348
-1.65070
0.00
1.47348
ADD     Q2      P2
PRINT    Q2
QUIT
```

En la forma presentada se debe ejecutar el programa CAL y correr primero el bloque B1 para ello escribirá **SUBMIT B1** al finalizar este bloque el usuario deberá copiar las acciones del elemento cargado que se ha denominado **P2** e interpretar los resultados puesto que se reporta en las coordenadas indicadas en la figura 14.6. Posteriormente se da como dato éstas acciones en el bloque denominado B2 pero aquí ya se trabaja con las coordenadas indicadas en la figura 14.2.1. Evidentemente no es directo el cálculo de las acciones finales en los elementos con el programa CAL cuando existen cargas en los elementos.

Tanto en los comandos **FRAME, TRUSS** y **MEMFRC** cuando se hace relación a la matriz de paso **T** lo que **CAL almacena es el producto de ésta matriz T por la matriz de rigidez en coordenadas globales.**

- **EJEMPLO N.- 6**

Para la armadura plana del ejemplo 3 preparar el archivo de datos para resolver con CAL.

- **SOLUCIÓN**

```
B1
C COORDENADAS DE LOS NUDOS
LOAD     XYZ     R=4     C=3
0.0       0.0          0.0
0.0      50.0          0.0
100.0    50.0          0.0
100.0     0.0          0.0
C MATRIZ DE RIGIDEZ DE LOS ELEMENTOS DE LA ARMADURA PLANA
TRUSS    K1   T1    A=2.000    E=2000000.0    N=1,2
TRUSS    K2   T2    A=2.000    E=2000000.0    N=2,3
TRUSS    K3   T3    A=2.000    E=2000000.0    N=4,3
TRUSS    K4   T4    A=2.000    E=2000000.0    N=1,3
TRUSS    K5   T5    A=2.000    E=2000000.0    N=4,2
C MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA ARMADURA PLANA
LOADI    VC    R=6    C=5
0   1    0    0    0
0   2    0    0    0
0   0    0    0    0
1   3    3    3    1
2   4    4    4    2
0   0    0    0    0
ZERO   K     R=4    C=4
ADDK   K   K1    VC    N=1
ADDK   K   K2    VC    N=2
ADDK   K   k3    VC    N=3
ADDK   K   K4    VC    N=4
ADDK   K   K5    VC    N=5
PRINT   K
C  VECTOR DE CARGAS
LOAD   Q    R=4    C=1
80.0
0.0
0.0
-50.0
C DESPLAZAMIENTOS DE LOS NUDOS DE LA ARMADURA
SOLVE   K    Q
PRINT   Q
```

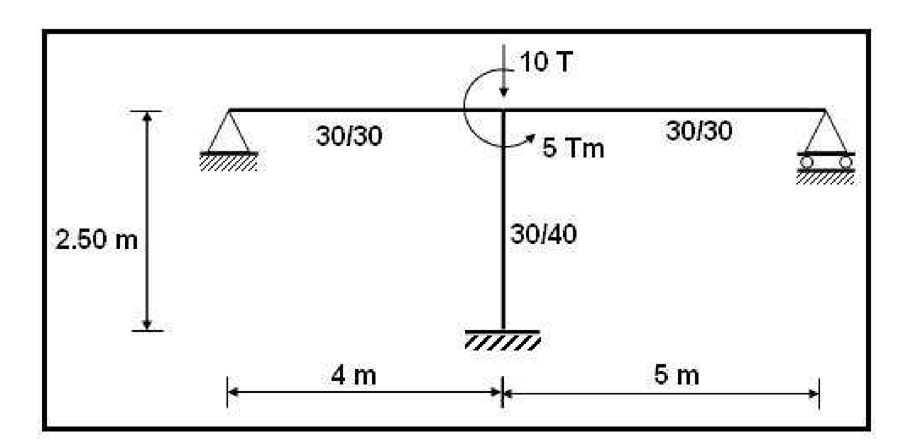
C FUERZAS FINALES EN LOS ELEMENTOS DE LA ARMADURA

```
MEMFRC   T1   Q   VC   P1   N=1
MEMFRC   T2   Q   VC   P1   N=2
MEMFRC   T3   Q   VC   P1   N=3
MEMFRC   T4   Q   VC   P1   N=4
MEMFRC   T5   Q   VC   P1   N=5
PRINT   P1
PRINT   P2
PRINT   P3
PRINT   P4
PRINT   P5
QUIT
```

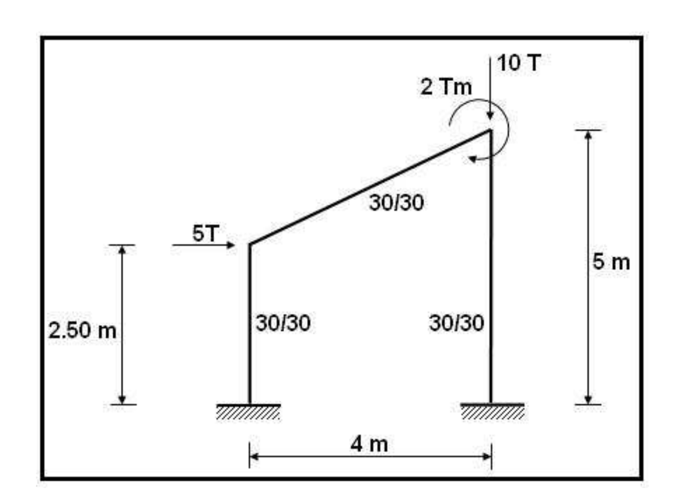
14.6 EJERCICIOS PROPUESTOS

Encontrar las acciones finales en los elementos sin utilizar el programa CAL y empleando dicho programa para las estructuras que se indican a continuación. Considerar $E = 2100000\ T/m^2$ para los pórticos planos y $E = 2000000\ Kg/cm^2$ para las armaduras planas.

EJERCICIO N.- 1

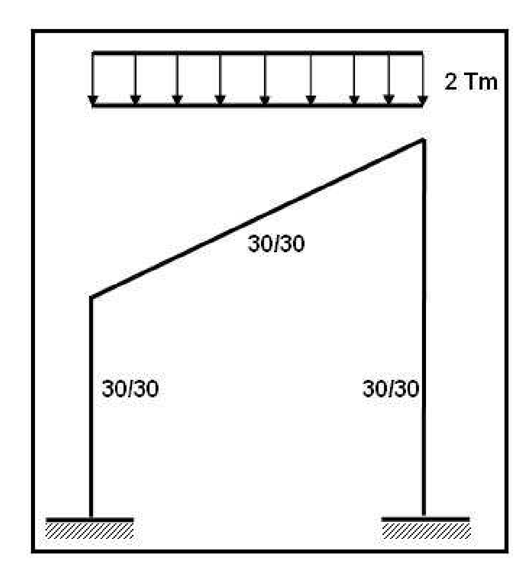


EJERCICIO N.- 2



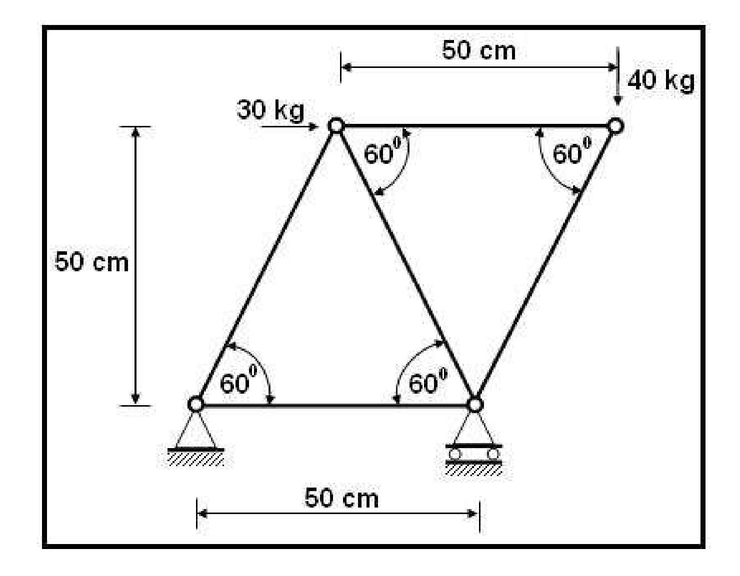
EJERCICIO N.- 3

La estructura es la misma del ejemplo anterior en consecuencia la longitud de sus elementos es la misma.



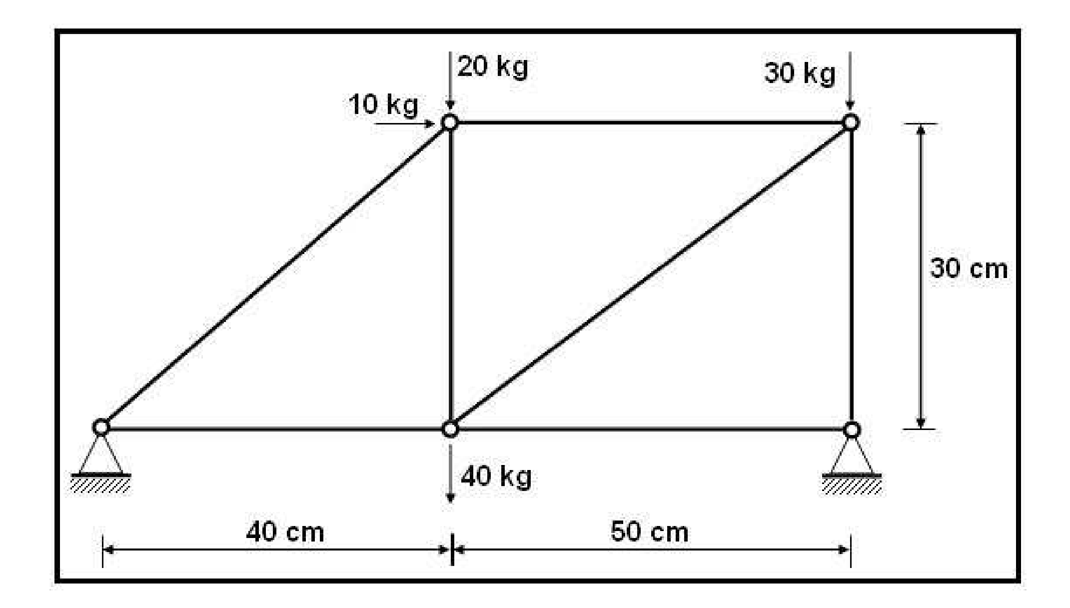
EJERCICIO N.- 4

El área de la sección transversal es igual en todos los elementos y vale $A = 1.12\ cm^2$



EJERCICIO N.- 5

Todos los elementos tienen la misma sección transversal y es igual a 2 cm^2



CAPÍTULO 15

PROGRAMACIÓN DE UN MARCO PLANO

RESUMEN

En función de la teoría expuesta básicamente en los últimos capítulos, se presentan un conjunto de diagramas de flujo, didácticamente explicados, orientados a la programación de un pórtico plano.

Adicionalmente, se incluye el consecuente programa desarrollado en MATLAB, por lo que también se presenta el manejo básico de variables, expresiones, instrucciones y características del lenguaje en mención. Así mismo, se trata un tema que hace verdaderamente poderoso al MATLAB que es la facilidad para realizar operaciones matemáticas con elementos como vectores, matrices y polinomios, y la graficación ya sea en dos o tres dimensiones. Esta breve introducción al manejo de MATLAB, proporcionará al lector una mejor comprensión del programa.

15.1 INTRODUCCIÓN AL MATLAB

15.1.1 Generalidades

MATLAB es un lenguaje de alta tecnología que integra en un solo ambiente la programación y visualización gráfica. Su nombre se deriva de las palabras ***MA**trix **LAB**oratory* y de ahí su habilidad para realizar operaciones con arreglos uni o bidimensionales en una forma práctica. Es capaz desenvolverse en áreas donde se requiere trabajar con análisis numérico, cálculo matricial, procesamiento de señales y presentación gráfica ya sea en dos y tres planos.

Con el transcurso del tiempo, el programa **MATLAB** se ha convertido en una herramienta indispensable de trabajo para profesionales e investigadores. A manera de ejemplo, **MATLAB** está siendo utilizado para la resolución de complejos problemas planteados en la realización y aplicación de modelos matemáticos en ingeniería.

Capítulo escrito por la Ing. Ana Haro Baez

MATLAB dispone de librerías especializadas conocidas como **toolboxes**. Únicamente como referencia, a continuación se indican algunas de las herramientas comúnmente utilizadas dentro de las diferentes ramas de la ciencia y la tecnología:

Adquisición de datos	Diseño de Sistemas de Control
Procesamiento de Señal	Control Robusto
The MATLAB C Math Library	Identificación de Sistemas
Matemáticas Simbólicas	Optimización
Procesamiento de Imagen	Simulación
The MATLAB Compiler	Diseño de Control no Lineal
Redes Neuronales	Lógica Difusa
Estadística	NAG Fundation Toolbox
Splines	Comunicaciones

A parte de ofrecerle al usuario la posibilidad de utilizar los **toolboxes**, **MATLAB** dispone de un código básico, al cual se hará referencia en los tópicos que se vayan tratando según el avance del tema en estudio.

15.1.2 Inicio en MATLAB

Se puede arrancar MATLAB como cualquier otra aplicación de **Windows**, dando doble click en el icono correspondiente en el escritorio o por medio del menú **Inicio**. La versión 6.1 de MATLAB, presenta una ventana inicial de trabajo como la que se observa en la Figura 15.1.

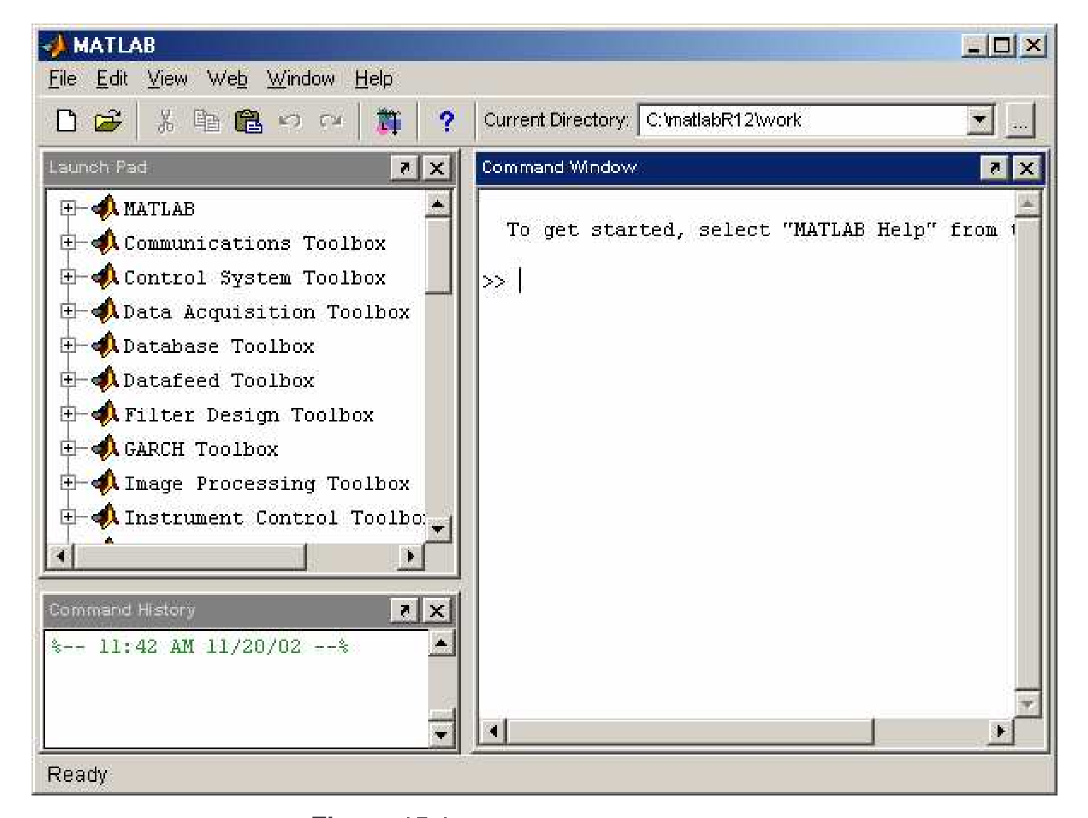


Figura 15.1 Ventana de inicio en MATLAB

Dentro de esta ventana principal aparecen varias subventanas. En el caso de contar con una versión inferior a la 6.1, la única ventana que se mostrará será la correspondiente a **Command Window**. Ya sea que se trate de cualquier versión, es en esta ventana donde se ejecutan los comandos antecedidos por el **prompt** (>>) que indica que el programa está listo para recibir instrucciones.

A parte de la ventana de comandos, el entorno de trabajo de **MATLAB 6.1** cuenta con componentes individuales, entre los cuales se puede citar:

a. La ventana histórica de comandos (***Command History Browser***), que facilita mucho el acceso a instrucciones ejecutadas anteriormente en la *Command Window* y seleccionar lo que se desea repetir.

b. El espacio de trabajo (***Workspace Browser***), es el conjunto de variables y de funciones de usuario que en un momento determinado están definidas en la memoria del programa. Esta ventana constituye un entorno gráfico para ver las variables definidas.

c. La plataforma de lanzamiento (***Launch Pad***), ofrece el acceso a otros componentes de MATLAB, sin tener que recurrir a los menús o a otros comandos.

d. El directorio actual (***Current Directory Browser***), permite explorar los directorios del ordenador en forma similar a cualquier aplicación de *Windows*. El directorio con el cual MATLAB inicia su trabajo por defecto cambia automáticamente en función del directorio seleccionado con este browser.

e. La ventana de ayuda (***Help Browser***)

f. El editor de ficheros y depurador de errores (***Editor&Debugger***)

g. El editor de vectores y matrices (***Array Editor***), es una ventana que permite examinar matrices o vectores que aparece al hacer doble clic sobre ellos dentro de la ventana correspondiente al *Workspace Browser*. El ***Array Editor*** los muestran y pueden ser modificados los elementos de dicha matriz

En la Tabla 15.1 se presentan algunas de las instrucciones básicas de MATLAB, necesarias de conocer desde un inicio.

Tabla 15.1 Instrucciones básicas

Instrucciones	Propiedad
quit o exit	Permite salir de MATLAB
clc	Despeja la ventana de comandos
clf	Despeja la ventana de gráficos
clear	Borra todas las variables de la memoria
demo	Realiza una presentación de algunas de las habilidades de MATLAB
help	Permite acceder al menú de ayuda
Teclas ↑ y ↓	Recupera comandos anteriores

Por otro lado, en varias ocasiones los comandos *save* y *load* pueden resultar de gran utilidad; por ejemplo, en el caso que se desee interrumpir el trabajo en **MATLAB** y sea necesario recuperarlo con posterioridad, se utiliza el comando *save*, almacenándose toda la información de la sesión en el archivo (matlab.mat), el mismo que se localizará dentro del directorio especificado desde un principio.

Este archivo puede ser recuperado al momento de comenzar otra sesión de trabajo utilizando el comando *load*.

Otra manera de almacenar en un archivo que contenga todo lo que se va haciendo en **MATLAB** es mediante el comando *diary*, cuyo formato es:

>> diary nombrearchivo on

Para interrumpir su ejecución se digita *diary nombrearchivo off* y en el caso de desear reanudarlo, la opción que se utiliza es *diary nombrearchivo on*. Si se omite el nombre del archivo, el trabajo se almacenará en un archivo con el nombre de *diary*.

Un aspecto importante a considerar es el formato numérico con el cual **MATLAB** arroja resultados. En la Tabla 15.2, se aprecian los formatos existentes con sus respectivos ejemplos, a los mismos que se tiene acceso anteponiendo el comando *format*.

Tabla 15.2 Formatos numéricos

Comando	Función	Ejemplo
short	coma fija con 4 decimales (por omisión)	1.3333
long	coma fija con 15 decimales	1.33333333333333
hex	cifras hexadecimales	3ff5555555555555
bank	números con dos cifras decimales	1.33
short e	notación científica con 4 decimales	1.3333e+000
short g	notación científica o decimal, dependiendo del valor	1.3333
long e	notación científica con 15 decimales	1.333333333333333e+000
long g	notación científica o decimal, dependiendo del valor	1.33333333333333
rat	expresa los números racionales como cocientes de enteros	4/3

Cabe señalar, que **MATLAB** brinda la posibilidad de poder escoger un directorio de trabajo, abriendo un cuadro de diálogo con el comando **File/Set Path** en donde el usuario encontrará las operaciones necesarias para seleccionar el camino que desee.

❖ **Definición de variables.**

Al tratarse de un lenguaje de programación, en MATLAB se utilizan variables, cuyos nombres de asignación deben cumplir con ciertas reglas, entre las cuales se tiene:

- No pueden comenzar con un número, aunque si pueden tener números. Por ejemplo, aux21 es válido.
- Las mayúsculas y minúsculas se diferencian en los nombres asignados a variables. Así, los nombres B y b pertenecen a dos distintas variables.
- Los nombres de variables no pueden contener operadores ni puntos.
- Si se trabaja con complejos sólo puede utilizarse uno de los nombres i y/o j para variables.

❖ **Definición de expresiones.**

Dentro del ambiente de MATLAB, una expresión puede ser: una variable o número, un comando aplicado, o cualquier función definida por el usuario. Cuando no se establece un nombre para la expresión, el programa devuelve de respuesta una variable con el nombre *ans*. La variable *ans* puede ser utilizada como operando en la siguiente expresión que se introduzca. Si se coloca un punto y coma al final de la expresión, su resultado no se imprime, pero la operación si se realiza.

❖ **Manejo de archivos con extensión .m:**

Todos los comandos a que se refiere esta presentación pueden utilizarse directamente desde la línea de comandos del **MATLAB** es decir desde el **prompt** (>>). Sin embargo, la idea es hacer un archivo de texto como cualquier otro pero con extensión .m que contenga el programa ya que es más ventajoso trabajar de esta manera.

Para crear un archivo de este tipo basta con digitar el comando *edit*, y una vez establecido su propósito, guardarlo y correrlo desde la línea de comandos tan solo ingresando su nombre.

Hasta el momento, se han descrito parámetros básicos necesarios para familiarizarse con el entorno del programa **MATLAB**. En los apartados siguientes, se detallarán algunos comandos básicos de programación, lo que le permitirá al lector familiarizarse paulatinamente con el lenguaje en mención.

15.2 PROGRAMACIÓN BÁSICA EN MATLAB

MATLAB al igual que otros lenguajes de programación posee entre otras sentencias, algunas de las instrucciones que se describen a continuación, las mismas que se convierten en elementos básicos dentro de la elaboración de un programa que represente cualquier grado de dificultad.

❖ **Comando IF**

La sintaxis más sencilla de la orden *if* es:

if condicion
sentencias
end

Cuando se tienen varios tipos de condiciones, se puede utilizar la sintaxis del comando en la forma siguiente:

if condicion1
bloque1
elseif condicion2
bloque2
elseif condicion3
bloque3
else
bloque4
end

En donde la condición *else* es la opción por defecto para cuando no se cumplan las condiciones anteriores.

Entre las condiciones más importantes se tiene:

- A == B, verifica si A es igual a B
- A ~= B, verifica que A y B sean diferentes
- A < B, verifica si A es menor que B
- A > B, verifica si A es mayor que B
- A <= B, verifica si A es menor o igual que B
- A >= B, verifica si A es menor o igual que B

❖ **Comando FOR**

La sentencia *for* repite una parte del conjunto de sentencias de un programa un número predeterminado de veces. La sintaxis del comando es la siguiente:

for i=1:n
sentencias
end

Donde la instrucción ejecuta las sentencias con valores de 1 a n, variando de uno en uno. En el caso en que se necesite una variación diferente a uno, se debe incluir dicho valor en la forma indicada a continuación:

for i=1:valor:n
sentencias
end

Cabe indicar que, se puede trabajar con bucles anidados, para lo cual cada uno de ellos solo se ejecuta una vez después de haber introducido la sentencia *end* que los completa.

❖ **Comando WHILE**

La sintaxis del bucle *while* que realiza una parte del programa mientras se cumpla una condición específica es:

while condicion
sentencias
end

Las condiciones a cumplirse pueden ser las mismas que para el caso del comando *if*. El bucle *while* termina cuando todos los elementos de la condición son falsos.

❖ **Comando BREAK**

La instrucción *break* termina la ejecución del bucle que comprende a dicha instrucción.

15.3 OPERACIONES CON MATRICES Y VECTORES

Los vectores y matrices en **MATLAB** se trabajan igual en cuanto a asignación, por eso se explican juntos. Pero las operaciones posibles, si son diferentes, y están separadas bajo los encabezados correspondientes.

❖ **Definición de matrices y vectores**

La asignación de variables en **MATLAB** es sencilla, y los vectores y matrices no son la excepción. Cuando se desea dar el valor a toda una matriz se puede realizar directamente de la siguiente forma:

>> A=[9 8 7; 6 5 4; 3 2 3]

donde la matriz escrita es:

```
A =
   9   8   7
   6   5   4
   3   2   3
```

Las filas se separan por punto y coma y las columnas por espacios o comas. De lo anterior se ve fácilmente que un vector fila se asigna así:

v = [1 5 9]; ó
v = [1, 5, 9];

y un vector columna se asigna así:

v = [1; 5; 9];

Otra forma de asignar valores a una matriz o un vector es por medio de los subíndices. *El menor subíndice utilizado por* ***MATLAB*** *es 1*. Y va añadiendo valores a medida que se requieran. Los subíndices se escriben entre paréntesis. Por ejemplo:

A(1, 3) =5; Asigna al elemento en la fila 1, columna 3 el valor de 5.

Si se desea cambiar todo el valor de una fila o una columna, es muy sencillo hacerlo con el operador ":" así:

B(2 , :) = [3 6 9];

Asigna a la fila 2 el vector [3, 6, 9]. Así si B era una matriz de 3 x 3 de ceros, ahora queda:

```
B =
    0    0    0
    3    6    9
    0    0    0
```

Igualmente, a veces se requiere trabajar con vectores que son una columna o una fila de una matriz. Esto se realiza fácilmente guardando en un vector, así:

V = A(:,2);

Asigna al vector V la segunda columna de la matriz A.

❖ Operaciones básicas

A partir del momento en que se la define, la matriz **A** está disponible para hacer cualquier tipo de operación. Por ejemplo, una sencilla operación con **A** es hallar su ***matriz transpuesta***. En **MATLAB** el apóstrofo (') es el símbolo de *transposición matricial*. Para calcular **A'** o transpuesta de **A**, basta teclear lo siguiente:

```
>> A'
ans =
    9    6    3
    8    5    2
    7    4    3
```

Como el resultado de la operación no ha sido asignado a ninguna otra matriz, **MATLAB** utiliza un nombre de variable por defecto (*ans*, de *answer*), que contiene el resultado de la última operación. También podría haberse asignado el resultado a otra matriz llamada **B**:

```
>> B=A'
B =
    9    6    3
    8    5    2
    7    4    3
```

Definidas las matrices **A** y **B**, es posible multiplicarlas y almacenarlas en una variable **C**. Por ejemplo:

```
>> C=B*A
C =
   194   122    64
   122    77    40
    64    40    22
```

Así mismo, se puede proceder con la suma o diferencia de matrices, con la condición de que las matrices tengan la misma dimensión.

Para calcular la **matriz inversa** de **A** cuyo resultado se asignará a **B**, basta hacer uso de la función *inv( )*, tal y como sigue:

```
>>B=inv(A)
B =
     -1.1667    1.6667    0.5000
      1.0000   -1.0000   -1.0000
      0.5000   -1.0000    0.5000
```

Adicionalmente, se tiene la función *det(A)* que establece el **determinante de una matriz** cuadrada.

Ahora se va a obtener la **solución de un sistema de ecuaciones lineales** definidas de la forma **Ax = b**. El caso más común envuelve una matriz cuadrada **A** de coeficientes y un vector columna **b**, en donde la solución **x** es del mismo tamaño que **b**. En MATLAB, este tipo de problemas se resuelven de la siguiente forma:

Suponiendo que la matriz A y el vector b vienen definidos por:

```
>> A=[0.7 0.3;0.1 0.8]
A =
   0.7000    0.3000
   0.1000    0.8000

>> b=[0 1]'        %Se transpone al vector fila para obtener un vector columna
b =
    0
    1
```

La solución es:

```
>>x=A\b
x =
  -0.5660
   1.3208
```

Como se aprecia en la línea de comandos en donde se define el vector b, en la parte derecha se ha colocado un comentario que, para generalizar, se lo establece anteponiendo el símbolo de porcentaje (*%*).

Cabe recalcar que una matriz es singular si no tiene columnas linealmente independientes. Si A es singular, la solución al sistema planteado no existe o no es única. MATLAB al detectar una matriz singularmente exacta reporta error o presenta una advertencia si determina que la matriz se encuentra cercana a ser singular.

Para matrices cuadradas y no singulares, *X = inv(A)*b* arroja el mismo resultado que la operación *x=A\b*, pero es preferible utilizar este último ya que utiliza menos tiempo y memoria de cálculo.

Otra aplicación práctica dentro de las operaciones con matrices y vectores se tiene el cálculo de **valores y vectores propios**. Así:

```
>> [V, D] = eig(A)
```

La función ***eig()*** determina los valores y vectores propios de la matriz cuadrada **A**. Los vectores propios se almacenan como columnas de la matriz **V**, mientras que los valores propios son los elementos de la matriz diagonal **D**.

15.4 PROGRAMACIÓN DEL MARCO PLANO

❖ **Creación de la matriz de coordenadas generalizadas CG.**

La explicación de los diferentes temas tratados en este apartado, se la realiza considerando como ejemplo la estructura mostrada en la figura 15.2.

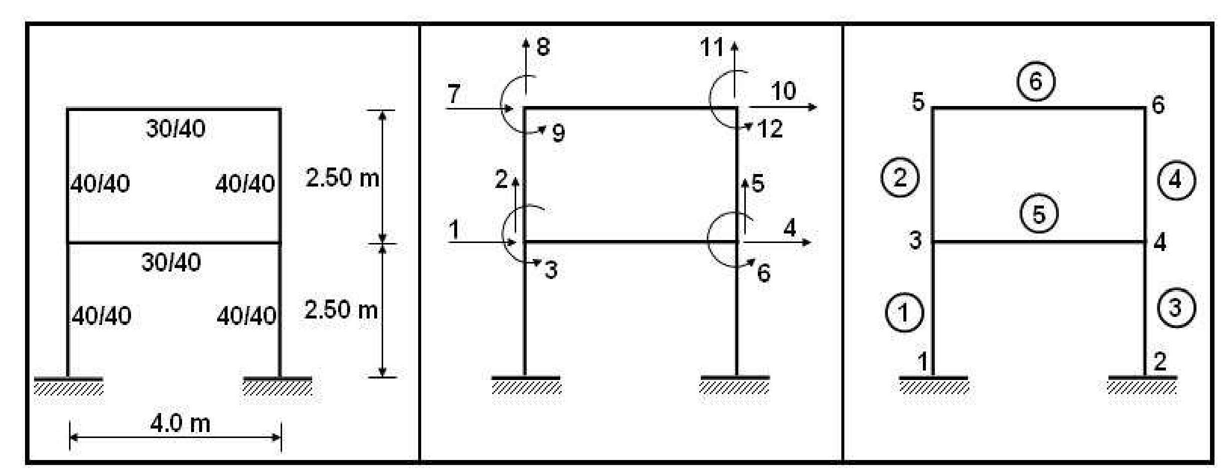


Figura 15.2 Estructura de análisis

Datos de entrada:

Numero de nudos:6
Numero de nudos restringidos:2

Numero del nudo restringido:1
Desplazamiento en X,si(s) o no(n):n
Desplazamiento en Y,si(s) o no(n):n
Rotacion, si(s) o no(n):n

Numero del nudo restringido:2
Desplazamiento en X,si(s) o no(n):n
Desplazamiento en Y,si(s) o no(n):n
Rotacion, si(s) o no(n):n

En base a esta información, se debe crear una matriz denominada CG que tenga la siguiente información:

CG =

0	0	0
0	0	0
1	2	3
4	5	6
7	8	9
10	11	12

La primera fila corresponde a los grados de libertad del nudo uno, para el ejemplo como se trata de un empotramiento perfecto se tiene todo cero; la segunda fila para el nudo dos, etc.

En la variable denominada ngl, se cuentan los grados de libertad de la estructura. En consecuencia, el último valor que toma la variable, es el número de grados de libertad del marco plano.

❖ **Matriz de vectores de colocación VC**

Para esta parte del programa el usuario debe indicar el nudo inicial y final de cada uno de los miembros de la estructura en forma ordenada, es decir, primero la información del miembro 1, luego del 2, y así sucesivamente.

Datos de entrada:

```
Numero de miembros:6

Miembro 1:
Numero nudo inicial:1
Numero nudo final:3

Miembro 2:
Numero nudo inicial:3
Numero nudo final:5

Miembro 3:
Numero nudo inicial:2
Numero nudo final:4

Miembro 4:
Numero nudo inicial:4
Numero nudo final:6

Miembro 5:
Numero nudo inicial:3
Numero nudo final:4

Miembro 6:
Numero nudo inicial:5
Numero nudo final:6
```

Para la estructura analizada, el arreglo **VC** que contiene los vectores de colocación de los miembros del marco plano mostrado en la figura 15.1, es:

```
ini =
    1    3    2    4    3    5

fin =
    3    5    4    6    4    6

VC =
    0    0    0    1    2    3
    1    2    3    7    8    9
    0    0    0    4    5    6
    4    5    6   10   11   12
    1    2    3    4    5    6
    7    8    9   10   11   12
```

Donde, la información de la primera fila corresponde al vector de colocación del miembro 1, la segunda del miembro 2, etc.

Nótese que adicionalmente se han creado dos vectores denominados **ini** y **fin**, que contienen los nudos iniciales y finales de cada miembro, respectivamente.

- **Longitud de elementos**

A partir de las coordenadas de los nudos, se encuentra la longitud del elemento y los valores de senα y cosα que se requieren para definir la matriz de paso de coordenadas locales a globales T_{2-3}. La información de las coordenadas de los nudos debe darse en forma secuencial.

Datos de entrada:

```
Nudo 1:
Coordenada en x [m]:0
Coordenada en y [m]:0

Nudo 2:
Coordenada en x [m]:4
Coordenada en y [m]:0
```

Nudo 3:
Coordenada en x [m]:0
Coordenada en y [m]:2.5

Nudo 4:
Coordenada en x [m]:4
Coordenada en y [m]:2.5

Nudo 5:
Coordenada en x [m]:0
Coordenada en y [m]:5

Nudo 6:
Coordenada en x [m]:4
Coordenada en y [m]:5

Se generan tres arreglos a saber: L(i), SENO(i) y COSENO(i). Cabe señalar que para encontrar la longitud y los valores trigonométricos indicados, se necesita trabajar con los vectores ya definidos para el nudo inicial **ini(i)** y final **fin(i)** de los miembros.

```
L =
   2.5000    2.5000    2.5000    2.5000    4.0000    4.0000

SENO =
    1     1     1     1     0     0

COSENO =
    0     0     0     0     1     1
```

Matriz de rigidez de miembro en coordenadas locales y globales. Ensamblaje directo de la matriz de rigidez de la estructura

Para cada miembro de la estructura, se va a obtener la matriz de rigidez de miembro en coordenadas locales que se había denominado K2. El programa se realiza para marcos planos con miembros de sección constante. Se considera un módulo de elasticidad de 2'100.000T/m^2 y se calcula el módulo de corte con el 40% del módulo de elasticidad.

La matriz de rigidez de miembro en coordenadas locales se almacena en un arreglo de 3 dimensiones, donde el primer elemento sirve para identificar al miembro.

Para encontrar la matriz de rigidez **K** por ensamblaje directo, se debe proceder de la siguiente manera con cada uno de los elementos del marco plano:

1) Recuperar la matriz de rigidez de miembro en coordenadas locales **K2** y el vector de colocación **VC**.
2) Encontrar la matriz de paso de coordenadas locales a globales $\mathbf{T_{2\text{-}3}}$. Para esto se necesitan los valores de cosα y senα, ya calculados.
3) Encontrar la matriz de rigidez de miembro en coordenadas globales $\mathbf{K3=T_{2\text{-}3}^{t}*K2*T_{2\text{-}3}}$.
4) Efectuar el ensamblaje directo.

Datos de entrada:

Modulo de Elasticidad [T/m2] :2100000
G =
    840000

Factor de Forma :1.2

Miembro 1:
Base [m]:.4
Altura [m]:.4

Datos de salida:

Matriz de Rigidez en Coord. Globales:K3 =
  1.0e+005 *

0.0320	0	-0.0399	-0.0320	0	-0.0399
0	1.3440	0	0	-1.3440	0
-0.0399	0	0.0678	0.0399	0	0.0320
-0.0320	0	0.0399	0.0320	0	0.0399
0	-1.3440	0	0	1.3440	0
-0.0399	0	0.0320	0.0399	0	0.0678

Miembro 2:
Base [m]:.4
Altura [m]:.4

Datos de salida:

Matriz de Rigidez en Coord. Globales:K3 =
1.0e+005 *

0.0320	0	-0.0399	-0.0320	0	-0.0399
0	1.3440	0	0	-1.3440	0
-0.0399	0	0.0678	0.0399	0	0.0320
-0.0320	0	0.0399	0.0320	0	0.0399
0	-1.3440	0	0	1.3440	0
-0.0399	0	0.0320	0.0399	0	0.0678

Miembro 3:
Base [m]:.4
Altura [m]:.4

Datos de salida:

Matriz de Rigidez en Coord. Globales:K3 =
1.0e+005 *

0.0320	0	-0.0399	-0.0320	0	-0.0399
0	1.3440	0	0	-1.3440	0
-0.0399	0	0.0678	0.0399	0	0.0320
-0.0320	0	0.0399	0.0320	0	0.0399
0	-1.3440	0	0	1.3440	0
-0.0399	0	0.0320	0.0399	0	0.0678

Miembro 4:
Base [m]:.4
Altura [m]:.4

Datos de salida:

Matriz de Rigidez en Coord. Globales:K3 =
1.0e+005 *

0.0320	0	-0.0399	-0.0320	0	-0.0399
0	1.3440	0	0	-1.3440	0
-0.0399	0	0.0678	0.0399	0	0.0320
-0.0320	0	0.0399	0.0320	0	0.0399
0	-1.3440	0	0	1.3440	0
-0.0399	0	0.0320	0.0399	0	0.0678

Miembro 5:
Base [m]:.3
Altura [m]:.4

Datos de salida:

Matriz de Rigidez en Coord. Globales:K3 =
1.0e+004 *

6.3000	0	0	-6.3000	0	0
0	0.0612	0.1223	0	-0.0612	0.1223
0	0.1223	0.3287	0	-0.1223	0.1607
-6.3000	0	0	6.3000	0	0
0	-0.0612	-0.1223	0	0.0612	-0.1223
0	0.1223	0.1607	0	-0.1223	0.3287

Miembro 6:
Base [m]:.3
Altura [m]:.4

Datos de salida:

Matriz de Rigidez en Coord. Globales:K3 =
1.0e+004 *

```
    6.3000         0         0   -6.3000         0         0
         0    0.0612    0.1223         0   -0.0612    0.1223
         0    0.1223    0.3287         0   -0.1223    0.1607
   -6.3000         0         0    6.3000         0         0
         0   -0.0612   -0.1223         0    0.0612   -0.1223
         0    0.1223    0.1607         0   -0.1223    0.3287
```

Matriz de Rigidez de la Estructura:

```
Mat_rigidez =
  1.0e+005 *
  Columns 1 through 7
    0.6939         0         0   -0.6300         0         0   -0.0320
         0    2.6941    0.0122         0   -0.0061    0.0122         0
         0    0.0122    0.1686         0   -0.0122    0.0161    0.0399
   -0.6300         0         0    0.6939         0         0         0
         0   -0.0061   -0.0122         0    2.6941   -0.0122         0
         0    0.0122    0.0161         0   -0.0122    0.1686         0
   -0.0320         0    0.0399         0         0         0    0.6620
         0   -1.3440         0         0         0         0         0
   -0.0399         0    0.0320         0         0         0    0.0399
         0         0         0   -0.0320         0    0.0399   -0.6300
         0         0         0         0   -1.3440         0         0
         0         0         0   -0.0399         0    0.0320         0
  Columns 8 through 12
         0   -0.0399         0         0         0
   -1.3440         0         0         0         0
         0    0.0320         0         0         0
         0         0   -0.0320         0   -0.0399
         0         0         0   -1.3440         0
         0         0    0.0399         0    0.0320
         0    0.0399   -0.6300         0         0
    1.3501    0.0122         0   -0.0061    0.0122
    0.0122    0.1007         0   -0.0122    0.0161
         0         0    0.6620         0    0.0399
   -0.0061   -0.0122         0    1.3501   -0.0122
    0.0122    0.0161    0.0399   -0.0122    0.1007
```

- **Vector de cargas generalizadas**

La forma de cálculo del vector de cargas generalizadas **Q** orientado al uso del computador fue explicado en el capítulo 5 cuando solo actúan cargas en las juntas y para cuando se tienen cargas en los elementos.

Se suponen cargas laterales de 1.5 y 2.5 Ton para los pisos 1 y 2 respectivamente y que actúan en las juntas 3 y 5. Por otro lado, sobre las vigas gravita una carga uniformemente distribuida de 1.2 Ton/m. Con estos datos se tiene lo siguiente:

Datos de entrada:

```
Definición de Q :
Existen cargas en las juntas ? , si(s) o no(n):s
Numero de juntas cargadas : 2

Nudo cargado :3
Fuerza horizontal : 1.5
Fuerza vertical : 0
Momento : 0

Nudo cargado :5
Fuerza horizontal : 2.5
Fuerza vertical : 0
Momento : 0
```

Datos de salida:

```
Q_CJ =
    1.5000
         0
         0
```

```
        0
        0
        0
   2.5000
        0
        0
        0
        0
        0

 Existen cargas en los miembros, si(s) o no(n): s
 Número de miembros cargados: 2

 Miembro cargado:5
 El elemento es de sección cte. y con carga uniformemente distribuida, si(s) o no(n) :s
 Carga distribuida: 1.2
Q2 =
        0
   2.4000
   1.6000
        0
   2.4000
  -1.6000
Q3 =
        0
  -2.4000
  -1.6000
        0
  -2.4000
   1.6000

 Miembro cargado :6
 El elemento es de sección cte. y con carga uniformemente distribuida, si(s) o no(n) :s
 Carga distribuida: 1.2
Q2 =
        0
   2.4000
   1.6000
        0
   2.4000
  -1.6000
Q3 =
        0
  -2.4000
  -1.6000
        0
  -2.4000
   1.6000
Q_CM =
        0
  -2.4000
  -1.6000
        0
  -2.4000
   1.6000
        0
  -2.4000
  -1.6000
        0
  -2.4000
   1.6000

 Vector de Cargas Totales:Q_TOTAL =
   1.5000
  -2.4000
  -1.6000
        0
  -2.4000
   1.6000
   2.5000
  -2.4000
  -1.6000
        0
  -2.4000
   1.6000
```

El vector de cargas generalizadas total, se obtiene con el aporte de los vectores generados por cargas en juntas y en miembros.

Para los miembros cargados, el vector de empotramiento en coordenadas locales **Q2**, se almacena en el arreglo **Q2_almac**, para su utilización posterior cuando se calculan las acciones finales en los elementos.
.

❖ **Solución del sistema de ecuaciones**

Una vez conocidos la matriz de rigidez de la estructura y el vector de cargas generalizadas, se puede determinar el vector de desplazamientos generalizados **q_des**, cuyos valores se muestran a continuación. Como se mencionó en apartados anteriores, el MATLAB posee una instrucción que simplifica la solución de sistemas de ecuaciones de la forma AX=B, misma que se utilizó en el programa.

Vector de Desplazamientos Generales:

```
q_des =
   0.0013
  -0.0000
  -0.0006
   0.0013
  -0.0001
  -0.0005
   0.0029
  -0.0000
  -0.0006
   0.0029
  -0.0001
  -0.0002
```

❖ **Fuerzas y momentos finales**

Con los valores del vector de desplazamientos generalizados, se procede en cada uno de los miembros de la estructura a:

1) Encontrar las deformaciones de miembro en coordenadas globales que se va a denominar **P1**. Para esto se trabaja con el vector de colocación del miembro.
2) Obtener las fuerzas y momentos en los extremos de miembro en coordenadas globales **P2**, para lo que se multiplica la matriz de rigidez del miembro en coordenadas globales por su vector respectivo de desplazamientos.
3) Las acciones de miembro obtenidas en el paso anterior que están en coordenadas globales se transforman a coordenadas locales. Se ha denominado **P** a estas acciones y esto corresponde a la solución del problema complementario.
4) La solución total es la suma del problema primario más el problema complementario. Por lo tanto a estas acciones de miembro encontradas en el paso anterior se sumará las fuerzas y momentos de empotramiento perfecto. A la solución final se le ha asignado la variable **P_FINAL**.

Así, lo descrito anteriormente, se describe en lo que sigue:

```
Miembro 1 :
 Deformaciones de miembro:P1 =
        0
        0
        0
   0.0013
  -0.0000
  -0.0006

 Acciones de miembro en coordenadas globales:P2 =
  -1.7075
```

2.4961
3.2842
1.7075
-2.4961
0.9846

Acciones de miembro en coord. locales (P. Complementario):P =
2.4961
1.7075
3.2842
-2.4961
-1.7075
0.9846

Acciones de miembro en coord. locales (P. Primario):Q2_aux =
0
0
0
0
0
0

Acciones finales (PP+PC) :P_FINAL =
2.4961
1.7075
3.2842
-2.4961
-1.7075
0.9846

Miembro 2 :
Deformaciones de miembro:P1 =
0.0013
-0.0000
-0.0006
0.0029
-0.0000
-0.0006

Acciones de miembro en coordenadas globales:P2 =
-0.3324
1.4638
0.2753
0.3324
-1.4638
0.5557

Acciones de miembro en coord. locales (P. Complementario):P =
1.4638
0.3324
0.2753
-1.4638
-0.3324
0.5557

Acciones de miembro en coord. locales (P. Primario):Q2_aux =
0
0
0
0
0
0

Acciones finales (PP+PC) :P_FINAL =
1.4638
0.3324
0.2753
-1.4638
-0.3324
0.5557

Miembro 3 :
Deformaciones de miembro:P1 =
0
0

```
      0
  0.0013
 -0.0001
 -0.0005

Acciones de miembro en coordenadas globales:P2 =
 -2.2925
  7.1039
  3.7501
  2.2925
 -7.1039
  1.9811

Acciones de miembro en coord. locales (P. Complementario):P =
  7.1039
  2.2925
  3.7501
 -7.1039
 -2.2925
  1.9811

Acciones de miembro en coord. locales (P. Primario):Q2_aux =
    0
    0
    0
    0
    0
    0

Acciones finales (PP+PC) :P_FINAL =
  7.1039
  2.2925
  3.7501
 -7.1039
 -2.2925
  1.9811

Miembro 4 :
Deformaciones de miembro:P1 =
  0.0013
 -0.0001
 -0.0005
  0.0029
 -0.0001
 -0.0002

Acciones de miembro en coordenadas globales:P2 =
 -2.1676
  3.3362
  2.2300
  2.1676
 -3.3362
  3.1890

Acciones de miembro en coord. locales (P. Complementario):P =
  3.3362
  2.1676
  2.2300
 -3.3362
 -2.1676
  3.1890

Acciones de miembro en coord. locales (P. Primario):Q2_aux =
    0
    0
    0
    0
    0
    0

Acciones finales (PP+PC) :P_FINAL =
  3.3362
  2.1676
  2.2300
 -3.3362
 -2.1676
```

3.1890

Miembro 5 :
Deformaciones de miembro:P1 =
0.0013
-0.0000
-0.0006
0.0013
-0.0001
-0.0005

Acciones de miembro en coordenadas globales:P2 =
0.1249
-1.3677
-2.8599
-0.1249
1.3677
-2.6111

Acciones de miembro en coord. locales (P. Complementario):P =
0.1249
-1.3677
-2.8599
-0.1249
1.3677
-2.6111

Acciones de miembro en coord. locales (P. Primario):Q2_aux =
0
2.4000
1.6000
0
2.4000
-1.6000

Acciones finales (PP+PC) :P_FINAL =
0.1249
1.0323
-1.2599
-0.1249
3.7677
-4.2111

Miembro 6 :
Deformaciones de miembro:P1 =
0.0029
-0.0000
-0.0006
0.0029
-0.0001
-0.0002

Acciones de miembro en coordenadas globales:P2 =
2.1676
-0.9362
-2.1557
-2.1676
0.9362
-1.5890

Acciones de miembro en coord. locales (P. Complementario):P =
2.1676
-0.9362
-2.1557
-2.1676
0.9362
-1.5890

Acciones de miembro en coord. locales (P. Primario):Q2_aux =
0
2.4000
1.6000
0
2.4000
-1.6000

```
Acciones finales (PP+PC) :P_FINAL =
   2.1676
   1.4638
  -0.5557
  -2.1676
   3.3362
  -3.1890
```

❖ Programa: Archivos pplano1.m y pplano2.m

Para finalizar, en este apartado se incluye el programa general desarrollado en **MATLAB**, mismo que ayudó con la solución del problema planteado.

El programa ha sido concebido en dos fases. La primera parte (pplano1.m), abarca hasta la determinación de la matriz de rigidez de la estructura, partiendo con el ingreso de datos correspondientes a las características propias de la estructura, como son definición de grados de libertad y geometría. En la segunda parte (pplano2.m) se obtiene el vector de cargas, para con estos resultados pasar a calcular la solución final del sistema en análisis, es decir, encontrar las acciones finales en miembros.

La primera fase llama a la segunda, únicamente colocando el nombre del archivo, tal como se podrá apreciar posteriormente en la presentación del programa. Se lo ha esquematizado de esta manera con el objetivo de facilitar el procesamiento de una misma estructura bajo la acción de diferentes estados de carga, sin la necesidad de volver a ingresar la información correspondiente a la primera fase, así se puede ejecutar solamente la segunda fase. A continuación se detallan los archivos correspondientes al programa, indicando las fases mencionadas.

❖ Primera fase (pplano1.m):

```
% Arreglo CG. Coordenadas generales
nod=input('\n Numero de nudos:');
nnr=input('\n Numero de nudos restringidos:');
ngl=0;
CG=ones(nod,3);
% analisis de restricciones
for i=1:nnr
   nudres= input ('\n Numero del nudo restringido:');
   X1 = input ('\n Desplazamiento en X ,si(s) o no(n):','s');
   if X1=='n'
      CG(i,1)=0;
   else,end
   Y1 = input ('\n Desplazamiento en Y ,si(s) o no(n):','s');
   if Y1=='n'
      CG(i,2)=0;
   else,end
   R1 = input ('\n Rotacion ,si(s) o no(n):','s');
   if R1=='n'
      CG(i,3)=0;
   else,end
end
% grados de libertad
for i=1:nod
   for j=1:3
      if CG(i,j)~=0
         ngl=ngl+1;
         CG(i,j)=ngl;
      else,end
   end
end
CG

% Arreglos vectoriales ini y fin. Nudos iniciales y finales.
mbr=input('\n Numero de miembros:' );
for i=1:mbr
   fprintf ('\n Miembro %d:',i);
   ini(i)=input ('\n Numero nudo inicial:');
   fin(i)=input ('\n Numero nudo final:');
end
```

```
ini
fin

% Arreglo VC. Vectores de colocacion
for i=1:mbr
   for k=1:3
      VC(i,k)= CG(ini(i), k);
      VC(i,k+3) = CG(fin(i),k);
   end
end
VC

% Arreglo L, SENO y COSENO
fprintf ('\n Coordenadas de los nudos: \n');
for i=1:nod
   fprintf ('\n Nudo %d: ',i);
   x(i) = input ('\n Coordenada en x [m]:');
   y(i) = input ('\n Coordenada en y [m]:');
end
for i=1:mbr
   Dx(i) = x(fin(i)) - x(ini(i));
   Dy(i) = y(fin(i)) - y(ini(i));
   L(i) = ((Dx(i))^2 + (Dy(i))^2)^0.5;
   SENO(i) = Dy(i)/L(i);
   COSENO(i) = Dx(i)/L(i);
end
L
SENO
COSENO

% Matriz K3
fprintf ('\n Caracteristicas de los miembros : ');
Elas= input ('\n Modulo de Elasticidad [T/m2] :');
G=0.4*Elas
Beta= input ('\n Factor de Forma :');
aux=zeros(ngl,ngl);

for i=1 : mbr
   fprintf ('\n Miembro %d:',i);
   B(i) = input('\n Base [m]:');
   H(i) = input('\n Altura [m]:');
   Area(i) = B(i)*H(i);
   Inercia(i) = B(i)*H(i)^3/12;
   fi = (3*Elas*Inercia(i)*Beta)/(G*Area(i)*L(i)^2);
   c=((4*Elas*Inercia(i))/L(i))*((1+fi)/(1+4*fi));
   cp=c;
   a=((2*Elas*Inercia(i))/L(i))*((1-2*fi)/(1+4*fi));
   b=((c+a)/L(i));
   bp=b;
   t=(b+bp)/L(i);
   r=((Elas*Area(i))/L(i));
   %Matriz de rigidez de miembro K2 en coordenadas locales
   K2(i,1,1)=r;K2(i,1,2)=0;K2(i,1,3)=0;K2(i,1,4)=-r;K2(i,1,5)=0;K2(i,1,6)=0;
   K2(i,2,1)=0;K2(i,2,2)=t;K2(i,2,3)=b;K2(i,2,4)=0;K2(i,2,5)=-t;K2(i,2,6)=bp;
   K2(i,3,1)=0;K2(i,3,2)=b;K2(i,3,3)=c;K2(i,3,4)=0;K2(i,3,5)=-b;K2(i,3,6)=a;
   K2(i,4,1)=-r;K2(i,4,2)=0;K2(i,4,3)=0;K2(i,4,4)=r;K2(i,4,5)=0;K2(i,4,6)=0;
   K2(i,5,1)=0;K2(i,5,2)=-t;K2(i,5,3)=-b;K2(i,5,4)=0;K2(i,5,5)=t;K2(i,5,6)=-bp;
   K2(i,6,1)=0;K2(i,6,2)=bp;K2(i,6,3)=a;K2(i,6,4)=0;K2(i,6,5)=-bp;K2(i,6,6)=cp;
   %Matriz de paso T2-3
T2_3(i,1,1)=COSENO(i);T2_3(i,1,2)=SENO(i);T2_3(i,1,3)=0;T2_3(i,1,4)=0;T2_3(i,1,5)=0;
T2_3(i,1,6)=0;
T2_3(i,2,1)=-SENO(i);T2_3(i,2,2)=COSENO(i);T2_3(i,2,3)=0;T2_3(i,2,4)=0;T2_3(i,2,5)=0;
T2_3(i,2,6)=0;
T2_3(i,3,1)=0;T2_3(i,3,2)=0;T2_3(i,3,3)=1;T2_3(i,3,4)=0;T2_3(i,3,5)=0;T2_3(i,3,6)=0;
T2_3(i,4,1)=0;T2_3(i,4,2)=0;T2_3(i,4,3)=0;T2_3(i,4,4)=COSENO(i);T2_3(i,4,5)=SENO(i);
T2_3(i,4,6)=0;
T2_3(i,5,1)=0;T2_3(i,5,2)=0;T2_3(i,5,3)=0;T2_3(i,5,4)=-SENO(i);T2_3(i,5,5)=COSENO(i);
T2_3(i,5,6)=0;
T2_3(i,6,1)=0;T2_3(i,6,2)=0;T2_3(i,6,3)=0;T2_3(i,6,4)=0;T2_3(i,6,5)=0;T2_3(i,6,6)=1;
   %Matriz de rigidez de miembro K3 en coordenadas globales
   for m=1:6
       for n=1:6
           K2I(m,n)=K2(i,m,n);
       end
   end
   for m=1:6
       for n=1:6
```

```
            T2_3I(m,n)=T2_3(i,m,n);
        end
    end

    fprintf ('\n Matriz de Rigidez en Coord. Globales:');
    K3=T2_3I'*K2I*T2_3I

    %Ensamblaje
    mataux=K3;
    for j=1 :6;
       if VC(i,j)==0;
          mataux(j,:)=0;
          mataux(:,j)=0;
       else,end
    end
    k=zeros(ngl,ngl);
    for cont1=1:6;
       for cont2=1:6;
          if mataux (cont1,cont2)~=0,
             uno=VC(i,cont1);
             dos=VC(i,cont2);
             tres=mataux(cont1,cont2);
             k(uno,dos)=k(uno,dos)+tres;
          else,end
       end
    end
    if i==1;
       aux=k;
    else if i~=1,
          aux=aux+k;
       else,end
    end
end

fprintf ('\n Matriz de Rigidez de la Estructura:');
Mat_rigidez=aux

pplano2;
```

❖ **Segunda fase (pplano2.m):**

```
%Arreglo Q_total
fprintf ('\n Definición de Q : \n');
Q=zeros(1,ngl);
V1= input ('\n Existen cargas en las juntas ? , si(s) o no(n):','s');
if V1 == 's'
   njc = input ('\n Numero de juntas cargadas : ');
   for i=1 :njc
      NC = input (' \n Nudo cargado :');
      Q1(1)= input ('\n Fuerza horizontal : ');
      Q1(2)= input ('\n Fuerza vertical : ');
      Q1(3)= input ('\n Momento : ');
      VCJ(i,:)=CG(NC,:);
      for m =1 :3
         n=VCJ(i,m);
         if Q1(m)~=0
            Q(n)=Q1(m);
         else, end
      end
   end
   Q_CJ=Q'
else
   Q_CJ=Q'
end
Q=zeros(1,ngl);
Q2_almac (mbr,6) = zeros;
V3= input ('\n Existen cargas en los miembros , si(s) o no(n) : ','s' );
if V3=='s'
   nmc= input ('\n Número de miembros cargados : ');
   for ll=1:nmc
    MC = input ('\n Miembro cargado :');
    V4=input('\n El elemento es de sección cte. y con carga uniformemente distribuida, si(s) o
no(n):' ,'s');
      if V4=='s'
         car= input ('\n Carga distribuida: ');
```

```
         Q2(1)=0 ; Q2(4)=0
         Q2(2)= car*L(MC)/2 ;
         Q2(5)=Q2(2);
         Q2(3)= car*(L(MC)^2)/12;
         Q2(6)=-Q2(3);
      else V4== 'n'
         Q2(1)= input ('\n Fuerza axial N.I. : ');
         Q2(2)= input ('\n Fuerza cortante N.I. : ');
         Q2(3)= input ('\n Momento N.I. : ');
         Q2(4)= input ('\n Fuerza axial N.F. : ');
         Q2(5)= input ('\n Fuerza cortante N.F. : ');
         Q2(6)= input ('\n Momento N.F. : ');
      end
      Q2=Q2'
      for mm =1:6
         Q2_almac(MC,mm)=Q2(mm)';
      end

       for m=1:6
         for n=1:6
           T2_3I(m,n)=T2_3(MC,m,n);
         end
       end
      T2_3I;

      clear Q3
      Q3 = (-1)*T2_3I'*Q2
      for g =1 :6
         h = VC(MC,g);
         if h ~=0
            Q(h)= Q3(g)+Q(h);
         else, end
      end
   end
      Q_CM =Q'
   else
      Q_CM =Q'
   end
   fprintf( '\n Vector de Cargas Totales:');
   Q_TOTAL = Q_CJ + Q_CM

% Vector desplazamientos K*q = Q
   fprintf( '\n Vector de Desplazamientos Generales:');
   q_des = Mat_rigidez\Q_TOTAL

% Deformaciones y acciones finales de miembro
   for i=1:mbr
      fprintf( '\n Miembro %d :',i);
      fprintf( '\n Deformaciones de miembro:');
      clear P1
      clear P2
      clear P
      clear Q2_aux
      for j=1:6
         if VC (i,j)~=0
            P1(j)=q_des(VC(i,j));
         else
            P1(j)=0;
         end
      end
         P1=P1'
        for m=1:6
         for n=1:6
           K2I(m,n)=K2(i,m,n);
         end
        end
        for m=1:6
         for n=1:6
           T2_3I(m,n)=T2_3(i,m,n);
         end
        end
         %Matriz K3
         K3=T2_3I'*K2I*T2_3I;
         fprintf( '\n Acciones de miembro en coordenadas globales:');
         P2=K3*P1
         fprintf( '\n Acciones de miembro en coord. locales (P. Complementario):');
         P=T2_3I*P2
```

```
        fprintf( '\n Acciones de miembro en coord. locales (P. Primario):');
        for j=1:6
           Q2_aux(j)=Q2_almac (i,j);
        end
        Q2_aux=Q2_aux'
        fprintf( '\n Acciones finales (PP+PC) :');
        P_FINAL=Q2_aux+P
     end
```

Cabe recalcar, que el programa ha sido elaborado con carácter didáctico, razón por la cual, no se ha optimizado la entrada de datos en lo que se refiere a correcciones por errores del usuario en digitalización que es muy común. De igual manera, con la utilización de variables auxiliares se podría minimizar el número de operaciones, por ejemplo al momento de calcular las acciones finales de cada miembro se hace la suma del problema primario y complementario a todos los miembros de la estructura; esto se optimizaría realizando únicamente la suma a los elementos que tengan cargas. Las optimizaciones se dejan al lector para que las realice, al igual que la elaboración de un programa para resolver armaduras planas teniendo como base el presente capítulo.

CAPITULO 16

CONDENSACIÓN ESTÁTICA DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ

RESUMEN

La condensación estática de la matriz de rigidez, es la base fundamental para el análisis sísmico de estructuras. Por este motivo en el presente capítulo se presenta esta temática orientada al uso del computador.

Se presentan tres formas de encontrar la matriz de rigidez condensada, a saber: la primera involucra la inversión de una matriz, la segunda implica la solución de un conjunto de ecuaciones lineales y la tercera mediante la eliminación de Gauss.

Por otra parte, se presenta la matriz de rigidez de los elementos para el análisis sísmico de pórticos planos, de dos maneras, la primera sin considerar nudos rígidos y la segunda considerando nudos rígidos.

El análisis sísmico de una estructura puede realizarse considerando pisos rígidos o considerando pisos flexibles, temas que también son analizados en el presente capítulo. Para el primer caso, se presentan dos formas de modelar los elementos, en la primera se considera que solo las vigas son axialmente rígidas y en la segunda todos los elementos son axialmente rígidos.

Para el modelo de piso flexible, se considera que todos los elementos son totalmente flexibles. Este modelo permite realizar el análisis sísmico con la componente horizontal o vertical de un sismo. En cambio, con el modelo de piso rígido se puede considerar únicamente la componente horizontal de movimiento del suelo.

Finalmente, se comenta sobre tres variables que intervienen en la modelación de los elementos y de la estructura, De la selección de ellos depende la matriz de rigidez, que se obtenga para el análisis sísmico. Las variables que se consideran son: i) Modelación de las condiciones de apoyo; ii) Modelación de las inercias a considerar en el análisis; y, iii) Modelación de los nudos.

16.1 MATRIZ DE RIGIDEZ PARA ANÁLISIS LINEAL

En análisis lineal se considera que la rigidez a flexión *(EI)o*, es constante; lo propio sucede con la rigidez al corte *(GA)o*. En consecuencia, la matriz de rigidez de un elemento es constante y lo mismo sucede con la matriz de rigidez de la estructura, como se ha visto en los capítulos anteriores.

16.1.1 Análisis sin nudo rígido

En la figura 16.1, se indica el sistema de coordenadas locales de un elemento horizontal de un pórtico plano, en el que no se considera la deformación axial, hipótesis de cálculo que se puede utilizar en el análisis sísmico de estructuras para los elementos horizontales.

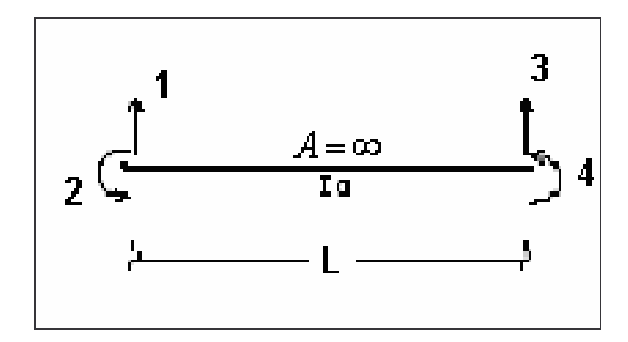


Figura 16.1 Coordenadas locales para un elemento axialmente rígido.

Para el elemento horizontal indicado en la figura 16.1, se tiene que el sistema de coordenadas locales es igual al sistema de coordenadas globales. Por otra parte, se recuerda que las estructuras se resuelven en coordenadas globales.

La matriz de rigidez del elemento, es simétrica con respecto a la diagonal principal, razón por la cual solo se presenta la matriz triangular superior. Con relación al sistema de coordenadas locales de la figura 16.1, la matriz de rigidez es la siguiente.

$$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} t & b & -t & b' \\ & k & -b & a \\ & & t & -b' \\ & & & k' \end{bmatrix} \tag{16.1}$$

la forma de la matriz de rigidez, indicada (16.1) es válida para elementos de sección constante o de variable. Para elementos de sección constante, se tiene:

$$k = \frac{4(EI)_o}{L}\left[\frac{1+\phi}{1+4\phi}\right] \tag{16.2.1}$$

$$k' = k \tag{16.2.2}$$

$$a = \frac{2(EI)_o}{L}\left[\frac{1-2\phi}{1+4\phi}\right] \tag{16.2.3}$$

$$b = \frac{6(EI)_o}{L^2}\left[\frac{1}{1+4\phi}\right] \quad (16.2.4)$$

$$b' = b \quad (16.2.5)$$

$$t = \frac{12(EI)_o}{L^3}\left[\frac{1}{1+4\phi}\right] \quad (16.2.6)$$

$$\phi = \frac{3(EI)_o\,\beta}{(GA)_o\,L^2} \quad (16.2.7)$$

donde E es el módulo de elasticidad del material, I es la inercia a flexión de la sección transversal, β es el factor de forma por corte de la sección, A es el área de la sección transversal, G es el módulo de corte y L es la longitud del elemento.

- **EJEMPLO N.- 1**

Encontrar la matriz de rigidez, sin considerar nudos rígidos, para una viga de sección constante de 30 cm. de base por 30 cm. de altura y tiene una longitud de 3.7 m. Por otra parte, considerar E=2100000 *T/m2* y G=840000 *T/m2*.

- **SOLUCIÓN**

$$A = 0.3 \times 0.3 = 0.09m^2$$

$$I = \frac{0.3 \times 0.3^3}{12} = 0.000675m^4$$

$$\phi = \frac{3 \times 1.2 \times 2100000 \times 0.000675}{0.09 \times 840000 \times 3.7^2} = 0.004931$$

$$k = \frac{4 \times 2100000 \times 0.000675}{3.7}\left[\frac{1+0.004931}{1+4\times 0.004931}\right] = 1510.21Tm$$

$$k' = k = 1510.21Tm$$

$$a = \frac{2 \times 2100000 \times 0.000675}{3.7}\left[\frac{1-2\times 0.004931}{1+4\times 0.004931}\right] = 743.99Tm$$

$$b = \frac{6 \times 2100000 \times 0.000675}{3.7^2}\left[\frac{1}{1+4\times 0.004931}\right] = 609.24T$$

$$b' = b = 609.24T$$

$$t = \frac{12 \times 2100000 \times 0.000675}{3.7^3}\left[\frac{1}{1+4\times 0.004931}\right] = 329.32T/m$$

$$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} 329.32 & 609.24 & -329.32 & 609.24 \\ & 1510.20 & -609.24 & 743.99 \\ & & 329.32 & -609.24 \\ & & & 1510.20 \end{bmatrix}$$

Para un elemento vertical, en la figura 16.2, se indica el sistema de coordenadas globales para el caso de que el elemento sea totalmente flexible.

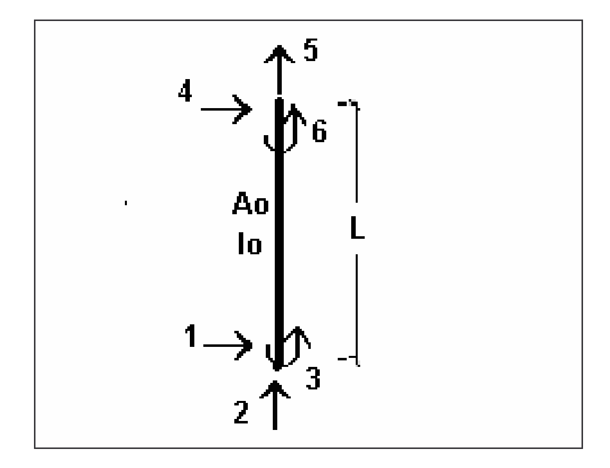


Figura 16.2 Coordenadas globales para un elemento vertical, totalmente flexible.

La matriz de rigidez del elemento vertical, en coordenadas globales es la siguiente.

$$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} t & 0 & -b & -t & 0 & -b' \\ & r & 0 & 0 & -r & 0 \\ & & k & b & 0 & a \\ & & & t & 0 & b' \\ & & & & r & 0 \\ & & & & & k' \end{bmatrix} \tag{16.3}$$

$$r = \frac{EA}{L} \tag{16.4}$$

Los restantes términos de la matriz de rigidez, fueron indicados en las ecuaciones anteriores.

16.1.2 Análisis con nudo rígido

En el análisis estructural se puede considerar que los nudos son completamente rígidos. En consecuencia, la longitud de los elementos que ingresa al nudo, tienen rigidez axial infinita y rigidez a flexión infinita. Sean c_1 y c_2 las longitudes de rigidez infinita de un elemento, como el indicado en la figura 16.3.

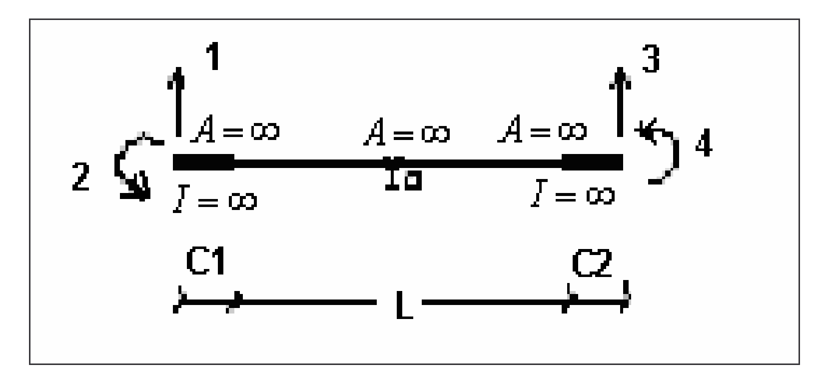


Figura 16.3 Coordenadas locales para un elemento axialmente rígido y con dos sectores de rigidez

infinita.

Ahora, la matriz de rigidez del elemento, es la siguiente:

$$k = \begin{bmatrix} t & b + c_1 t & -t & b' + c_2 t \\ & k + 2c_1 b + c_1^2 t & -(b + c_1 t) & a + c_1 b' + c_2 b + c_1 c_2 t \\ & & t & -(b' + c_2 t) \\ & & & k' + 2c_2 b' + c_2^2 t \end{bmatrix} \quad (16.5)$$

donde, los términos de rigidez *k, a, k', b, b', t*, son los indicados en las ecuaciones (16.2.1 a 16.2.7).

- **EJEMPLO N.- 2**

Se desea encontrar la matriz de rigidez, para la viga de sección constante del ejemplo anterior, considerando nudos rígidos, para el caso de la figura 16.4.

- **SOLUCIÓN**

Al reemplazar $c_1 = c_2 = 0.15$ y los restantes datos indicados en el ejemplo anterior, en (16.5), se obtiene:

$$k = \begin{bmatrix} 329.32 & 658.64 & -329.32 & 658.64 \\ & 1700.39 & -658.64 & 934.17 \\ & & 329.32 & -658.64 \\ & & & 1700.39 \end{bmatrix}$$

En la figura 16.5, se indica el sistema de coordenadas globales, de un elemento vertical, en el cual se consideran dos sectores de rigidez infinita de longitudes c_1, para el nudo inicial y c_2, para el nudo final. La matriz de rigidez del elemento, en este caso es la indicada en (16.6).

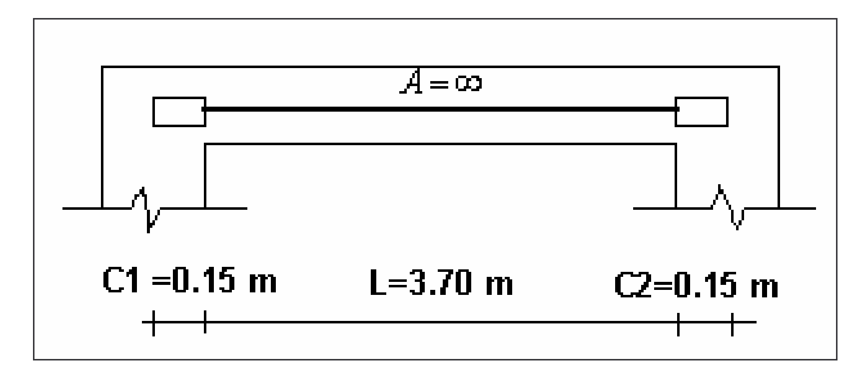


Figura 16.4 Geometría de la viga con dos sectores de rigidez infinita.

$$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} t & 0 & -(b+c_1 t) & -t & 0 & -(b'+c_2 t) \\ & r & 0 & 0 & -r & 0 \\ & & k+2c_1 b+c_1^2 t & b+c_1 t & 0 & a+c_1 b'+c_2 b+c_1 c_2 t \\ & & & t & 0 & b'+c_2 t \\ & & & & r & 0 \\ & & & & & k'+2c_2 b'+c_2^2 t \end{bmatrix} \qquad (16.6)$$

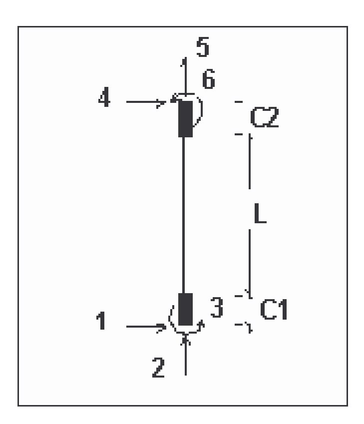


Figura 16.5 Sistema de coordenadas globales para un elemento vertical, totalmente flexible y con dos sectores de rigidez infinita.

16.1.3 Ensamblaje de la matriz de rigidez

La matriz de rigidez de una estructura $\boldsymbol{K}$, se obtiene por ensamblaje directo de las matrices de rigidez en coordenadas globales de cada uno de los elementos de la misma. Para ello es necesario definir el vector de colocación **VC**, el mismo que está conformado por los grados de libertad del nudo inicial y final de un elemento.

- **EJEMPLO N.- 3**

Encontrar la matriz de rigidez de la estructura indicada en la figura 16.6, considerando nudos rígidos. Todos los elementos son de 30/30. Se consideran los mismos valores de *E* y *G*, de los ejemplos anteriores.

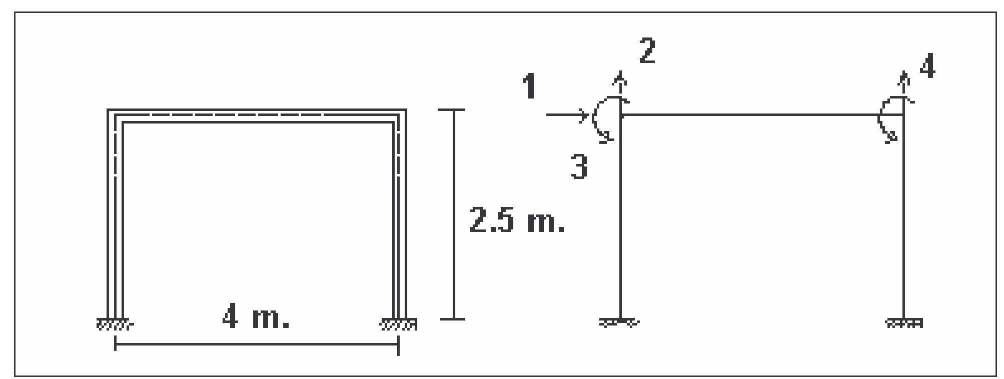


Figura 16.6 Geometría y grados de libertad de pórtico plano, utilizado en ejemplo 3.

- **SOLUCIÓN**

Sea la columna izquierda, el elemento número 1, la viga el 2 y la columna derecha el 3. Los vectores de colocación de estos elementos, son:

$$VC^{(1)} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3]$$
$$VC^{(3)} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 4 \quad 5]$$
$$VC^{(2)} = [2 \quad 3 \quad 4 \quad 5]$$

La matriz de rigidez del elemento dos, se indicó en el ejemplo anterior y la de los elementos uno y tres, al aplicar (16.6), se obtiene:

$$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} 1249.60 & 0 & -1468.28 & -1249.60 & 0 & -1655.72 \\ & 80425.53 & 0 & 0 & -80425.53 & 0 \\ & & 2328.42 & 1468.28 & 0 & 1342.28 \\ & & & 1249.60 & 0 & 1655.72 \\ & & & & 80425.53 & 0 \\ & & & & & 2797.02 \end{bmatrix}$$

Al efectuar el ensamblaje directo de la matriz de rigidez de la estructura, se obtiene:

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 2499.20 & 0 & 1655.72 & 0 & 1655.72 \\ & 80754.85 & 658.64 & -329.32 & 658.64 \\ & & 4497.40 & -658.64 & 934.17 \\ & & & 80754.85 & -658.64 \\ & & & & 4497.40 \end{bmatrix}$$

16.2 CONDENSACIÓN DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ

En la figura 16.7, se presenta nuevamente la estructura que se ha venido analizando y cuyos grados de libertad se indicaron en la figura 16.6. A la izquierda se indican todos los grados de libertad y a la derecha se indica únicamente la coordenada a la cual se va a condensar la matriz de rigidez.

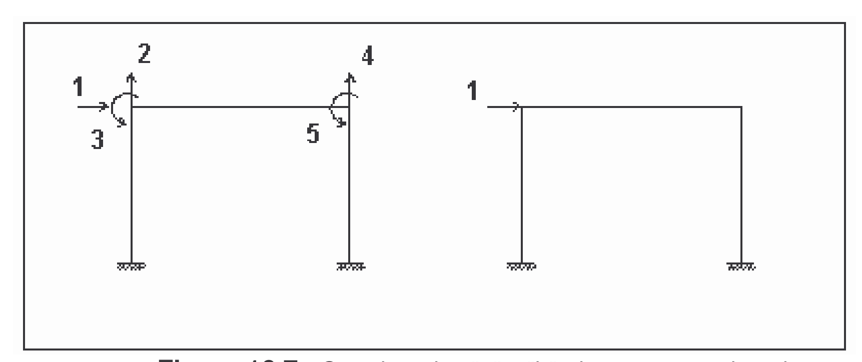


Figura 16.7 Coordenadas "a" y "b", de estructura ejemplo.

En el sistema de coordenadas de una estructura, se puede diferenciar un grupo de coordenadas a las que se denomina ``coordenadas a'', que en el ejemplo de la figura 16.7 es la uno y las restantes, a las que se denomina "coordenadas b''. Al hacer esto, tanto el vector de cargas generalizadas Q, como el vector de coordenadas generalizadas q, están particionados de la siguiente forma:

$$Q = \begin{pmatrix} Q_a \\ Q_b \end{pmatrix} \quad (16.7.1)$$

$$q = \begin{pmatrix} q_a \\ q_b \end{pmatrix} \quad (16.7.2)$$

Por otra parte, la ecuación básica de análisis estático, que relaciona el vector de cargas generalizadas Q, con el vector de coordenadas generalizadas q, por medio de la matriz de rigidez de la estructura K, es:

$$Q = K\ q \quad (16.8)$$

Al reemplazar (16.7.1) y (16.7.2) en (16.8) y al trabajar con submatrices, la matriz de rigidez de la estructura, también estará particionada, de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} Q_a \\ Q_b \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ k_{ba} & k_{bb} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_a \\ q_b \end{pmatrix} \quad (16.9)$$

La condensación estática de la matriz de rigidez se da cuando Q_a o Q_b son ceros, los dos casos se desarrollan a continuación:

16.2.1 Condensación a las coordenadas "a"

Este caso se presenta cuando el vector **Q_b=0.**

$$\begin{pmatrix} Q_a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ k_{ba} & k_{bb} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_a \\ q_b \end{pmatrix}$$

de donde:

$$Q_a = k_{aa} q_a + K_{ab} q_b$$
$$0 = K_{ba} q_a + K_{bb} q_b$$

luego:

$$q_b = -k_{bb}^{-1}\ K_{ba}\ q_a \quad (16.10.1)$$

$$Q_a = (K_{aa} - K_{ab} K_{bb}^{-1}\ K_{ba})\ q_a \quad (16.10.2)$$

Sea K^* la matriz de rigidez condensada a las coordenadas "a".

$$K^* = K_{aa} - K_{ab} K_{bb}^{-1}\ K_{ba} \quad (16.10.3)$$

16.2.2 Condensación a las coordenadas "b"

Se presenta cuando el vector de cargas $\boldsymbol{Q}_a = \boldsymbol{0}$. Procediendo en forma similar se obtiene:

$$\boldsymbol{q}_a = -\boldsymbol{k}_{aa}^{-1}\ \boldsymbol{K}_{ab}\boldsymbol{q}_b \qquad (16.11.1)$$

$$\boldsymbol{Q}_b = (\boldsymbol{K}_{bb} - \boldsymbol{K}_{ba}\boldsymbol{K}_{aa}^{-1}\ \boldsymbol{K}_{ab})\boldsymbol{q}_b \qquad (16.11.2)$$

Sea $\boldsymbol{K}^+$ la matriz de rigidez condensada a las coordenadas "b".

$$\boldsymbol{K}^+ = \boldsymbol{K}_{bb} - \boldsymbol{K}_{ba}\boldsymbol{K}_{aa}^{-1}\ \boldsymbol{K}_{ab} \qquad (16.11.3)$$

- **EJEMPLO N.- 4**

Encontrar la matriz de rigidez condensada a la coordenada lateral 1, indicada en la figura 16.7, que corresponde a la estructura de la figura 16.6, que se ha venido analizando.

- **SOLUCIÓN**

En este caso, la partición de la matriz de rigidez de la estructura $\boldsymbol{K}$ se la realiza en la primera fila y primera columna, toda vez que existe una sola "coordenada a". Por lo tanto las submatrices, son:

$$\boldsymbol{K}_{aa} = [2499.20]$$
$$\boldsymbol{K}_{ab} = [0 \quad 1655.72 \quad 0 \quad 1655.72]$$

$$\boldsymbol{K}_{bb} = \begin{bmatrix} 80754.85 & 658.64 & -329.32 & 658.64 \\ & 4497.40 & -658.64 & 934.17 \\ & & 80754.85 & -658.64 \\ & & & 4497.40 \end{bmatrix}$$

La submatriz $\boldsymbol{K}_{ba}$ es la transpuesta de la submatriz $\boldsymbol{K}_{ab}$. Para aplicar la ecuación (16.10.3) es necesario calcular la inversa de $\boldsymbol{K}_{bb}$.

$$\boldsymbol{K}_{bb}^{-1} = \begin{bmatrix} 1.24 & -0.1501 & 0.0026 & -0.1501 \\ & 23.27 & 0.1501 & -4.790 \\ & & 1.241 & 0.1501 \\ & & & 23.27 \end{bmatrix} \times 10^{-5}$$

$$\boldsymbol{K}_{ab}\ \boldsymbol{K}_{bb}^{-1}\ \boldsymbol{K}_{ba} = [1013.428]$$
$$\boldsymbol{K}^* = \boldsymbol{K}_{aa} - \boldsymbol{K}_{ab}\boldsymbol{K}_{bb}^{-1}\boldsymbol{K}_{ba}$$
$$\boldsymbol{K}^* = [1485.772]$$

16.3 CONDENSACIÓN MEDIANTE SOLUCIÓN DE ECUACIONES

El trabajar con la ecuación (16.10.3) o con la ecuación (16.11.3) implica calcular una matriz inversa, lo cual demanda bastante tiempo de cálculo, razón por la cual lo que se hace en la práctica, es transformar el cálculo de la matriz inversa por un sistema de ecuaciones lineales, como se ve a continuación.

16.3.1 Caso en que $Q_b = 0$

En la ecuación (16.10.3) se realiza, se define la matriz $\boldsymbol{T}$ de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{T} = -\boldsymbol{K}_{bb}^{-1}\ \boldsymbol{K}_{ba} \quad (16.12.1)$$

Al multiplicar ambos lados de la ecuación (16.12.1) por $\boldsymbol{K}_{bb}$ se obtiene:

$$\boldsymbol{K}_{bb}\ \boldsymbol{T} = -\boldsymbol{K}_{ba} \quad (16.12.2)$$

Para encontrar la matriz $\boldsymbol{T}$, se debe resolver un conjunto de ecuaciones lineales, cuya matriz de coeficientes es la submatriz $\mathbf{K_{bb}}$ *y los términos independientes son las diferentes columnas de la submatriz* $\mathbf{K_{ba}}$

.

Con el cambio de variable realizado, la ecuación (16.10.3) se transforma en:

$$\boldsymbol{K}^* = \boldsymbol{K}_{aa} + \boldsymbol{K}_{ab}\boldsymbol{T} \quad (16.12.3)$$

- **EJEMPLO N.- 5**

Encontrar la matriz de rigidez condensada del ejercicio anterior, por intermedio de la matriz **T**.

- **SOLUCIÓN**

Al sustituir las submatrices, del ejemplo anterior en (16.12.2), se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 80754.85 & 658.64 & -329.32 & 658.64 \\ 658.64 & 4497.40 & -658.64 & 934.17 \\ -329.32 & -658.64 & 80754.85 & -658.64 \\ 658.64 & 934.17 & -658.64 & 4497.40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{21} \\ T_{31} \\ T_{41} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} .000 \\ 1655.72 \\ 0.00 \\ 1655.72 \end{bmatrix}$$

La solución del sistema de ecuaciones lineales, reporta

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 0.00497 \\ -0.30605 \\ -0.00497 \\ -0.30599 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}_{ab}\ \boldsymbol{T} = [1013.428]$$

$$\boldsymbol{K}^* = \boldsymbol{K}_{aa} + \boldsymbol{K}_{ab}\ \boldsymbol{T}$$

$$\boldsymbol{K}^* = [1485.772]$$

16.3.2 Caso en que $Q_a = 0$

Se procede en forma similar al indicado en el apartado (16.3.1), con lo que se obtiene:

$$T = -K_{aa}^{-1}\ K_{ab} \qquad (16.13.1)$$

$$K^{+} = K_{bb} + K_{ba}T \qquad (16.13.2)$$

$$K_{aa}\ T = -K_{ab} \qquad (16.13.3)$$

Ahora, la matriz **T** se obtiene resolviendo un conjunto de ecuaciones lineales que tienen una sola matriz de coeficientes que es $\mathbf{K_{aa}}$ pero diferentes términos independientes que son las diferentes columnas de la matriz $\mathbf{k_{ab}}$.

16.4 CONDENSACIÓN MEDIANTE ELIMINACIÓN DE GAUSS

Si bien es cierto, mediante la solución de un conjunto de ecuaciones lineales, se optimiza la obtención de la matriz de rigidez condensada. No es menos cierto, que todavía se puede optimizar el proceso de cálculo únicamente triangularizando la matriz de rigidez, tema que se trata a continuación y es válido únicamente para el caso de que $\mathbf{Q_a = 0}$.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ Q_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ k_{ba} & k_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_a \\ q_b \end{bmatrix}$$

de donde:

$$\mathbf{0} = k_{aa}\ q_a + K_{ab}\ q_b \qquad (16.14.1)$$

$$Q_b = K_{ba}\ q_a + K_{bb}\ q_b \qquad (16.14.2)$$

Si a la ecuación (16.14.1) multiplicamos por $\mathbf{K_{aa}^{-1}}$, y en ésta se reemplaza la ecuación (16.13.1), se obtiene:

$$\mathbf{0} = I\ q_a + K_{aa}^{-1}\ K_{ab}\ q_b$$

$$\mathbf{0} = I\ q_a - T\ q_b \qquad (16.14.3)$$

Ahora, si a la ecuación (16.14.3) multiplicamos por $\mathbf{-K_{ba}}$ y sumamos a la ecuación (16.14.2), se encuentra:

$$Q_b = \mathbf{0}\ q_a + \left(K_{bb} + K_{ba}T\right) \qquad (16.14.4)$$

De acuerdo a (16.13.2), la ecuación entre paréntesis es la matriz de rigidez condensada $\mathbf{K^{+}}$**.**

$$Q_b = \mathbf{0}\ q_a + (K^{+}T) \qquad (16.14.5)$$

Al rescribir en forma matricial las ecuaciones (16.14.3) y (16.14.5) se halla.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ Q_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -T \\ \mathbf{0} & k^{+} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_a \\ q_b \end{bmatrix} \qquad (16.14.5)$$

Por consiguiente, dada la matriz de rigidez total, se aplica la eliminación de Gauss Jordan hasta eliminar los elementos correspondientes a las coordenadas "a" y lo que se obtienen son las matrices **T** y $\mathbf{K^{+}}$.

- **EJEMPLO N.- 6**

Encontrar la matriz de rigidez condensada, de la estructura que se ha venido analizando, pero aplicando la eliminación de Gauss Jordan.

- **SOLUCIÓN**

Primero se debe encontrar la matriz de rigidez de la estructura, para la nueva numeración de los grados de libertad, que se indican en la figura 16.8. Nótese que la coordenada lateral, se ha numerado al último.

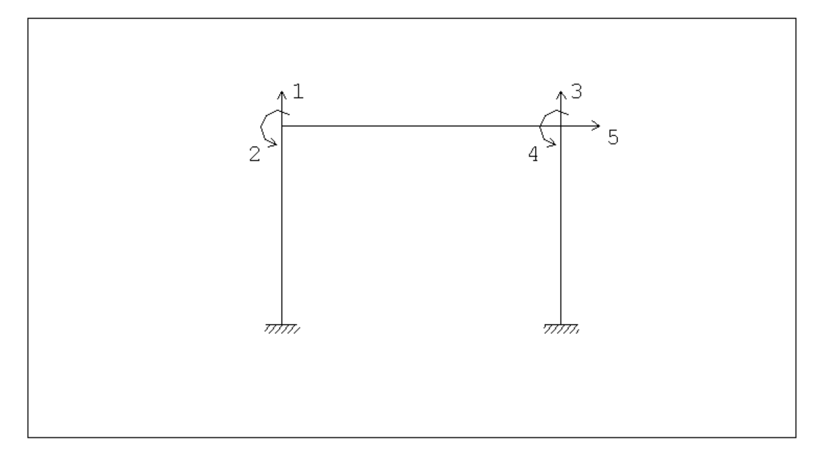


Figura 16.8 Numeración de los grados de libertad para poder aplicar la eliminación de Gauss

$$
\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 80754.85 & 658.64 & -329.32 & 658.64 & 0 \\ & 4497.40 & -658.64 & 934.17 & 1655.72 \\ & & 80754.85 & -658.64 & 0 \\ & & & 4497.40 & 1655.72 \\ & & & & 2499.20 \end{bmatrix}
$$

Al triangularizar la matriz de rigidez, se obtiene:

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0.008156 & -0.004078 & 0.008156 & 0.000000 \\ 0 & 1 & -0.146027 & 0.206764 & 0.368591 \\ 0 & 0 & 1 & -0.00645 & 0.0030 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.31116 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1485.772 \end{bmatrix}
$$

Finalmente, al llevar a la forma de la ecuación (16.14.5), se encuentra:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0.000000 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0.368591 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0.0030 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.31116 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1485.772 \end{bmatrix}$$

Los valores de las cuatro primeras filas de la quinta columna, corresponden a la matriz **-T**, la diferencia que existe es debido al redondeo. El último valor es la matriz de rigidez condensada a la coordenada lateral, de la estructura analizada.

...Para fines prácticos la matriz de rigidez se obtiene únicamente de la etapa de triangularización...

16.5 MATRIZ DE RIGIDEZ LATERAL

Se define *...matriz de rigidez lateral*, $\mathbf{K_L}$... a la matriz de rigidez asociada a las coordenadas laterales de piso. Cuando en el análisis sísmico de pórticos planos se considera un solo grado de libertad por piso, a este modelo se denomina ...*piso rígido*... y sirve únicamente para el análisis ante la componente horizontal de movimiento del suelo.

Existen dos formas de modelar los elementos de un pórtico plano, ante la acción sísmica horizontal. En la primera forma se considera que únicamente las vigas son axialmente rígidas y las columnas totalmente flexibles. En cambio, en la segunda forma se considera que todos los elementos son axialmente rígidos. El pórtico analizado en los numerales anteriores corresponde a la primera forma de cálculo.

En la figura 16.9, se indican los dos modelos anotados, para un pórtico plano de dos pisos y dos vanos. El modelo de la izquierda, corresponde a la primera forma de cálculo y el de la derecha a la segunda forma de cálculo. En el pórtico de la izquierda se nota que solo las vigas son axialmente rígidas; en cambio, en el de la derecha todos los elementos son axialmente rígidos.

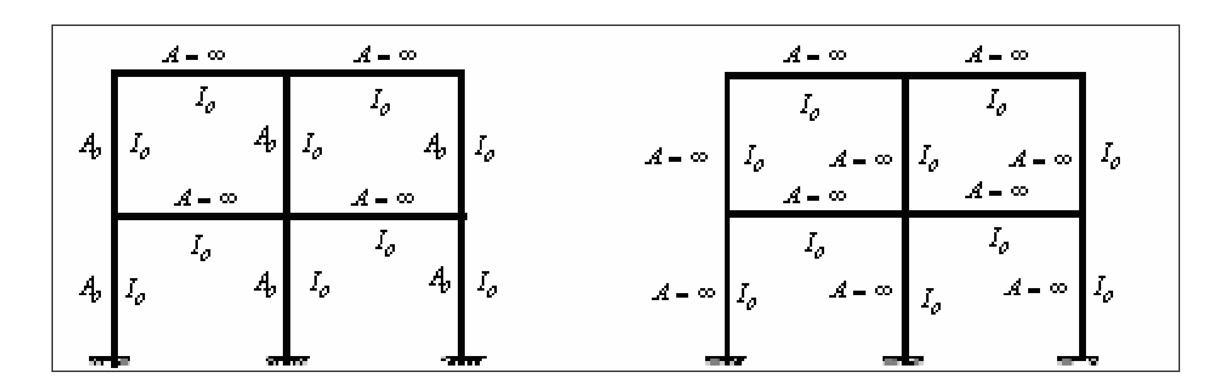


Figura 16.9 Modelos de cálculo para determinar K_L.

16.5.1 Vigas axialmente rígidas y columnas totalmente flexibles

Para este modelo de cálculo, las matrices de rigidez de los elementos: viga y columna, orientados al análisis en el computador, se indicó en el apartado 16.1, razón por la cual se omite el marco teórico y únicamente se presenta un ejemplo de cálculo.

- **EJEMPLO N.- 7**

Para el pórtico plano indicado en la figura 16.10, cuyas vigas son de 30/30 y las columnas de 30/40. Se desea encontrar la matriz de rigidez lateral, considerando que solo las vigas son axialmente rígidas. A la derecha de la figura 16.10, se indica la numeración de los elementos. Por otra parte, el módulo de elasticidad *E* = 2173706.5 *T/m2* y no se considera nudos rígidos.

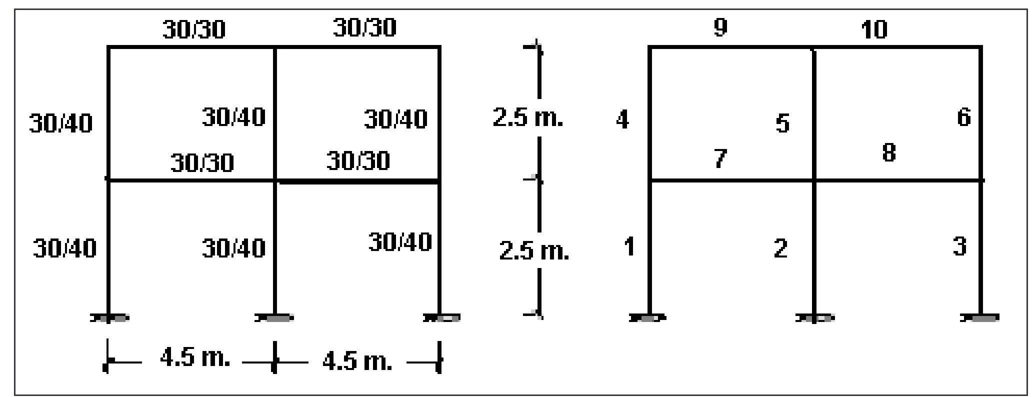


Figura 16.10 Geometría del pórtico cuya matriz de rigidez lateral se va a calcular de dos formas. Se indica además la numeración de los elementos.

- **SOLUCIÓN**

En la figura 16.11, se indica a la izquierda los grados de libertad del pórtico de la figura 16.10, al considerar que solo las vigas son axialmente rígidas. Se ha numerado primero los corrimientos laterales de piso y luego los restantes grados de libertad. A la derecha de la figura 16.11, se presentan las coordenadas laterales de piso.

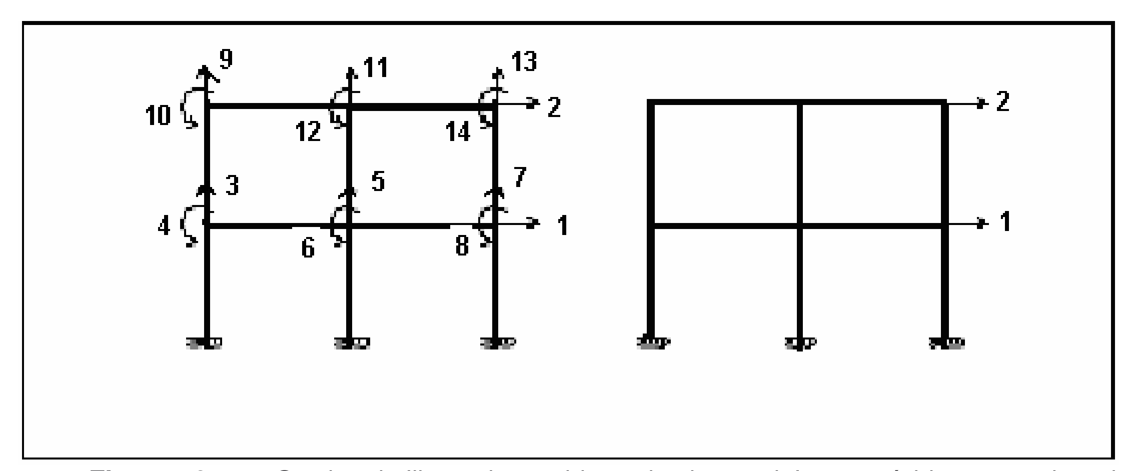


Figura 16.11 Grados de libertad, considerando vigas axialmente rígidas y coordenadas laterales de piso para el análisis sísmico.

La matriz de rigidez es de 14 por 14; la submatriz $\mathbf{K_{aa}}$ es de 2 por 2, la $\mathbf{K_{ab}}$ de 2 por 12; la $\mathbf{K_{bb}}$ es de 12 por 12 y la $\mathbf{K_{ba}}$ de 12 por 2. En forma resumida, las operaciones matriciales reportan:

$$\boldsymbol{K}_{aa} - \boldsymbol{K}_{ab}\ \boldsymbol{K}_{bb}^{-1}\ \boldsymbol{K}_{ba} = \begin{bmatrix} 16026.30 & -8013.15 \\ -8013.15 & 8013.15 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4477.64 & -3558.07 \\ -3558.07 & 5286.50 \end{bmatrix}$$

$$K_L = \begin{bmatrix} 11548.66 & -4455.08 \\ -4455.08 & 2726.65 \end{bmatrix}$$

16.5.2 Vigas y columnas axialmente rígidas

Cuando todos los elementos de un pórtico plano, conformado por vigas y columnas, se consideran axialmente rígidos, se disminuye notablemente el número de grados de libertad y el cálculo es más rápido. Para el caso de que no se considere nudo rígido, las matrices de rigidez, son:

- **Elemento viga**

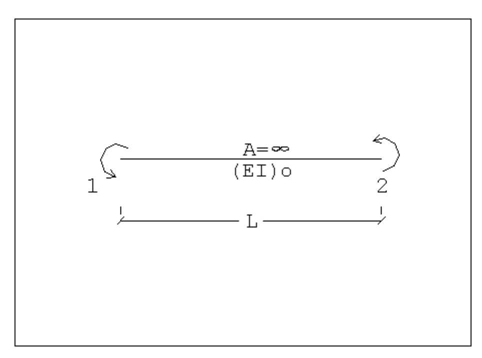


Figura 16.12 Coordenadas globales para un elemento viga, de un pórtico en que todos los elementos son axialmente rígidos.

$$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} k & a \\ a & k' \end{bmatrix} \qquad (16.15)$$

La ecuación (16.15) se encuentra de la ecuación (16.1), eliminando la primera y tercera columna, y, la primera y tercera fila. El sistema de coordenadas de un elemento asociado con la ecuación (16.15) se indica en la figura 16.12.

- **Elemento columna**

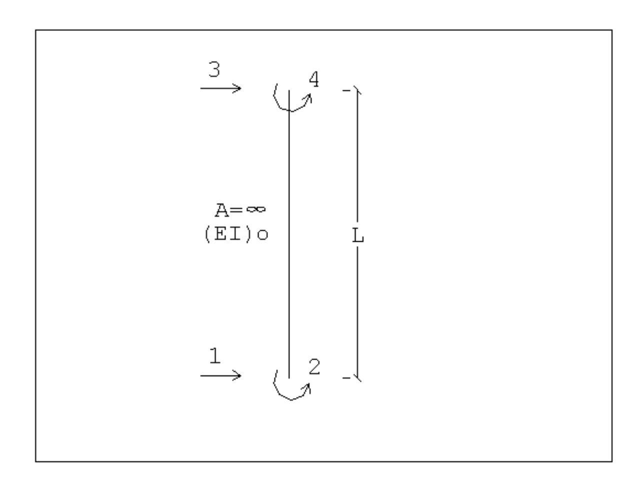


Figura 16.13 Coordenadas globales para un elemento columna, de un pórtico en que todos los elementos son axialmente rígidos.

$$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} t & -b & -t & -b' \\ -b & k & b & a \\ -t & b & t & b' \\ -b' & a & b' & k' \end{bmatrix} \qquad (16.16)$$

Si en la ecuación (16.3), se elimina la segunda y quinta fila, por un lado, y se elimina la segunda y quinta columna, por otro lado, se obtiene la ecuación (16.16) que es la matriz del elemento columna para el sistema de coordenadas globales indicado en la figura 16.13.

- **EJEMPLO N.- 8**

Con relación al pórtico plano de la figura 16.10. Encontrar la matriz de rigidez lateral, considerando que todos los elementos son axialmente rígidos.

- **SOLUCIÓN**

En la figura 16.14, a la izquierda se indica los grados de libertad del pórtico, cuando todos los elementos son axialmente rígidos. Existe un corrimiento horizontal en cada piso y una rotación en cada uno de los nudos. A la derecha de la figura 16.14, se muestran las coordenadas laterales para las cuales se determina la matriz de rigidez lateral.

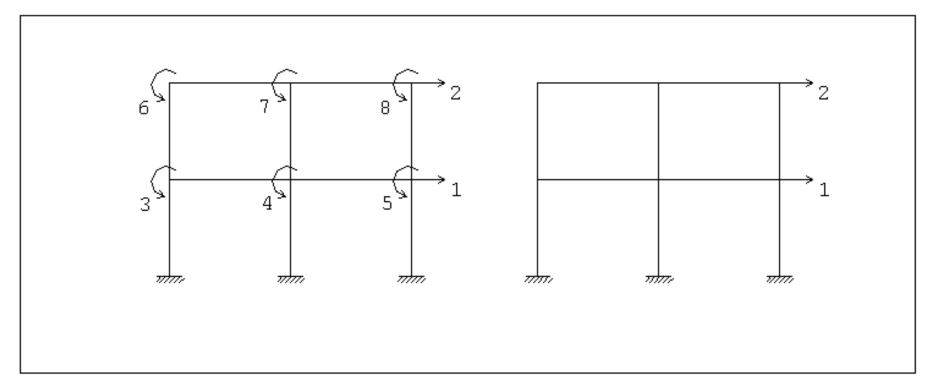


Figura 16.14 Grados de libertad, considerando que todos los elementos son axialmente rígidos y coordenadas laterales de piso para el análisis sísmico.

- **Matriz de rigidez del elemento viga.**

$$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} 1304.22 & 652.11 \\ 652.11 & 1304.22 \end{bmatrix}$$

- **Matriz de rigidez del elemento columna**.

$$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} 2671.05 & -3338.81 & -2671.05 & -3338.8132 \\ -3338.81 & 5564.69 & 3338.81 & 2782.34 \\ -2671.05 & 3338.81 & 2671.05 & 3338.81 \\ -3338.81 & 2782.34 & 3338.81 & 5564.69 \end{bmatrix}$$

- **Vectores de colocación VC, de las vigas.**

$$VC^{(7)} = [3 \quad 4]$$
$$VC^{(8)} = [4 \quad 5]$$
$$VC^{(9)} = [6 \quad 7]$$
$$VC^{(10)} = [7 \quad 8]$$

- **Vectores de colocación VC, de las columnas.**

$$VC^{(1)} = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 2]$$
$$VC^{(2)} = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 4]$$
$$VC^{(3)} = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 5]$$
$$VC^{(4)} = [0 \quad 0 \quad 2 \quad 6]$$
$$VC^{(5)} = [0 \quad 0 \quad 2 \quad 7]$$
$$VC^{(6)} = [0 \quad 0 \quad 2 \quad 8]$$

- **Submatrices K_{aa}, K_{ab}, K_{bb}**

$$K_{aa} = \begin{bmatrix} 16026.303 & -8013.152 \\ -8013.152 & 8013.152 \end{bmatrix}$$

$$K_{ab} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -3338.813 & -3338.813 & -3338.813 \\ 3338.813 & 3338.813 & 3338.813 & 3338.813 & 3338.813 & 3338.813 \end{bmatrix}$$

$$K_{bb} = \begin{bmatrix} 12433.601 & 652.112 & 0 & 2782.344 & 0 & 0 \\ 652.112 & 13737.83 & 652.112 & 0 & 2782.344 & 0 \\ 0 & 652.112 & 10207.726 & 0 & 0 & 2782.344 \\ 2782.344 & 0 & 0 & 6868.913 & 652.112 & 0 \\ 0 & 2782.344 & 0 & 652.112 & 8173.136 & 652.112 \\ 0 & 0 & 2782.344 & 0 & 652.112 & 6868.913 \end{bmatrix}$$

- **Matriz de rigidez lateral**

$$\boldsymbol{K_{aa} - K_{ab}\ K_{bb}^{-1}\ K_{ba}} = \begin{bmatrix} 16026.30 & -8013.15 \\ -8013.15 & 8013.15 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4516.582 & -3509.309 \\ -3509.309 & 5358.492 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K_L} = \begin{bmatrix} 11509.718 & -4503.841 \\ -4503.841 & 2654.658 \end{bmatrix}$$

Se han presentado dos modelos para el cálculo de la matriz de rigidez lateral, el primero es más adecuado pero demanda de una mayor cantidad de números. En estructuras esbeltas es

necesario considerar la deformación axial en los elementos. Se recomienda que si la relación alto-ancho en planta, es mayor que tres se debe considerar la deformación axial.

16.6 SIGNIFICADO FÍSICO

Los elementos de la matriz de rigidez lateral, son las fuerzas horizontales que deben aplicarse a nivel de piso, con el objeto de obtener un determinado desplazamiento lateral unitario y los demás desplazamientos laterales nulos.

Con los datos de la matriz de rigidez encontrados con la primera forma de cálculo, en las figuras 16.15 y 16.16, se presenta el significado físico de los elementos de $\mathbf{K_L}$. En la figura 16.15, a la izquierda se aplican los elementos de la primera columna de la matriz de rigidez y a la derecha se observa la deformada que se obtiene, el primer piso se desplaza la unidad y el segundo no se desplaza; se destaca que existen desplazamientos verticales y rotaciones en los nudos.

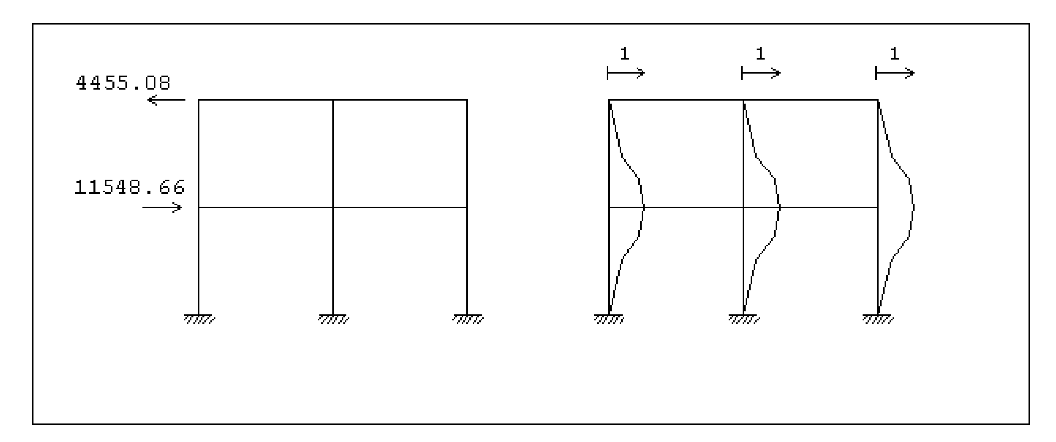


Figura 16.15 Significado físico de los elementos de la primera columna de la matriz de rigidez, para el primer modelo de cálculo.

La figura 16.16, corresponde a los elementos de la segunda columna de la matriz de rigidez lateral, el piso inferior no se desplaza, en cambio el piso superior se desplaza la unidad.

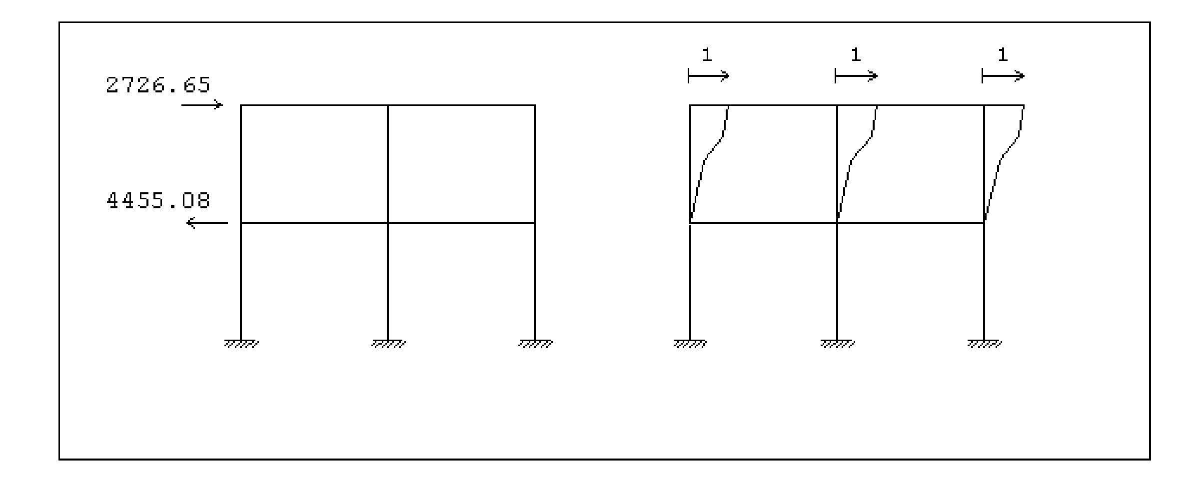


Figura 16.16 Significado físico de los elementos de la segunda columna de la matriz de rigidez, para el primer modelo de cálculo.

16.7 ANÁLISIS CON PISO FLEXIBLE

El modelaje de una estructura con piso flexible, permite realizar el análisis sísmico para la componente vertical de movimiento del suelo o para la componente horizontal. En este caso se considera que todos los elementos son totalmente flexibles. Para el análisis sísmico de un pórtico plano considerando piso flexible, se procede de la siguiente manera:

i) Se numeran todos los grados de libertad horizontal de la estructura.

ii) Luego se numeran todos los grados de libertad vertical.

iii) Finalmente se numeran las rotaciones de los nudos.

iv) Se encuentra la matriz de rigidez por ensamblaje directo.

v) Se particiona la matriz de rigidez, en base al número de grados de libertad horizontales y verticales.

vi) Se determina la matriz de rigidez condensada a las coordenadas horizontales y verticales.

- **Elemento viga, sin considerar nudo rígido**

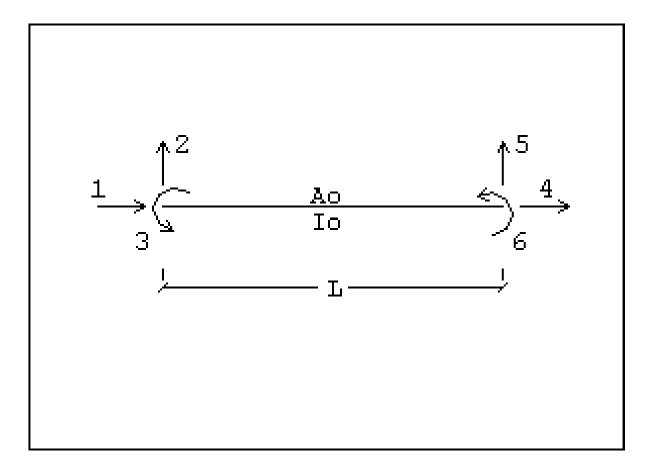


Figura 16.17 Sistema de coordenadas globales para un elemento viga, totalmente flexible.

En la figura 16.17, se indica el sistema de coordenadas globales de un elemento viga, el mismo que se considera totalmente flexible. La matriz de rigidez se obtiene incrementando las filas y columnas uno y cuatro a la ecuación (16.1), con los términos de rigidez *r*.

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 & -r & 0 & 0 \\ & t & b & 0 & -t & b' \\ & & k & 0 & -b & a \\ & & & r & 0 & 0 \\ & & & & t & -b' \\ & & & & & k' \end{bmatrix} \qquad (16.17)$$

Para el elemento columna, la matriz de rigidez en coordenadas globales, es la indicada en (16.3).

- **EJEMPLO N.- 9**

Determinar la matriz de rigidez condensada a las coordenadas laterales y verticales de la estructura cuya geometría se indica en la figura 16.4, todos los elementos son de 30/30, la luz es de 4.0 m, y la altura es de 2.5 m. Se considera *E*=2100000 *T/m2*

- **SOLUCIÓN**

En la figura 16.18, a la izquierda se presentan los grados de libertad de la estructura, cuyos elementos son totalmente flexibles, se ha notado primero los grados de libertad horizontal, luego los verticales y finalmente la rotación. A la derecha se indican los grados de libertad, para los cuales se va a encontrar la matriz de rigidez condensada.

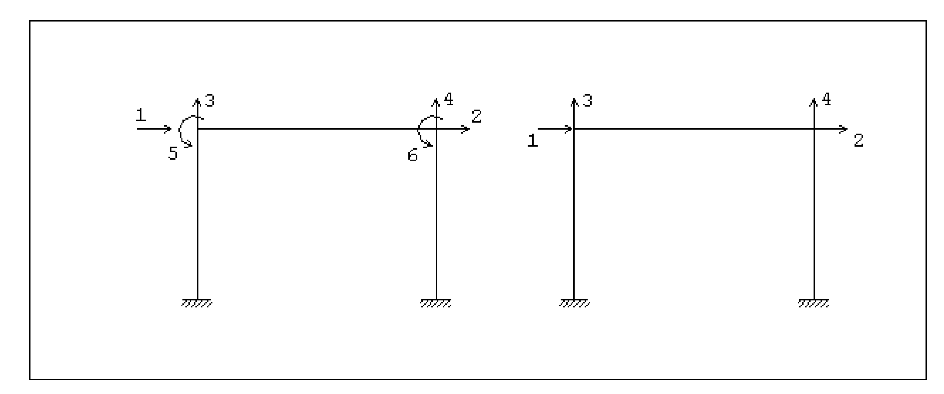


Figura 16.18 Numeración de grados de libertad para análisis con piso flexible y grados de libertad para el análisis sísmico ante componente horizontal o vertical.

Sea, la columna izquierda el elemento uno, la viga el dos y la columna derecha el elemento tres. Los vectores de colocación para el ensamblaje, son:

$$VC^{(1)} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 3 \quad 5]$$
$$VC^{(2)} = [1 \quad 3 \quad 5 \quad 2 \quad 4 \quad 6]$$
$$VC^{(3)} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad 4 \quad 6]$$

El programa CAL *Computer Assisted Learning of Structural Analysis*, es una buena ayuda, que permite analizar estructuras pequeñas, en forma sencilla. A continuación, se presenta el archivo de datos, para el ejemplo que se está resolviendo.

- **Archivo para CAL**

```
B1
FRAME KC1  TC I=0.000675 A=0.09  E=2100000 X=0,0 Y=0,2.5
FRAME KV2  TV I=0.000675 A=0.09  E=2100000 X=0,4 Y=2.5,2.5
FRAME KC3  TC I=0.000675 A=0.09  E=2100000 X=4,4 Y=0,2.5
ZERO K R=6  C=6
LOADI VC R=6 C=3
0  1  0
0  3  0
0  5  0
1  2  2
3  4  4
```

```
5 6 6
ADDK K KC1 VC N=1
ADDK K KV2 VC N=2
ADDK K KC3 VC N=3
PRINT K
DUPSM K KAA R=4 C=4 L=1,1
DUPSM K KAB R=4 C=2 L=1,5
DUPSM K KBA R=2 C=4 L=5,1
DUPSM K KBB R=2 C=2 L=5,5
PRINT KAA
PRINT KAB
PRINT KBA
PRINT KBB
INVERT KBB
MULT KAB KBB KAUX
MULT KAUX KBA KUX
SUB KAA KUX
PRINT KAA
QUIT
```

- **Matriz de rigidez completa**

$$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} 48338.64 & -4720.00 & 0.00 & 0.00 & 1360.80 & 0.00 \\ -47250.00 & 48338.64 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1360.80 \\ 0.00 & 0.00 & 75865.78 & -265.78 & 531.56 & 531.56 \\ 0.00 & 0.00 & -265.78 & 75865.78 & -531.56 & -531.56 \\ 1360.80 & 0.00 & 531.56 & -531.56 & 3685.50 & 708.75 \\ 0.00 & 1360.80 & 531.56 & -531.56 & 708.75 & 3685.50 \end{bmatrix}$$

- **Matriz de rigidez condensada**

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 47816.896 & -47149.665 & -164.613 & 164.613 \\ -47149.665 & 47816.896 & -164.613 & 164.613 \\ -164.613 & -164.613 & 75737.177 & -137.177 \\ 164.613 & 164.613 & -137.177 & 75737.177 \end{bmatrix}$$

Se deja al lector el desarrollo del presente ejercicio considerando nudos rígidos.

16.8 VARIABLES EN LA MODELACIÓN

Lo fundamental del presente capítulo es ilustrar el cálculo de la matriz de rigidez condensada para el análisis sísmico de estructuras. Sin embargo, es importante destacar que existen tres variables que son básicas para la modelación de los pórticos, a saber:

- Modelación de las condiciones de apoyo.
- Modelación de las inercias a considerar en el análisis.
- Modelación de los nudos.

16.8.1 Modelación de las condiciones de apoyo

Normalmente, se considera que las columnas están empotradas en su base, esto significa que la cimentación es completamente rígida y no permite que la columna gire.

Pero si en la base de la columna actúan grandes momentos es probable que exista rotación en la unión columna con la cimentación, y se tengan fuerzas y momentos totalmente diferentes en la columna, en relación a los que se obtienen con base empotrada. Por este motivo se recomienda que la columna sea modelada en su base mediante resortes con rigidez rotacional, para cuando existan grandes momentos actuando en la base de la columna.

La modelación de la base de la columna, con resortes rotacionales, tiene su grado de complejidad en el sentido de definir los parámetros de la rigidez del resorte. *Como alternativa se puede considerar que las columnas están sobre apoyos articulados en una viga de fundación de iguales dimensiones que la de los niveles superiores.*

- **EJEMPLO N.- 10**

Determinar la matriz de rigidez lateral, considerando nudos rígidos, de la estructura indicada en la figura 16.6 pero considerando que las columnas están sobre apoyos articulados sobre una viga de iguales dimensiones de la viga superior.

- **SOLUCIÓN**

En la figura 16.19, a la izquierda se muestra la geometría de la estructura cuya matriz de rigidez lateral $\mathbf{K_L}$ se va a calcular y la numeración de los elementos; al centro se indican los grados de libertad considerados para resolver en forma similar a la figura 16.7 y a la derecha el grado de libertad horizontal, para el cual se va a encontrar $\mathbf{K_L}$.

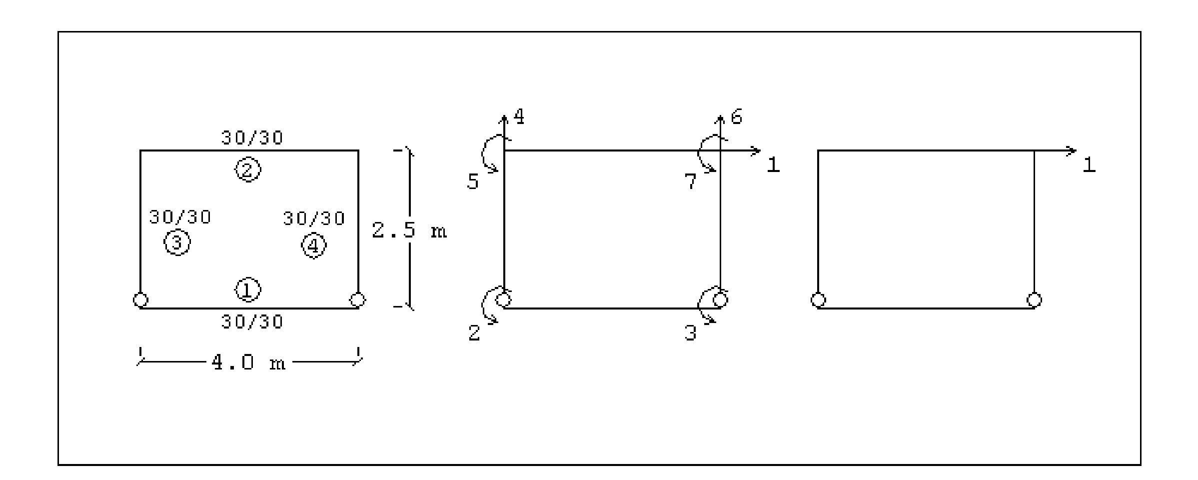


Figura 16.19 Descripción de la estructura, grados de libertad y coordenada lateral del ejemplo, considerando que las columnas se encuentran sobre apoyos articulados en una viga de cimentación.

- **Matriz de rigidez de las vigas 1 y 2**

$$k = \begin{bmatrix} 329.32 & 658.64 & -329.32 & 658.64 \\ & 1700.39 & -658.64 & 934.17 \\ & & 329.32 & -658.64 \\ & & & 1700.39 \end{bmatrix}$$

- **Matriz de rigidez de las columnas 3 y 4**

$$k = \begin{bmatrix} 1249.60 & 0 & -1468.28 & -1249.60 & 0 & -1655.72 \\ & 80425.53 & 0 & 0 & -80425.53 & 0 \\ & & 2328.42 & 1468.28 & 0 & 1342.28 \\ & & & 1249.60 & 0 & 1655.72 \\ & & & & 80425.53 & 0 \\ & & & & & 2797.02 \end{bmatrix}$$

- **Vectores de colocación de las vigas**

$$VC^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$
$$VC^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

- **Vector de colocación de las columnas**

$$VC^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$
$$VC^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

- **Submatrices K_{aa}, K_{ab} y K_{bb}**

$$K_{aa} = \begin{bmatrix} 2499.20 \end{bmatrix}$$
$$K_{ab} = \begin{bmatrix} 1468.28 & 1468.28 & 0 & 1655.72 & 0 & 1655.72 \end{bmatrix}$$

$$K_{bb} = \begin{bmatrix} 4028.81 & 934.17 & 0 & 1342.28 & 0 & 0 \\ 934.17 & 4028.81 & 0 & 0 & 0 & 1342.28 \\ 0 & 0 & 80754.85 & 658.64 & -329.32 & 658.64 \\ 1342.28 & 0 & 658.64 & 4497.41 & -658.64 & 934.17 \\ 0 & 0 & -329.32 & -658.64 & 80754.85 & -658.64 \\ 0 & 1342.28 & 658.64 & 934.17 & -658.64 & 4497.41 \end{bmatrix}$$

- **Matriz de rigidez lateral K_L**

Cuando se calculó con las columnas empotradas, la matriz de rigidez lateral fue **K_L = 1485.772** . *Por lo tanto, al calcular con columnas articuladas sobre una viga de dimensiones iguales a la viga del primer piso, la matriz de rigidez disminuye*.

- **Archivo para programa CAL**

```
B1
LOAD KV R=6 C=6
0   0    0    0    0    0
0  329.32  658.64   0   -329.32    658.64
0  658.64  1700.39  0    -658.64   934.17
0   0      0     0     0       0
0 -329.32 -658.64   0    329.32    -658.64
0  658.64  934.17   0    -658.64   1700.39
LOAD KC R=6 C=6
1249.60  0   -1468.28   -1249.60    0    -1655.72
0    80425.53   0       0        -80425.53    0
-1468.28  0   2328.42    1468.28    0     1342.28
-1249.60   0  1468.28    1249.60    0     1655.72
0       -80425.53  0       0         80425.53   0
-1655.72    0     1342.28   1655.72    0      2797.02
ZERO K R=7 C=7
LOADI VC R=6 C=4
0  0   0   0
0  4   0   0
2  5   2   3
0  0   1   1
0  6   4   6
3  7   5   7
ADDK K KV VC N=1
ADDK K KV VC N=2
ADDK K KC VC N=3
ADDK K KC VC N=4
DUPSM K KAA R=1 C=1 L=1,1
DUPSM K KAB R=1 C=6 L=1,2
DUPSM K KBB R=6 C=6 L=2,2
DUPSM K KBA R=6 C=1 L=2,1
INVERT KBB
MULT KAB KBB KAUX
MULT KAUX KBA KUX
SUB KAA KUX
PRINT KAA
QUIT
```

16.8.2 Modelación de las inercias

En la filosofía de diseño sísmico se considera que una estructura ante un sismo de frecuente de baja magnitud no va a sufrir ningún daño en ese caso es muy correcto todo lo que se ha realizado en el presente capítulo de calcular con inercias gruesas I_o . Pero también se considera el caso de que va a registrarse un sismo muy fuerte que va a producir daño en la estructura en éste caso el análisis sísmico debe realizarse con inercias agrietadas I_{cr} tema que se aborda en el presente subapartado.

Un aspecto que no se ha tomado en cuenta, en este texto, es la incorporación de la losa en la resistencia y rigidez de las vigas, *para el caso de que estos dos elementos estructurales se construyan en forma monolítica*. Este tema es tratado de acuerdo a lo prescrito por el ACI-02 y el Código Ecuatoriano de la Construcción CEC-2000.

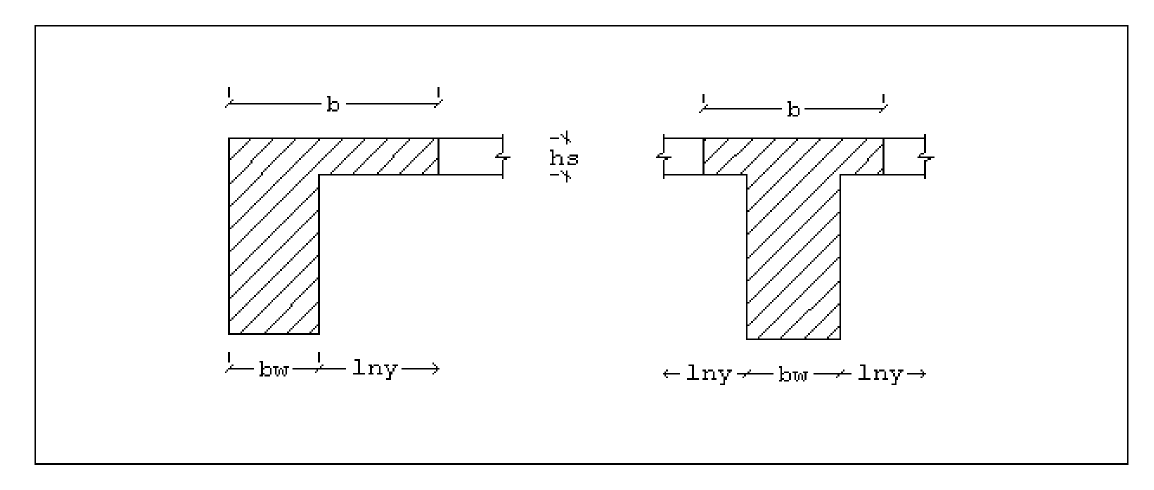


Figura 16.20 Nomenclatura para vigas L y T.

En la figura 16.20, se indica la nomenclatura utilizada para determinar la resistencia a flexión y rigidez, de una viga "T" o "L", de acuerdo al ACI-95 y NZS-3101-82.

El valor del ancho efectivo *b*, para cuando el ala se encuentra en compresión, es el menor valor de:

- **Viga "L" de acuerdo al ACI 318-02**

Valores para determinar resistencia a flexión y rigidez.

$$b \le b_w + 6h_s \tag{16.18.1}$$

$$\le b_w + \frac{l_{ny}}{2} \tag{16.18.2}$$

$$\le b_w + \frac{l_x}{12} \tag{16.18.3}$$

- **Viga "T" de acuerdo al ACI 318-02**

Valores para determinar resistencia a flexión y rigidez.

$$b \le b_w + 16h_s \tag{16.19.1}$$

$$\le b_w + l_{ny} \tag{16.19.2}$$

$$\le b_w + \frac{l_x}{4} \tag{16.19.3}$$

siendo l_x, la luz de la viga en la dirección de análisis, l_{ny}, la distancia libre al próximo nervio.

Se destaca que el ACI en el apartado 8.10.5 indica la necesidad de disponer armadura perpendicular a la viga en la parte superior de la losa con una separación que no exceda 5 veces el espesor de la losa ni 45 cm.

Una vez determinada la contribución de la losa para el cálculo de las inercias, se procede a determinar las inercias agrietadas de acuerdo al ACI-02 se tiene:

$$I_v = 0.35\ I_g \qquad (16.20.1)$$

$$I_c = 0.70\ I_g \qquad (16.20.2)$$

La norma de Nueva Zelanda NZS-3101-82[11], determina el ancho equivalente con las ecuaciones (16.18.1) a (16.19.3) únicamente para determinar la resistencia a flexión cuando el ala está sujeta a compresión. Para el cálculo de la rigidez, los valores son los siguientes:

- **Viga "L" de acuerdo a NZS-3101-82**

Valores para determinar rigidez.

$$b \le b_w + 3h_s \qquad (16.21.1)$$

$$\le b_w + \frac{l_{ny}}{4} \qquad (16.21.2)$$

$$\le b_w + \frac{l_x}{24} \qquad (16.21.3)$$

- **Viga "T" de acuerdo a NZS-3101-82**

Valores para determinar rigidez.

$$b \le b_w + 8h_s \qquad (16.22.1)$$

$$\le b_w + \frac{l_{ny}}{2} \qquad (16.22.2)$$

$$\le b_w + \frac{l_x}{8} \qquad (16.22.3)$$

Los valores han sido prácticamente reducidos en un 50% con relación a los del ACI 318-95.

Por otra parte, Paulay y Priestley recomiendan utilizar las inercias agrietadas I_{cr} indicadas en la tabla 16.1, se indica además el rango de variación.

Tabla 16.1 Valores recomendados por Paulay y Priestley para la inercia agrietada I_{cr}.

ELEMENTO Y FORMA	**RANGO** I_{cr}	**RECOMENDADO** I_{cr}
Viga Rectangular	0.30 a 0.50 de I_g	0.40 de I_g
Viga T o L	0.25 a 0.45 de I_g	0.35 de I_g
Columna P>0.5 $f'c\ A_g$	0.70 a 0.90 de I_g	0.80 de I_g
Columna P=0.2 $f'c\ A_g$	0.50 a 0.70 de I_g	0.60 de I_g
Columna P=-0.05 $f'c\ A_g$	0.30 a 0.50 de I_g	0.40 de I_g

En la tabla 16.1, $f'c$ es la resistencia a la compresión del hormigón; A_g, es el área total de la sección; I_g, es el momento de inercia grueso y P la fuerza axial.

Al inicial el análisis no se conoce la carga axial que gravita sobre la columna P, por lo que el cálculo debe realizarse en forma iterativa.

Finalmente el Código Ecuatoriano de la Construcción CEC-2000 considera la inercia agrietada en vigas el 50% de la inercia gruesa y la inercia agrietada en columnas el 80% de la inercia gruesa. De esta forma ante un sismo severo se tiene previsto un mayor daño en las vigas que en las columnas.

$$I_v = 0.5 * I_o \qquad (16.23.1)$$

$$I_c = 0.8 * I_o \qquad (16.23.2)$$

16.8.3 Modelación de los nudos

Se diseña con el principio de *nudo fuerte - viga débil*. Esto significa que teóricamente el nudo no va a dañarse durante un sismo severo. En estas condiciones, el modelaje de los elementos debe considerar dos sectores de rigidez infinita en los extremos, de esta manera la rigidez de los elementos será mayor.

Ahora bien, durante un sismo el nudo está sujeto a fuerzas de corte de considerable magnitud lo cual provoca una considerable fisuración diagonal, especialmente en nudos en los cuales no se ha realizado el control del cortante horizontal y vertical transmitido al nudo. Existe la posibilidad de un deterioro de la adherencia en el nudo como consecuencia de las fuerzas reversibles que se producen debido al sismo, el ACI-95 con las recomendaciones estipuladas para el control de adherencia no está resolviendo el problema, únicamente está minimizando los efectos de adherencia. **En fin, *ante la acción de un sismo severo es conveniente modelar los elementos sin nudos rígidos en los pórticos dúctiles compuestos por vigas y columnas*.**

Por lo tanto, el modelaje del elemento con y sin nudo rígido depende del nivel de desempeño esperado en la edificación. Para el nivel de desempeño denominado *operacional* en que no se espera daño en la estructura se debe modelar a los elementos con dos sectores de rigidez infinita, de igual manera se debe proceder para el desempeño *inmediatamente ocupacional*. Para los niveles de desempeño denominados *seguridad de vida* y *prevención del colapso*, lo más adecuado es modelar los elementos sin nudos rígidos. La nomenclatura utilizada de los niveles de desempeño es la recomendada por VISION 2000 en la nueva filosofía de diseño sísmico de las estructuras.

En estructuras con muros de corte, es importante modelar los elementos con nudos rígidos debido a que las deformaciones en la unión muro de corte con las vigas, las deformaciones del nudo serán probablemente muy pequeñas.

16.9 EJERCICIOS PROPUESTOS

En las siguientes estructuras determinar la matriz de rigidez lateral de la siguiente manera:

i) Mediante un modelo numérico de cálculo sin nudo rígido y considerando que solo las vigas son axialmente rígidas.

ii) Mediante un modelo numérico de cálculo sin nudo rígido y considerando que todos los elementos son axialmente rígidos.

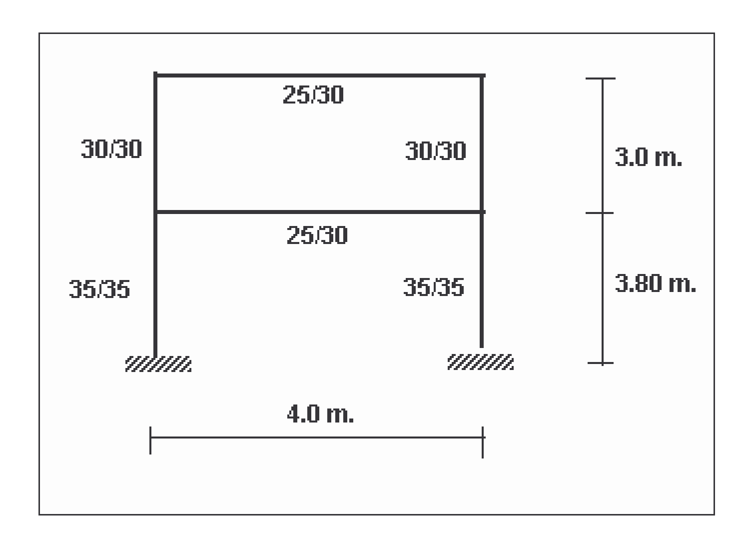
iii) Mediante un modelo de cálculo con nudo rígido y considerando que solo las vigas son axialmente rígidas.

iv) Mediante un modelo de cálculo con nudo rígido y considerando que todos los elementos son axialmente rígidos.

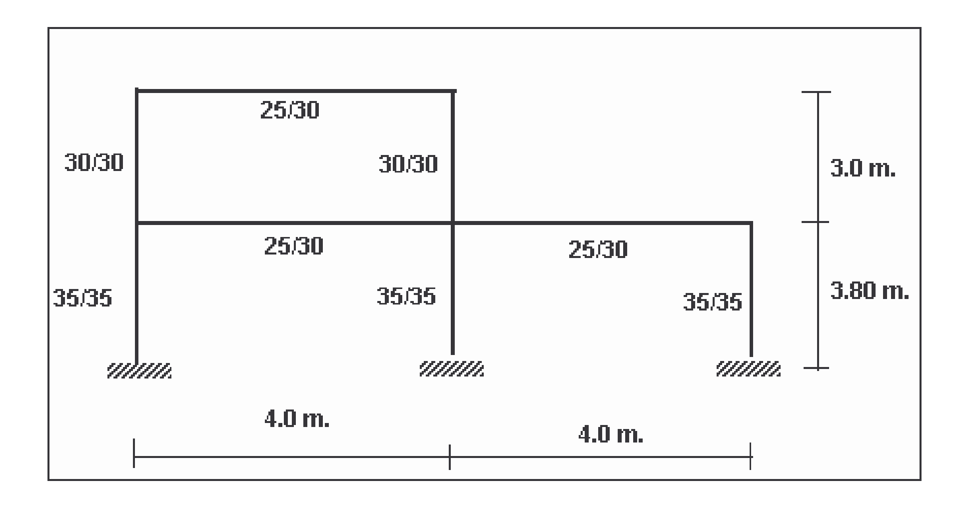
v) Mediante la rigidez de piso calculada como la sumatoria de las rigideces $t = \frac{12EI}{H^3}$

Considerar $E = 12000\sqrt{f'c}$ $f'c = 210\ kg/cm^2$ Despreciar el efecto del corte.

EJERCICIO N.- 1



EJERCICIO N.- 2



EJERCICIO N.- 3

Resolver el ejercicio 1 considerando inercias agrietadas de acuerdo al CEC-2000.

EJERCICIO N.- 4

Resolver el ejercicio 2 considerando inercias agrietadas de acuerdo al ACI-02.

EJERCICIO N.- 5

Resuelva los ejercicios 3 y 4 considerando rotaciones en los apoyos.

CAPITULO 17

MATRIZ DE RIGIDEZ EN COORDENADAS DE PISO

RESUMEN

Se presenta el cálculo de la matriz de rigidez de una estructura en la cual se consideran tres grados de libertad por planta, orientado al análisis sísmico espacial de edificios considerando que los pisos son completamente rígidos. En el modelo numérico de cálculo se considera que los pórticos son elementos de una estructura que se unen por medio de una losa o diafragma horizontal en cada uno de los pisos. Se analiza cuales son las submatrices que conforman la matriz de rigidez en coordenadas de piso con el propósito de que el lector aprenda a decidir una buena estructuración sísmica de un edificio de acuerdo a un determinado objetivo que puede ser, por ejemplo que la estructura tenga una gran rigidez torsional.

Por otra parte se presenta el cálculo del Centro de Rigidez de tres maneras, la primera en forma matricial y es la más exacta; la segunda en forma muy aproximada por medio de la rigidez "t" y la tercera en base a la matriz de rigidez de piso de cada uno de los pórticos.

17.1 DESCRIPCIÓN DEL MODELO

En la figura 17.1, a la izquierda, se presenta un edificio de cuatro pisos compuesto por cuatro pórticos, el modelo es aplicable a un edificio con cualquier número de pisos y pórticos. En cada planta de la estructura se ha definido el **C**entro de **M**asas y en ese punto se han ubicado los tres grados de libertad por planta que son dos componentes de desplazamiento horizontal y una rotación de piso.

La numeración de los tres grados de libertad por planta es arbitrario sin embargo es conveniente numerar primero todas las componentes de desplazamiento horizontal según el eje X empezando desde la primera planta hasta la última planta; luego todas las componentes de desplazamiento horizontal según el eje Y así mismo empezando desde la primera planta hasta la última y finalmente las rotaciones de piso como lo muestra la figura 17.1. A éstos tres grados de libertad por planta se denomina sistema $Q-q$ ya que son coordenadas de la estructura. Donde Q

es el vector de cargas aplicadas en el centro de masa de la estructura y $\boldsymbol{q}$ el vector de coordenadas de piso.

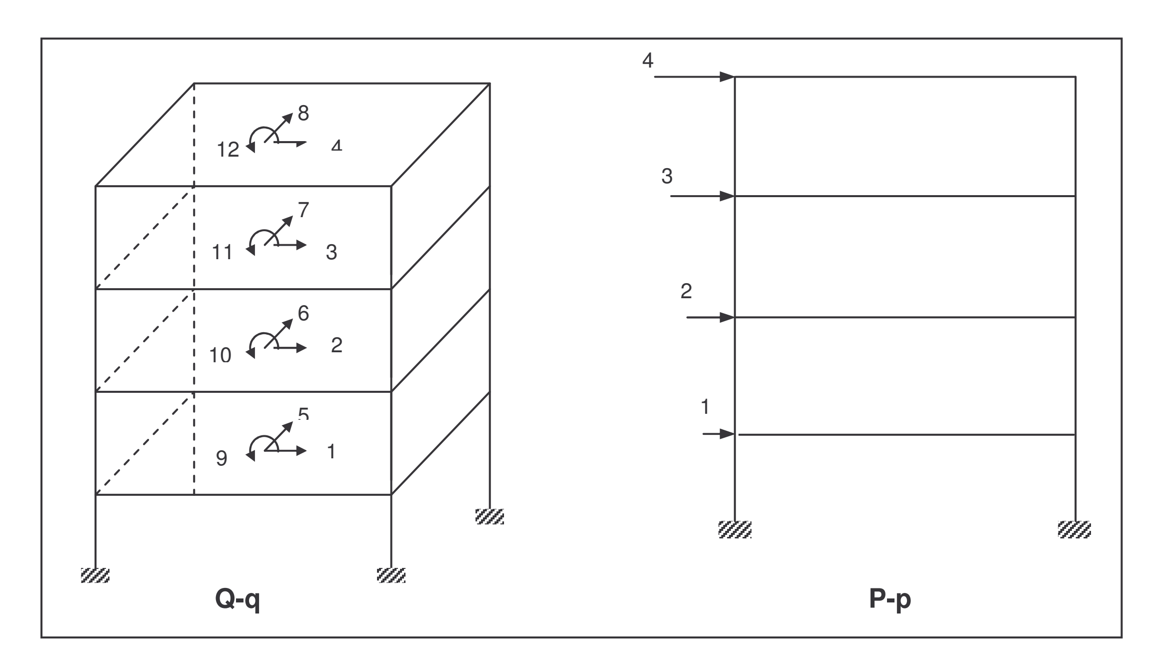


Figura 17.1 Coordenadas de la Estructura y Coordenadas de un Elemento

Para la estructura de la figura 17.1 se tiene que los vectores de cargas y coordenadas generalizadas tienen la siguiente forma y significado.

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_X \\ \boldsymbol{Q}_Y \\ \boldsymbol{Q}_\theta \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_X \\ \boldsymbol{q}_Y \\ \boldsymbol{q}_\theta \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q}_X = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{Q}_Y = \begin{bmatrix} Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{Q}_\theta = \begin{bmatrix} Q_9 \\ Q_{10} \\ Q_{11} \\ Q_{12} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{q}_X = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{q}_Y = \begin{bmatrix} q_5 \\ q_6 \\ q_7 \\ q_8 \end{bmatrix} \qquad q_\theta = \begin{bmatrix} q_9 \\ q_{10} \\ q_{11} \\ q_{12} \end{bmatrix}$$

donde Q_1 es la fuerza horizontal aplicada en el primer piso en sentido X positiva si va hacia la derecha, Q_2 similar a Q_1 pero en el segundo piso,….., Q_5 es la fuerza horizontal aplicada en el primer piso en sentido Y positivo si está en la dirección del sistema $\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{q}$, Q_6 similar a Q_5 pero en el piso 2,…., Q_9 es el momento de torsión aplicado en el primer piso positivo si es antihorario, Q_{10} momento de torsión aplicado en el segundo piso, etc.

Por otro lado se tiene que q_1 es la componente de desplazamiento horizontal en sentido X del primer piso, q_2 es similar a q_1 pero en el piso 2,…., q_5 es la componente de desplazamiento horizontal en sentido Y del primer piso, q_6 similar a q_5 pero en piso 2,…., q_9 es la rotación por torsión en el primer piso, q_{10} es la rotación por torsión en el segundo piso, etc. Serán positivas si están en el sentido del sistema $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{q}$.

17.2 HIPÓTESIS DEL MODELO

Como se indicó se considera que cada pórtico plano es un elemento de la estructura cuyo sistema de coordenadas de miembro está conformado por las coordenadas laterales de cada uno de los pisos. En la figura 17.1 a la derecha se indica el sistema de coordenadas $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}$ de los elementos que tienen la siguiente forma y significado.

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}$$

donde P_1 es la fuerza horizontal que actúan en el piso 1, P_2 es la fuerza horizontal en el piso 2, etc. Por otra parte p_1 es el desplazamiento horizontal del piso 1, p_2 es el desplazamiento horizontal en el piso 2, etc.

La relación entre el vector de cargas $\boldsymbol{P}$ y el vector de desplazamientos $\boldsymbol{p}$ viene dado por la matriz de rigidez lateral $\boldsymbol{KL}$ de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{KL}\ \boldsymbol{p} \qquad (17.1)$$

17.3 MATRIZ $\boldsymbol{KE}$

Se recuerda que la matriz de rigidez lateral $\boldsymbol{KL}$ es aquella matriz que está asociada a las coordinas laterales de piso, con esta matriz se obtiene la matriz de rigidez en coordenadas de piso $\boldsymbol{KE}$ aplicando la ecuación (17.2) que fue estudiada en capítulos anteriores.

$$\boldsymbol{KE} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{A}^{(i)t}\ \boldsymbol{KL}^{(i)}\ \boldsymbol{A}^{(i)} \qquad (17.2)$$

donde n es el número de pórticos de la estructura (elementos), $\boldsymbol{A}^{(i)}$ es la matriz de compatibilidad del pórtico i, que relaciona las coordenadas laterales de un pórtico con las coordenadas de piso de la estructura. La forma de la matriz $\boldsymbol{A}^{(i)}$ es la siguiente:

$$\boldsymbol{A}^{(i)} = \begin{bmatrix} Cos\alpha & & & Sen\alpha & & & r_1 & & \\ & Cos\alpha & & & Sen\alpha & & & r_2 & \\ & ...... & & & ..... & & & .... & \\ & & Cos\alpha & & & Sen\alpha & & & r_n \end{bmatrix} \qquad (17.3)$$

siendo α es el ángulo que forma la orientación positiva del pórtico con el eje de las X. Para pórticos paralelos al eje X este ángulo vale 0^0 y para pórticos perpendiculares al eje X vale 90^0. Por otra parte r_j es la distancia desde el Centro de Masa al pórtico en el piso j, será positiva si la orientación del pórtico rota con respecto al centro de masa en sentido horario. La orientación positiva de los pórticos es paralela y en el sentido de los ejes X, Y. La matriz $\boldsymbol{A}$ tiene NP filas y $3 * NP$ columnas, donde NP es el número de pisos del pórtico para el caso más general.

Se deja al lector la deducción de la matriz $\boldsymbol{A}$. Lo deseable es que se calcule la matriz de rigidez lateral aplicando la condensación estática de la matriz de rigidez que se estudió en el capítulo anterior pero se puede encontrar en forma aproximada la matriz de rigidez lateral **KL** en función de la rigidez de piso k_j, con la ecuación (17.4). Donde $k_1, k_2, k_3, ...k_n$ son la rigidez del piso uno, dos, tres,…. y del último piso.

$$\boldsymbol{KL}^{(i)} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & & & \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & & \\ & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 & \\ & & ..... & .... & ...... \\ & & & -k_n & k_n \end{bmatrix} \qquad (17.4)$$

- **EJEMPLO N.- 1**

Encontrar la matriz de rigidez en coordenadas de piso para la estructura de de cinco pisos indicada en la figura 17.2, por facilidad se considera que todos los pórticos son iguales y se va a obtener la matriz de rigidez lateral aplicando la ecuación (17.4). En la tabla 17.1 se indica la rigidez de cada uno de los pisos de un pórtico tipo.

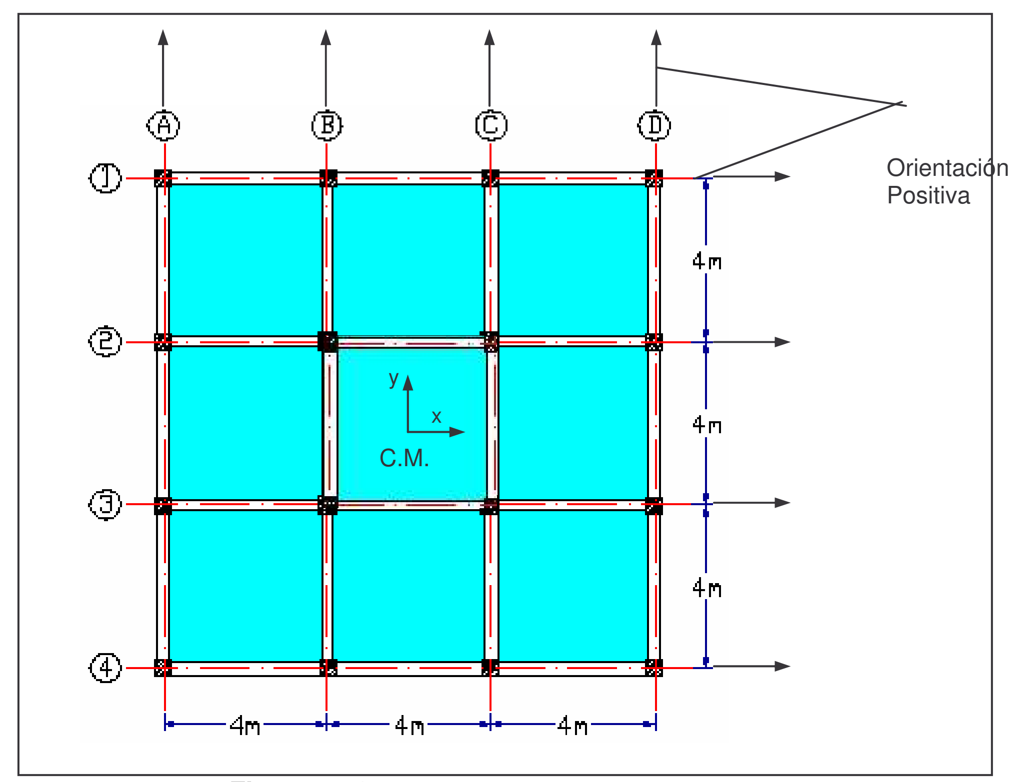


Figura 17.2 Descripción en planta de la estructura de 5 pisos.

Tabla 17.1 Rigidez de Piso para el ejemplo 1

	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5
Elástica	4435.05	2428.38	2202.36	2326.37	2359.46

- **SOLUCIÓN**

En la figura 17.2, se muestra la orientación positiva de los pórticos en base a la cual se obtienen la matriz de compatibilidad de cada uno de ellos. Nótese que es paralela a los ejes X,Y. Para encontrar las matrices de compatibilidad de cada uno de los pórticos con la ecuación (17.3) es conveniente tabular los datos en una tabla como la 17.2.

Tabla 17.2 Parámetros que definen los pórticos para calcular matriz $\boldsymbol{A}$

Pórtico	α	r
1	0	-6
2	0	-2
3	0	2
4	0	6
A	90	-6
B	90	-2
C	90	2
D	90	6

Se considera que las plantas son iguales en todos los pisos razón por la cual la distancia del Centro de Masas al pórtico es un solo valor y no cambia de piso a piso. En la tabla 17.2 se aprecia que el valor de r para el pórtico 1 es negativo debido a que la orientación de dicho pórtico con respecto al Centro de Masa es horario, lo propio se tiene con los pórtico 2, A y B. Al reemplazar los datos de la tabla 17.2 en la ecuación (17.3) se obtienen las matrices de compatibilidad de cada uno de los pórticos. Para el pórtico 1, se tiene:

$$\overline{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

Para los pórticos 2, 3 y 4 lo único que cambia es el valor de r de -6 que se tiene para el pórtico 1 a -2, 2 y 6, respectivamente. A continuación se indica la matriz de compatibilidad para el pórtico A.

$$\overline{A}^{(A)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

De igual manera para los pórticos B, C, y D la matriz A se mantiene igual a la del pórtico A con la acotación de que cambian los valores de r por –2, 2 y 6 respectivamente.

La matriz KL es la misma para todos los pórticos y es la que se muestra a continuación empleando la ecuación (17.4).

$$\overline{KL}^{(i)} = \begin{bmatrix} 6863.43 & -2428.38 & 0 & 0 & 0 \\ -2428.38 & 4630.74 & -2202.36 & 0 & 0 \\ 0 & -2202.36 & 4528.73 & -2326.37 & 0 \\ 0 & 0 & -2326.37 & 4685.83 & -2359.46 \\ 0 & 0 & 0 & -2359.46 & 2359.46 \end{bmatrix}$$

Al realizar el triple producto matricial y la sumatoria respectiva indicada en la ecuación (17.2) se obtiene la matriz de rigidez KE que resulta de 15X15. Por falta de espacio se escribe a continuación algunos elementos de esta matriz de rigidez.

$$\overline{KE} = \begin{bmatrix} 27453.72 & -9713.52 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -913.52 & 18522.96 & -8809.44 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -8809.44 & 18114.92 & -9305.48 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -9305.48 & 18743.32 & -9437.84 & \cdots & 0 \\ & 0 & 0 & -9437.84 & 9437.84 & \cdots & 0 \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -377513.60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 377513.60 \end{bmatrix}$$

- **EJEMPLO N.- 2**

Encontrar la matriz de rigidez en coordenadas de piso de la estructura irregular indicada en la figura 17.3. En la parte superior se indica una perspectiva de la estructura y en la parte inferior se indica la distribución en planta con la nomenclatura utilizada para identificar cada uno de los pórticos. Calcular con inercias agrietadas de acuerdo al Código Ecuatoriano de la Construcción CEC-2000. Considerar $E = 2173706.513\, T/m^2$. En la figura 17.4 se indica la geometría de cada uno de los pórticos de la estructura.

- **SOLUCIÓN**

El Código Ecuatoriano de la Construcción CEC-2000 estipula que las Inercias agrietadas con las cuales se debe realizar el análisis sísmico de vigas y columnas son:

$$I_v = 0.5\, I_o \qquad\qquad I_c = 0.8\, I_o \qquad\qquad I_o = \frac{b\, h^3}{12}$$

Las matrices de rigidez lateral de cada uno de los pórticos son las siguientes:

$$K_L^{(A)} = [772.87]$$

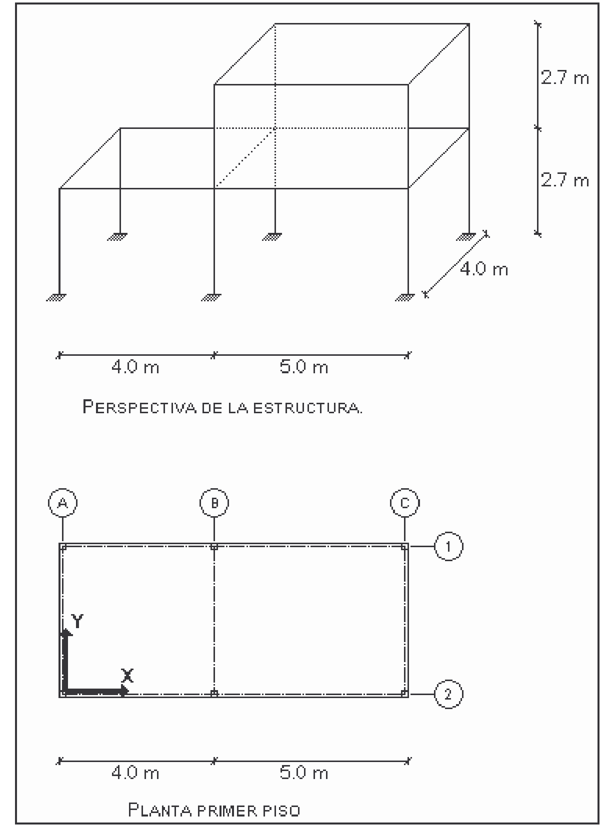


Figura 17.3 Descripción de la estructura irregular de 2 pisos.

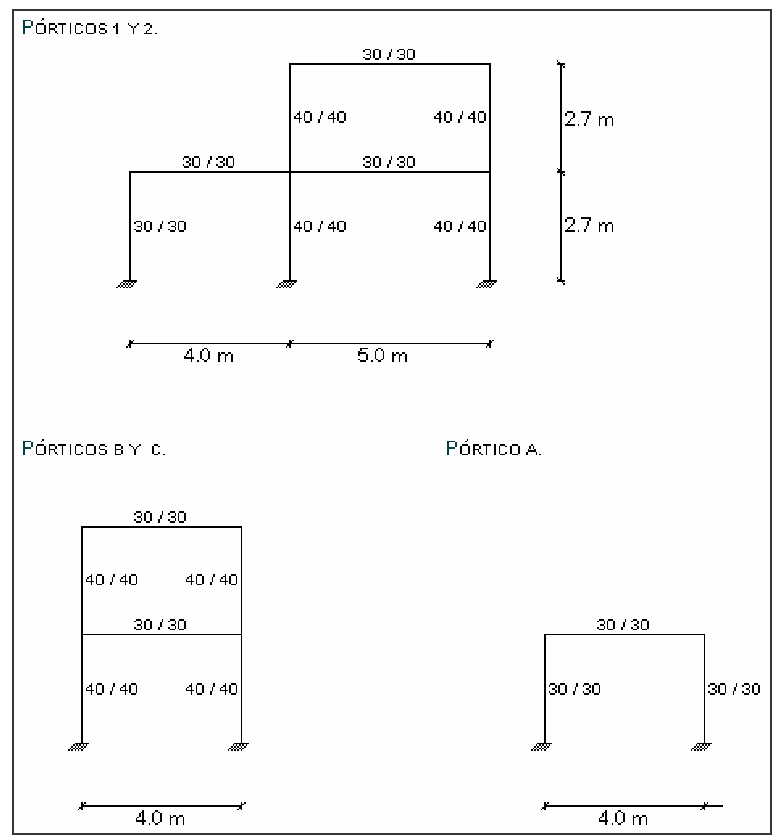


Figura 17.4 Geometría de los pórticos de la estructura irregular de 2 pisos.

$$\boldsymbol{K_L}^{(B)} = \boldsymbol{K_L}^{(C)} = \begin{bmatrix} 5922.7 & -2108.8 \\ -2108.8 & 1114.9 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K_L}^{(1)} = \boldsymbol{K_L}^{(2)} = \begin{bmatrix} 6176.2 & -1991.5 \\ -1991.5 & 1050.4 \end{bmatrix}$$

En la figura 17.5 se indica el sistema de coordenadas laterales de cada uno de los pórticos.

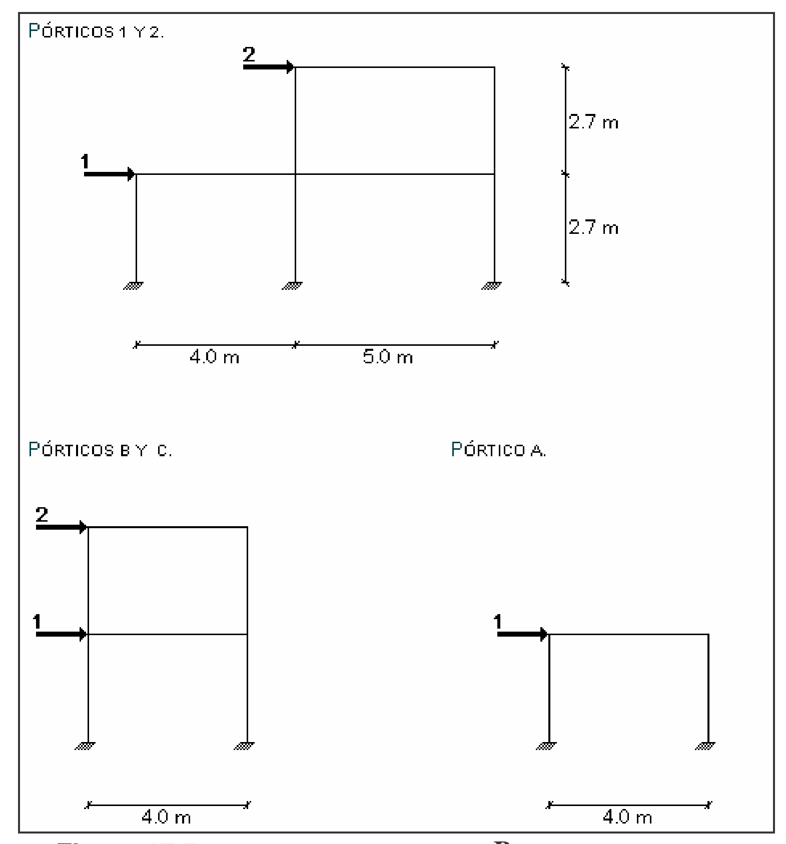


Figura 17.5 Sistema de coordenadas $P - p$ de los pórticos.

El pórtico A es de un piso en consecuencia la matriz de rigidez lateral es de 1 x 1 pero los restantes pórticos son de dos pisos y sus matrices de rigidez lateral son de 2 x 2. Con el objeto de que todas las matrices de rigidez lateral sean de 2 x 2 se utiliza el siguiente artificio que consiste en escribir la matriz de rigidez lateral del pórtico A como una matriz de 2 x 2, de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{K_L}^{(A)} = \begin{bmatrix} 772.87 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 \end{bmatrix}$$

Ahora se debe determinar el Centro de Masas de cada uno de las plantas. En plantas regulares con carga repartida en forma simétrica éste centro coincide con el centro geométrico de la misma pero cuando se trabaja con plantas irregulares o plantas con aberturas para determinar el centro de masas se debe aplicar el siguiente formulario.

$$X_{CM} = \frac{\sum X_i \; m_i}{\sum m_i} \qquad\qquad Y_{CM} = \frac{\sum Y_i \; m_i}{\sum m_i}$$

donde X_{CM} es la distancia en X del Centro de Masas con respecto a un punto tomado como origen; Y_{CM} es la distancia en Y del CM con respecto a un punto tomado como origen; X_i es la distancia en sentido X desde el CM de cada figura hasta el punto de referencia; Y_i es la distancia en sentido Y desde el CM de cada figura hasta el punto de referencia; m_i es la masa de la figura i.

En la estructura que se está analizando se considera que el Centro de Masas se halla ubicado en el centro geométrico de cada planta como se indica en la figura 17.6 es ahí donde se ubica el sistema de coordenadas $\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{q}$. Nótese que primero se han numerado todos los desplazamientos en sentido X, luego los desplazamientos en sentido Y, finalmente las rotaciones.

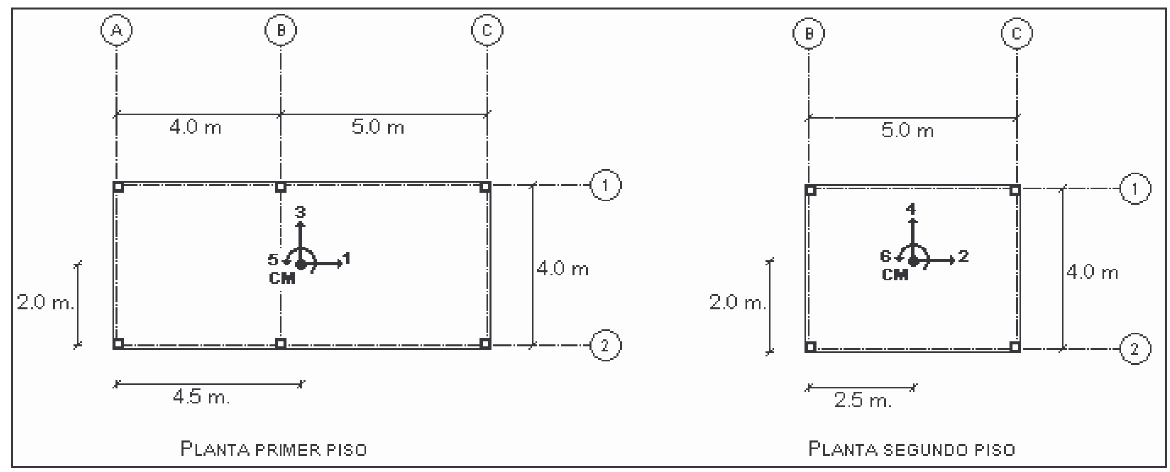


Figura 17.6 Sistema de coordenadas $\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{q}$ de la estructura irregular de 2 pisos.

Las matrices de compatibilidad que se obtienen para los pórticos 1 y 2 al reemplazar $\alpha = 0$ en la ecuación (17.3) y considerando que la distancia del centro de masas a dichos pórticos son -2 y 2 m. respectivamente.

$$\boldsymbol{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Para los A, B y C el valor del ángulo $\alpha = 90$ y la distancia del CM al pórtico A es de -4.5 m. es negativo debido a que la orientación positiva de éste pórtico rota con respecto al CM en forma horaria. Para el pórtico B la distancia es-0.5 m. en el primer piso y -2.5 m. en el segundo piso. Finalmente para el pórtico C estas distancias son 4.5 m. en el primer piso y 2.5 m. en el segundo piso. Las matrices de compatibilidad de los mencionados pórticos son:

$$\boldsymbol{A}^{(A)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -4.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{(B)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2.5 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{(C)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 4.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2.5 \end{bmatrix}$$

Estrictamente la matriz de compatibilidad del pórtico A debe tener una fila ya que ese pórtico tiene un piso sin embargo es de filas por el artificio realizado en la escritura de la matriz de rigidez lateral. Nótese que todos los elementos de la segunda fila son ceros al igual que la segunda, cuarta y sexta columna.

Finalmente al realizar el triple producto matricial indicado en la ecuación 17.2 se obtiene la matriz de rigidez en coordenadas de piso $\boldsymbol{KE}$ que resulta:

$$\boldsymbol{KE} = \begin{bmatrix} 12352.4 & -3983.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -3983.0 & 2100.8 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 12618.3 & -4217.6 & 20213.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -4217.6 & 2229.8 & -8435.2 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 20213.0 & -8435.2 & 186480.0 & -42292.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -42292.0 & 22339.0 \end{bmatrix}$$

17.4 SUBMATRICES DE $\boldsymbol{KE}$

La matriz de rigidez $\boldsymbol{KE}$ es particionada de acuerdo al número de pisos. Para el ejemplo 2 en que se trata de una edificación de 2 pisos la partición será de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{KE} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 12352.4 & -3983.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -3983.0 & 2100.8 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ \hline 0.0 & 0.0 & 12618.3 & -4217.6 & 20213.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -4217.6 & 2229.8 & -8435.2 & 0.0 \\ \hline 0.0 & 0.0 & 20213.0 & -8435.2 & 186480.0 & -42292.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -42292.0 & 22339.0 \end{array}\right]$$

Al efectuar el triple producto matricial definido en la ecuación 17.2 se obtiene que las submatrices son:

$$\boldsymbol{KE} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{XX} & \boldsymbol{K}_{XY} & \boldsymbol{K}_{X\theta} \\ \boldsymbol{K}_{YX} & \boldsymbol{K}_{YY} & \boldsymbol{K}_{Y\theta} \\ \boldsymbol{K}_{\theta X} & \boldsymbol{K}_{\theta Y} & \boldsymbol{K}_{\theta\theta} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}_{XX} = \sum \cos^2\alpha \ \boldsymbol{K}_L$$

$$\boldsymbol{K}_{YY} = \sum sen^2\alpha \ \boldsymbol{K}_L$$

$$\boldsymbol{K}_{XY} = \sum sen\alpha \cos\alpha \ \boldsymbol{K}_L$$

$$\boldsymbol{K}_{X\theta} = \sum \cos\alpha \ \boldsymbol{K}_L \ \boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{K}_{Y\theta} = \sum sen\alpha \ \boldsymbol{K}_L \ \boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{K}_{\theta\theta} = \sum \boldsymbol{K}_L \ \boldsymbol{r}^2$$

$$\boldsymbol{K}_{YX} = \boldsymbol{K}_{XY}{}^t \qquad \boldsymbol{K}_{\theta X} = \boldsymbol{K}_{X\theta}{}^t \qquad \boldsymbol{K}_{\theta Y} = \boldsymbol{K}_{Y\theta}{}^t$$

- **EJEMPLO N.- 3**

Determinar las submatrices de la matriz de rigidez $\boldsymbol{KE}$ aplicando el formulario correspondiente para el ejemplo 2.

- **SOLUCIÓN**

En estructuras con pórticos ortogonales como en el presente caso se tiene que $\boldsymbol{K}_{XX}$ es igual a la sumatoria de las matrices de rigidez lateral en sentido X, y $\boldsymbol{K}_{YY}$ es igual a la sumatoria de las matrices de rigidez lateral en sentido Y.

$$\boldsymbol{K}_{XX} = \boldsymbol{K}_L^{(1)} + \boldsymbol{K}_L^{(2)} = \begin{bmatrix} 6176.2 & -1991.5 \\ -1991.5 & 1050.4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6176.2 & -1991.5 \\ -1991.5 & 1050.4 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}_{XX} = \begin{bmatrix} 12352.4 & -3983.0 \\ -3983.0 & 2100.8 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}_{YY} = \boldsymbol{K}_L^{(A)} + \boldsymbol{K}_L^{(B)} + \boldsymbol{K}_L^{(C)} = 2 * \begin{bmatrix} 5922.7 & -2108.8 \\ -2108.8 & 1114.9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 772.87 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}_{YY} = \begin{bmatrix} 12618.3 & -4217.6 \\ -4217.6 & 2229.8 \end{bmatrix}$$

En pórticos ortogonales $\boldsymbol{K}_{XY} = \boldsymbol{0}$. Por otra parte se tiene que $\boldsymbol{K}_{X\theta} = \sum \boldsymbol{K}_L \, \boldsymbol{r}$ pero únicamente de los pórticos en sentido X. El vector $\boldsymbol{r}$ está conformado por las distancias del centro de masas al pórtico desde el piso 1 al piso n.

$$\boldsymbol{r}^{(1)} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{r}^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}_{XY} = \begin{bmatrix} 6176.2 & -1991.5 \\ -1991.5 & 1050.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6176.2 & -1991.5 \\ -1991.5 & 1050.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}_{XY} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para pórticos ortogonales se tiene que $\boldsymbol{K}_{Y\theta} = \sum \boldsymbol{K}_L \, \boldsymbol{r}$ pero con los pórticos en sentido Y.

$$\boldsymbol{r}^{(A)} = \begin{bmatrix} -4.5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{r}^{(B)} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -2.5 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{r}^{(C)} = \begin{bmatrix} 4.5 & 0 \\ 0 & 2.5 \end{bmatrix}$$

$$K_{Y\theta} = \begin{bmatrix} 772.87 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4.5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5922.7 & -2108.8 \\ -2108.8 & 1114.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -2.5 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 5922.7 & -2108.8 \\ -2108.8 & 1114.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4.5 & 0 \\ 0 & 2.5 \end{bmatrix}$$

$$K_{y\theta} = \begin{bmatrix} 20213.0 & 0.0 \\ -8435.2 & 0.0 \end{bmatrix}$$

Finalmente $K_{\theta\theta} = K_L^{(1)} \left(r^{(1)} \right)^2 + K_L^{(2)} \left(r^{(2)} \right)^2 + K_L^{(A)} \left(r^{(A)} \right)^2 + K_L^{(B)} \left(r^{(B)} \right)^2 + K_L^{(C)} \left(r^{(C)} \right)^2$

$$K_{\theta\theta} = \begin{bmatrix} 6176.2 & -1991.5 \\ -1991.5 & 1050.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6176.2 & -1991.5 \\ -1991.5 & 1050.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 772.87 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20.25 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5922.7 & -2108.8 \\ -2108.8 & 1114.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 6.25 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 5922.7 & -2108.8 \\ -2108.8 & 1114.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20.25 & 0 \\ 0 & 6.25 \end{bmatrix}$$

$$K_{\theta\theta} = \begin{bmatrix} 186480 & -42292 \\ -42292 & 22339 \end{bmatrix}$$

17.5 ESTRUCTURACIÓN SÍSMICA

Para que una estructura sea resistente a la torsión es necesario que la submatriz $K_{\theta\theta}$ sea lo más grande posible y para que ello se cumpla es conveniente que en una edificación se coloquen en el perímetro las líneas más resistentes para que su matriz de rigidez lateral K_L sea lo más grande posible ya que $K_{\theta\theta}$ es igual a la sumatoria de K_L por el vector $(r)^2$.

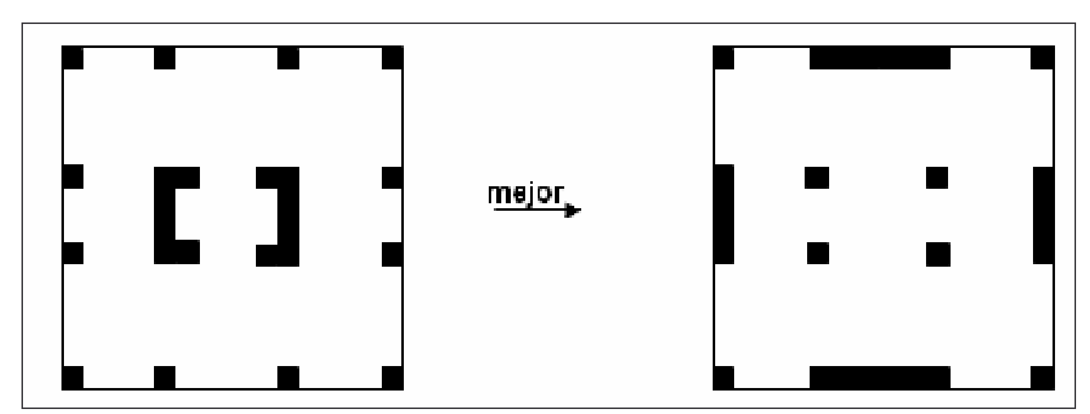


Figura 17.7 Mala y Buena Estructuración Sísmica desde el punto de vista torsional.

En la figura 17.7 se tienen dos estructuraciones para un mismo edificio en el de la izquierda los muros de corte se hallan en el centro del edificio en consecuencia las líneas resistentes de los pórticos centrales tendrán mayor rigidez lateral. En cambio en el edificio de la derecha los muros de corte se han colocado en los pórticos perimetrales luego son éstos pórticos los que tienen mayor rigidez lateral.

Por otra parte para los dos edificios el Centro de Masa se encuentra en su centro de gravedad. Por lo tanto la submatriz $K_{\theta\theta}$ será mayor en el edificio de la derecha de la figura 17.7 ya que los pórticos exteriores tienen mayor rigidez lateral y $K_{\theta\theta}$ es igual al producto de K_L por la distancia al cuadrado, por r^2.

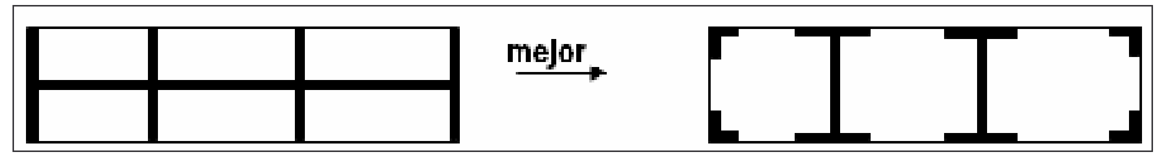


Figura 17.8 Mala y Buena estructuración desde el punto de vista torsional.

En la figura 17.8 se presentan dos casos de distribución de los elementos estructurales con problema similar al que se presentó en la figura 17.7. En la figura de la izquierda de 17.8 se aprecia que solo existe un pórtico en sentido X y que este pasa por el centro de masa en consecuencia no va aporta a $K_{\theta\theta}$ ya que su matriz r será nula para evitar esto se recomienda estructurar el edificio como se indica a la derecha de la figura 17.8, donde se tienen dos líneas resistentes en los pórticos exteriores que no pasan por el centro de masa luego aportan a la submatriz $K_{\theta\theta}$.

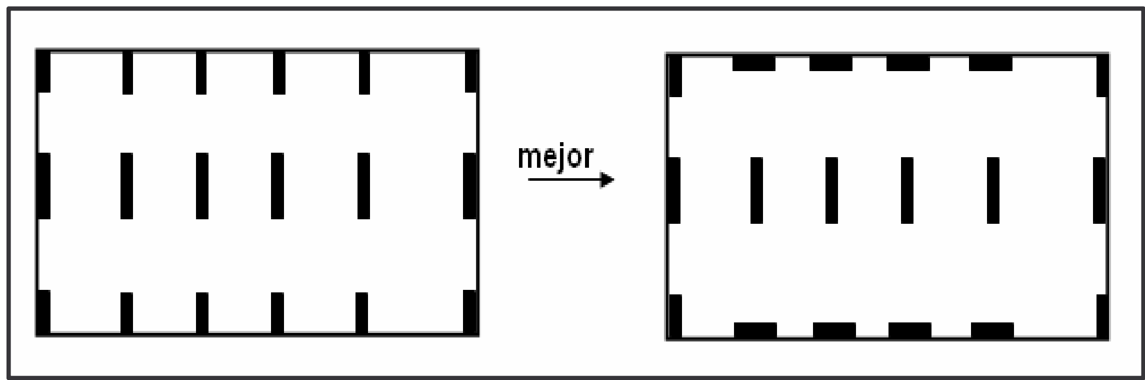


Figura 17.9 Mala y Buena estructuración desde el punto de vista trasnacional

En realidad uno de los problemas más críticos en un edificio es el problema torsional pero a más de ello se debe tener especial cuidado en tener un equilibrio entre las submatrices K_{XX} y K_{YY}, equilibrio en el sentido de que las dos tengan valores similares. A la izquierda de la figura 17.9 se aprecia un edificio en el cual solo existen líneas resistentes en sentido Y, y no existen líneas resistentes en sentido X de tal forma que en sentido Y va a ser muy rígido se va a desplazar muy poco en ese sentido pero es muy flexible en sentido X y tendrá grandes desplazamientos en X. Para evitar esto se recomienda la estructuración indicada a la derecha de la figura 17.8 ya que existen líneas resistentes en sentido X.

Con los tres ejemplos que se han indicado en el presente apartado se pretende que el lector en la distribución de los elementos resistentes dentro de un edificio tenga en cuenta lo siguiente:

- Que la submatriz K_{XX} tenga valores similares a la submatriz K_{YY}.
- Que la submatriz $K_{\theta\theta}$ sea lo más grande posible.
- Que se distribuya en forma simétrica las líneas resistentes en los dos sentido en X, Y.
- Que las líneas resistentes de los pórticos exteriores sean mayores que las líneas resistentes de los pórticos interiores.

17.6 CENTRO DE RIGIDEZ

Se define el **C**entro de **R**igidez, CR, de un piso como el punto donde al aplicar una fuerza cortante horizontal el piso se traslada sin rotar respecto al nivel inferior. Se destaca que las fuerzas sísmicas se aplican en el **C**entro de **M**asa, CM, y que lo ideal es que CM coincida o se encuentre lo más cerca posible del CR para evitar problemas de torsión en planta.

Sean e_x, e_y la distancia en sentido X y en sentido Y del CM con relación al CR. Para su evaluación en forma matricial se parte de la ecuación básica de estructuras para el análisis estático siguiente pero orientada al análisis sísmico con tres grados de libertad por planta.

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{KE} \quad \boldsymbol{q}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_X \\ \boldsymbol{Q}_Y \\ \boldsymbol{Q}_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{XX} & \boldsymbol{K}_{XY} & \boldsymbol{K}_{X\theta} \\ \boldsymbol{K}_{YX} & \boldsymbol{K}_{YY} & \boldsymbol{K}_{Y\theta} \\ \boldsymbol{K}_{\theta X} & \boldsymbol{K}_{\theta Y} & \boldsymbol{K}_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_X \\ \boldsymbol{q}_Y \\ \boldsymbol{q}_\theta \end{bmatrix} \qquad (17.5)$$

17.6.1 Análisis en Sentido X

Para el análisis sísmico en sentido X, solo existe las fuerzas sísmicas en dicho sentido es decir solo existe $\boldsymbol{Q}_X$ el vector $\boldsymbol{Q}_Y$ es nulo y el vector $\boldsymbol{Q}_\theta$ se debe calcular ya que son los momentos que van a ser que se cumpla con la condición de que exista traslación únicamente en sentido X, es decir $\boldsymbol{q}_Y$ es igual a cero y $\boldsymbol{q}_\theta$ es cero. Luego la ecuación (17.5) queda:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_X \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{Q}_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{XX} & \boldsymbol{K}_{XY} & \boldsymbol{K}_{X\theta} \\ \boldsymbol{K}_{YX} & \boldsymbol{K}_{YY} & \boldsymbol{K}_{Y\theta} \\ \boldsymbol{K}_{\theta X} & \boldsymbol{K}_{\theta Y} & \boldsymbol{K}_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_X \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$$

Al multiplicar la matriz de rigidez $\boldsymbol{KE}$ por el vector $\boldsymbol{q}$ e igualar al vector de cargas $\boldsymbol{Q}$ pero trabajando con las submatrices indicadas se tiene:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Q}_X &= \boldsymbol{K}_{XX}\ \boldsymbol{q}_X & \Rightarrow \boldsymbol{q}_X &= \boldsymbol{K}_{XX}^{-1}\ \boldsymbol{Q}_X \\ \boldsymbol{Q}_\theta &= \boldsymbol{K}_{\theta X}\ \boldsymbol{q}_X & \boldsymbol{Q}_\theta &= \boldsymbol{K}_{\theta X}\ \boldsymbol{K}_{XX}^{-1}\ \boldsymbol{Q}_X \end{aligned} \qquad (17.6)$$

Para calcular $\boldsymbol{Q}_\theta$ con la ecuación (17.6) se supone conocido el vector $\boldsymbol{Q}_X$ que son las fuerzas sísmicas en sentido X.

Al analizar en sentido X, se halla la excentricidad en sentido Y que se ha denominado $\boldsymbol{e}_y$, en cada piso se debe dividir el momento de torsión del piso M_t para la fuerza de corte V, las mismas que se obtienen por estática a continuación se escribe lo indicado sin negrillas por que es a nivel de piso.

$$e_Y = \frac{M_t}{V_X} \qquad (17.7)$$

17.6.2 Análisis en Sentido Y

Para el sentido Y se tiene que $\boldsymbol{Q_X} = \boldsymbol{0}$ en este caso solo existe $\boldsymbol{Q_Y}$ y los momentos $\boldsymbol{Q_\theta}$ que permiten la traslación únicamente en sentido Y, que hacen que solo exista $\boldsymbol{q_Y}$. Con todo lo indicado el sistema de ecuaciones queda de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{Q_Y} \\ \boldsymbol{Q_\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K_{XX}} & \boldsymbol{K_{XY}} & \boldsymbol{K_{X\theta}} \\ \boldsymbol{K_{YX}} & \boldsymbol{K_{YY}} & \boldsymbol{K_{Y\theta}} \\ \boldsymbol{K_{\theta X}} & \boldsymbol{K_{\theta Y}} & \boldsymbol{K_{\theta\theta}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{q_Y} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones se tiene:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Q_Y} &= \boldsymbol{K_{YY}}\ \boldsymbol{q_Y} & \Rightarrow \boldsymbol{q_Y} &= \boldsymbol{K_{YY}}^{-1}\ \boldsymbol{Q_Y} \\ \boldsymbol{Q_\theta} &= \boldsymbol{K_{\theta Y}}\ \boldsymbol{q_Y} & \Rightarrow \boldsymbol{Q_\theta} &= \boldsymbol{K_{\theta Y}}\ \boldsymbol{K_{YY}}^{-1}\ \boldsymbol{Q_Y} \end{aligned} \qquad (17.8)$$

Finalmente:

$$e_X = \frac{M_t}{V_Y} \qquad (17.9)$$

- **EJEMPLO N.- 4**

Encontrar el Centro de Rigidez de la estructura del ejemplo 2. Si las fuerzas que se obtienen del análisis sísmico en sentido X y en sentido Y, son:

$$\boldsymbol{Q_X} = \begin{bmatrix} 1.68 \\ 1.68 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{Q_Y} = \begin{bmatrix} 1.68 \\ 1.68 \end{bmatrix}$$

- **SOLUCIÓN**

  - Análisis en sentido X

En el ejemplo anterior se aprecia que $\boldsymbol{K_{\theta X}} = \boldsymbol{0}$ en consecuencia el vector $\boldsymbol{Q_\theta} = \boldsymbol{0}$. Luego los cortantes en sentido X valen:

$$V_{2X} = 1.68\,T. \qquad V_{1X} = 3.36\,T.$$

En la figura 17.6 se indica el centro de masas de cada uno de los pisos y en ella se aprecia que los momentos de torsión son nulos de tal manera que no existe excentricidad e_Y en ninguno de los dos pisos.

  - Análisis en sentido Y

Para el sentido Y se tiene que: $\boldsymbol{K_{\theta Y}} = \begin{bmatrix} 20213.0 & -8435.2 \\ 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}$. Nótese que $\boldsymbol{K_{\theta Y}}$ es la matriz transpuesta de $\boldsymbol{K_{Y\theta}}$. Por otra parte $\boldsymbol{K_{YY}} = \begin{bmatrix} 12618.3 & -4217.6 \\ -4217.6 & 2229.8 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{Q_Y} = \begin{bmatrix} 1.68 \\ 1.68 \end{bmatrix}$. Al reemplazar estos valores en la ecuación (17.8) se obtiene:

$$Q_\theta = \begin{bmatrix} -1.90 \\ 0.00 \end{bmatrix}$$

En la figura 17.10 se indican los vectores Q_Y y Q_θ con los cuales se procede al cálculo de los cortantes de piso y momentos de torsión en cada piso con respecto al centro de masas.

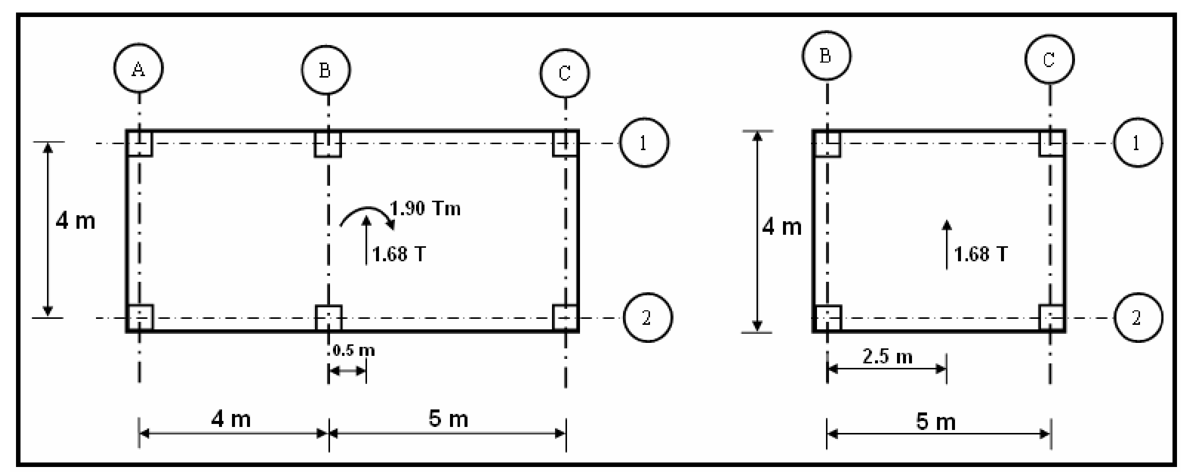


Figura 17.10 Fuerzas y momentos en el centro de masas para el caso de traslación pura en Y.

Como es negativo el momento de 1.90 Tm. se lo ha colocado con sentido horario en la primera planta. Nótese que la distancia del centro de masas entre los pisos 2 y 1 es de (2.50 – 0.50) que da 2.0 m. En base a las fuerzas y momentos que actúan en la figura 17.10 se tiene que los cortantes y momentos de torsión valen:

$$V_{2Y} = 1.68 \qquad\qquad V_{1Y} = 3.36$$

$$M_{2T} = Q_2 + V_{2Y} * 0 = 0 \qquad\qquad M_{1T} = M_{2T} + Q_1 + V_{1Y} * 2$$

$$M_{1T} = -1.90 + 1.68 * 2 = 1.46\, Tm.$$

$$e_{2X} = \frac{M_{2T}}{V_{2Y}} = 0 \qquad\qquad e_{1X} = \frac{M_{1T}}{V_{1Y}} = \frac{1.46}{3.36} = 0.435\, m.$$

En la figura 17.11 se indica la ubicación del Centro de Rigidez de cada uno de los pisos.

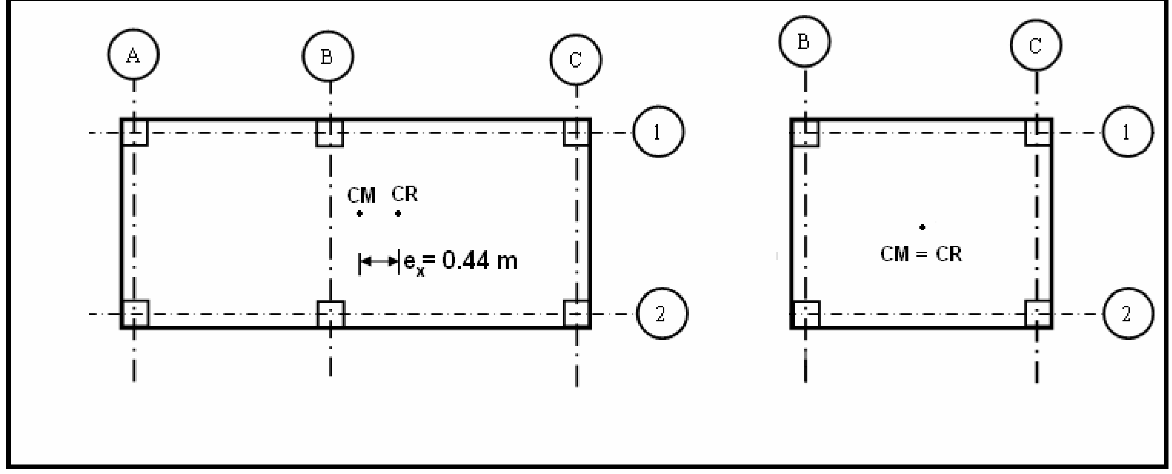


Figura 17.11 Centro de masa y de rigidez de cada uno de los pisos en estructura analizada.

17.7 CENTRO DE RIGIDEZ EN FUNCIÓN DE RIGIDEZ "t"

En el planteamiento teórico desarrollado en el apartado anterior se observa que el cálculo del centro de rigidez depende de la acción sísmica ya que es función de los vectores Q_X y Q_Y. Esto ya es una limitante al cálculo pero la mayor controversia que existe es que al ingresar la estructura en el rango no lineal la rigidez de los elementos cambia, aquí se ha calculado con inercias agrietadas de acuerdo al CEC-2000, es decir se ha trabajado con $I_V = 0.5 * I_o$ y con $I_C = 0.8 * I_o$. Al trabajar con inercias agrietadas se tiene una mejor aproximación en el cálculo del centro de rigidez en cada uno de los pisos.

Lo importante es reconocer que ante un sismo muy severo es filosofía de diseño que la estructura ingrese en el rango no lineal, que sufra daño y consecuentemente la rigidez de cada uno de los elementos de la estructura va a ir cambiando de acuerdo al grado de daño que se va presentando. Este cambio de rigidez no se lo toma en cuenta en la forma presentada por este motivo es que **actualmente en lugar de calcular el Centro de Rigidez se está calculando el Centro de Resistencia**, tema que no viene al caso presentarlo ya que el centro de resistencia depende de la cantidad de armadura que tiene la estructura es el punto en el cual se considera concentrada toda la resistencia de una estructura.

De tal manera que si es aproximado el cálculo del Centro de Rigidez conviene ver un procedimiento más fácil del cálculo de dicho centro, un procedimiento que sea más conceptual que se visualice mejor lo que se está realizando en lugar de presentar un procedimiento matricial como el realizado en el apartado anterior y este procedimiento se indica a continuación en función de la rigidez lateral t.

En capítulos anteriores se vio que la rigidez t es la fuerza necesaria para que un elemento se desplace horizontalmente la unidad y todas las demás coordenadas nulas. Está rigidez al no considerar el efecto de corte vale:

$$t = \frac{12EI}{H^3} \qquad (17.10)$$

El cálculo del centro de rigidez en el procedimiento que se indica a continuación mediante la realización de un ejemplo se lo hace únicamente en función de la rigidez de las columnas.

- **EJEMPLO N.- 5**

Encontrar el centro de rigidez en función de la rigidez "t" de la estructura irregular en elevación de 2 pisos del ejemplo 2 que se ha venido analizando.

- **SOLUCIÓN**

Da igual trabajar con inercias gruesas o con inercias agrietadas ya que con éstas últimas todas las columnas quedan multiplicadas por 0.8 que es el factor que considera el CEC-2000. En el ejemplo se trabaja con inercias agrietadas. El procedimiento de cálculo está basado en un principio básico de las estructuras y que es el equilibrio de fuerzas y momentos.

Al igual que en el ejemplo anterior el análisis se realiza en dos sentidos X e Y pero para el presente ejemplo no existe excentricidad en sentido X, razón por la que no se presenta el cálculo en dicho sentido solo existe excentricidad en sentido Y.

Las columnas del pórtico A son de 30 x 30 y todas las restantes columnas en el primer piso y en el segundo piso son de 40 x 40. En la figura 17.12 se indican la rigidez t de cada una de las columnas.

- Análisis en sentido Y

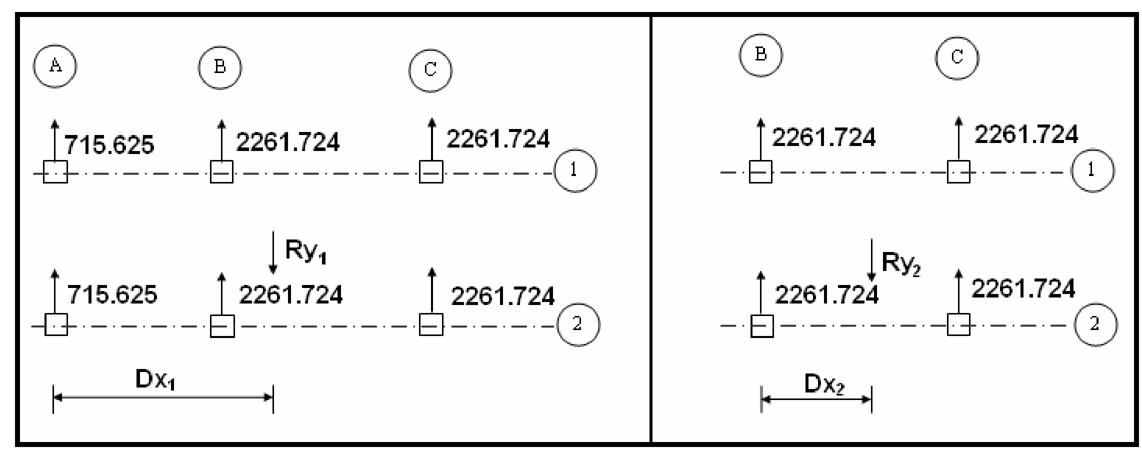


Figura 17.12 Rigidez "t" en las columnas para el análisis en sentido Y.

El análisis se realiza por separado en cada uno de los pisos. Sea R_{Y2} la resultante de las fuerzas en sentido Y en el segundo piso. Por equilibrio de fuerzas se tiene:

$$R_{Y2} = 2261.724 * 4 = 9046.896\, T$$

Por otra parte del equilibrio de momentos con respecto al eje B2 se tiene:

$$2261.724 * 4 + 2261.724 * 4 = R_{Y2} * D_{X2} \qquad \Rightarrow D_{X2} = 2.5\, m.$$

$$e_{X2} = 2.5 - 2.5 = 0.0\, m.$$

Para el primer piso el equilibrio de fuerzas en sentido Y y el de momentos con respecto al eje A2, reporta:

$$R_{Y1} = 2261.724 * 4 + 715.625 * 2 = 10478.146\, T.$$
$$2261.724 * 4 * 2 + 2261.724 * 9 * 2 = 10478.146 * D_{X1} \qquad \Rightarrow D_{X1} = 5.612\, m.$$
$$e_{X1} = 5.612 - 4.5 = 1.11\, m.$$

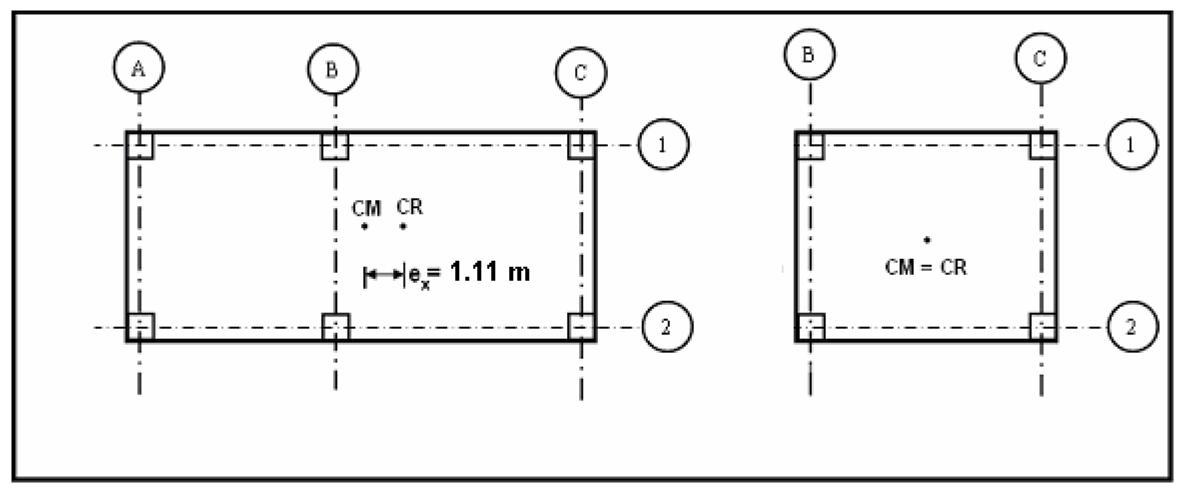


Figura 7.13 Ubicación del Centro de Masa al calcularlo en función de la rigidez "t".

Nótese que la distancia D_{X1} es medida con respecto al punto A2 y que la distancia D_{X2} es medida con relación al punto B2. Por ese motivo para calcular las excentricidades se restan las

distancias correspondientes al Centro de Masa. Por otra parte se aprecia que existe una diferencia considerable en la excentricidad del primer piso en relación a la que se obtuvo del planteamiento matricial ya que el cálculo en función de la matriz t es aproximado, más exactitud se tiene si se calcula en función de la rigidez de piso de cada uno de los pórticos como se ilustra a continuación.

17.8 CENTRO DE RIGIDEZ EN FUNCIÓN DE RIGIDEZ DE PISO

Se define la rigidez de piso K_i como la relación entre el cortante de piso V_i dividido para el desplazamiento relativo de piso.

$$K_i = \frac{V_i}{q_i - q_{i-1}} \qquad (17.11)$$

En este caso tanto el cortante de piso como los desplazamientos laterales de piso se obtienen en función de una acción sísmica. Existen fórmulas aproximadas para determinar la rigidez de piso sin tener en cuenta la acción sísmica.

Una vez que se tiene la rigidez de piso de cada uno de los pórticos se obtiene el centro de rigidez en forma similar a la realizada en el ejercicio anterior es decir se realiza primero el equilibrio de fuerzas y después el equilibrio de momentos.

- **EJEMPLO N.- 6**

Encontrar el Centro de Rigidez de la estructura del ejemplo 2 en función de la rigidez de piso de cada uno de los pórticos.

- **SOLUCIÓN**

En sentido X no hay excentricidad pero si lo hay en sentido Y por lo que en la figura 7.14 se indican las rigideces de piso de la estructura analizada para dicho sentido, tomadas de la tesis de grado de Roberto Aguiar Noury (2002).

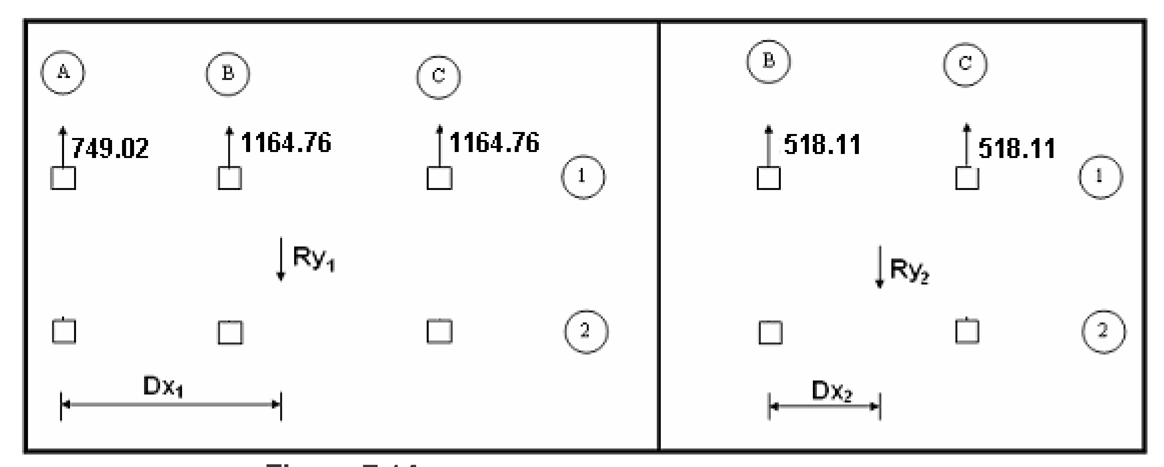


Figura 7.14 Rigidez de piso de cada uno de los pórticos.

Para el segundo piso se tiene:

$$R_{Y2} = 518.11 + 518.11 = 1036.22$$

$$D_{X2} = \frac{518.11 * 5}{1036.22} = 2.5\ m.$$
$$e_{X2} = 2.5 - 2.5 = 0.0\ m.$$

Para el primer piso se tiene:

$$R_{Y1} = 1164.76 + 1164.76 + 749.02 = 3078.54$$
$$D_{X1} = \frac{1164.76 * 9 + 1164.76 * 4}{3078.54} = 4.92\ m.$$
$$e_{X1} = 4.92 - 4.5 = 0.42\ m.$$

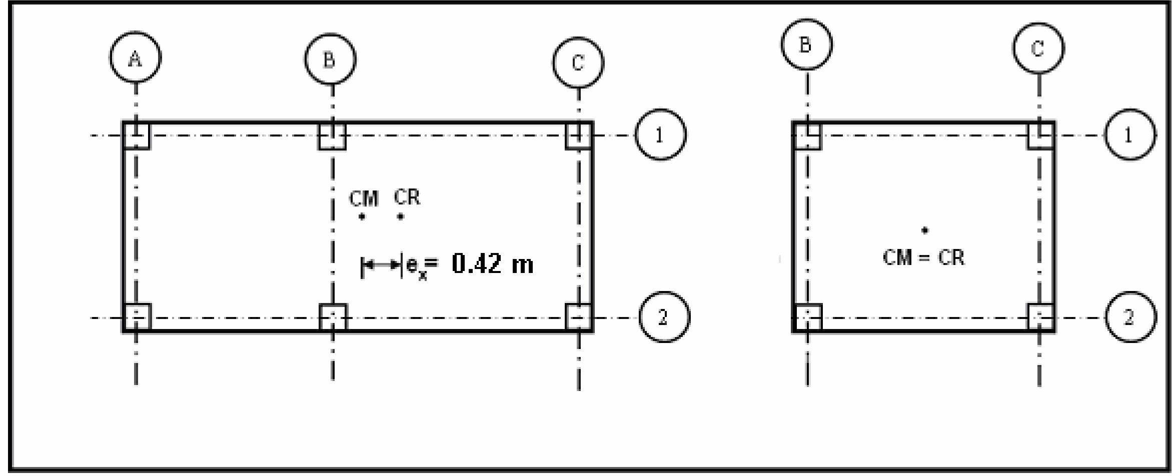


Figura 7.15 Ubicación del Centro de Masa al calcularlo en función de la rigidez de piso.

En la figura 7.15 se indica la ubicación del centro de rigidez que se obtiene en función de la rigidez de piso. Los resultados obtenidos son muy similares a los que se encontraron al aplicar el método matricial y que se indican en la figura 7.11.

17.9 EJERCICIOS PROPUESTOS

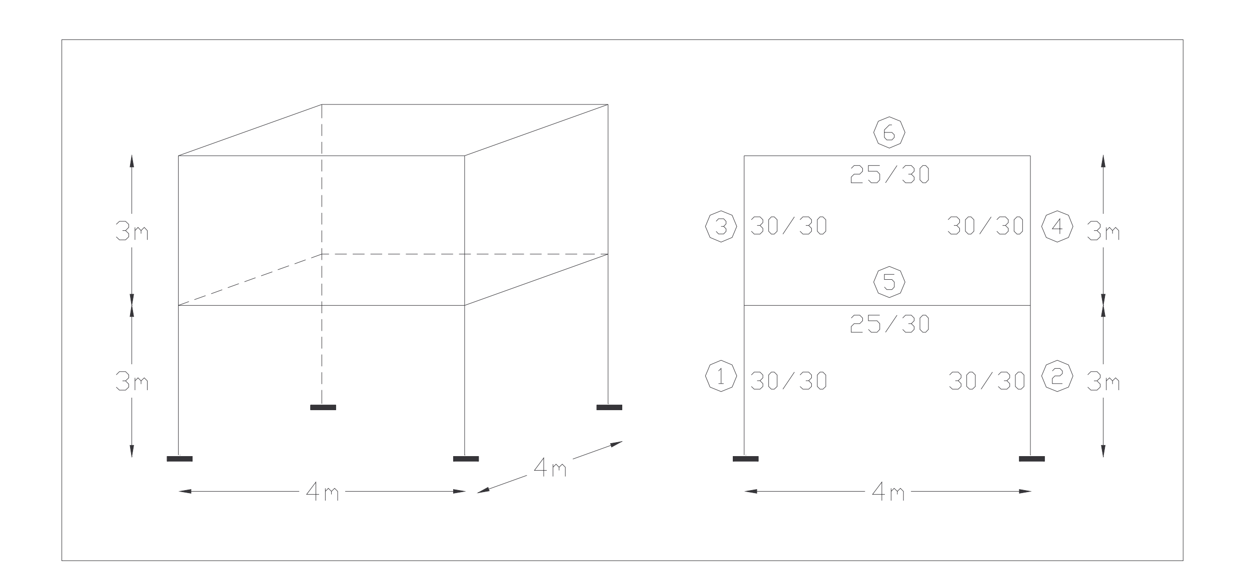
EJERCICIO N.- 1

Encontrar la matriz de rigidez en coordenadas de pisos de la estructura de dos pisos que se indica a continuación, si todos los pórticos son iguales y tienen las dimensiones indicadas en la figura que está a la derecha. Calcular con un $E = 1449137.6 \frac{T}{m^2}$ y de la siguiente manera:

i) Con inercias gruesas y en base a la matriz de compatibilidad.

ii) Con inercias agrietadas de acuerdo al CEC-2000 y en base a la matriz de compatibilidad.

iii) Con inercias agrietadas de acuerdo al CEC-2000 y utilizando las submatrices de la matriz de rigidez $\boldsymbol{KE}$.



EJERCICIO N.- 2

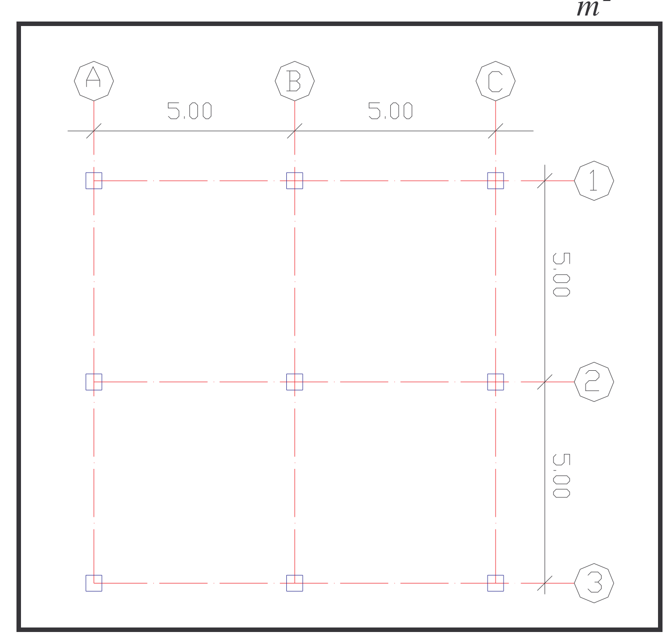
Encontrar el Centro de Rigidez de la estructura del Ejercicio N.- 1 de las siguientes maneras:

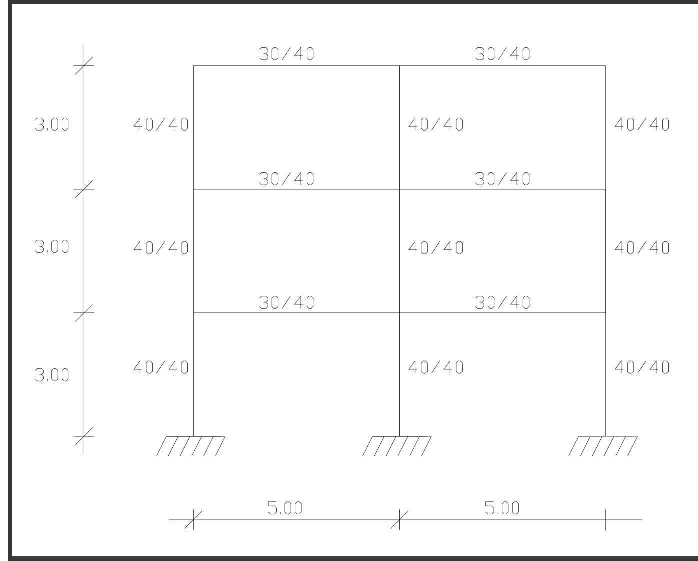
i) En base al planteamiento matricial con $Q_X = Q_Y = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.0 \end{bmatrix}$ T.

ii) En base a la rigidez “t”.

EJERCICIO N.- 3

Determinar la matriz de rigidez en coordenadas de piso de la estructura de tres pisos que se indica a continuación, en la cual todos los pórticos son iguales. Calcular con inercias agrietadas de acuerdo a lo estipulado por el CEC-2000. Considerar $E = 2173706.5 \ \frac{T}{m^2}$.





Pórtico Tipo

EJERCICIO N.- 4

Determinar el Centro de Rigidez de la estructura del Ejercicio N.- 3 si $\boldsymbol{Q}_X = \boldsymbol{Q}_Y = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.0 \\ 1.5 \end{bmatrix}$ T.

EJERCICIO N.- 5

Resolver el ejercicio anterior si $\boldsymbol{Q}_X = \boldsymbol{Q}_Y = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.5 \\ 2.0 \end{bmatrix}$ T.